

图像处理

本章主要分析图像处理中常用的算法原理及实现。本章内容包括图像的傅里叶变换、图像滤波、边缘检测和数字形态学滤波等，其中傅里叶变换是图像滤波的数学基础，滤波后的边缘检测是对图像重要的边缘信息的提取。图像滤波一般包括空间域滤波和频率域（简称频域）滤波，数字形态学滤波有别于这两种滤波方式，是一种基于目标图像形态变换的图像滤波方式。

3.1 图像的傅里叶变换

3.1.1 频域与时域

1. 频域与时域

时域即时间域，自变量是时间，因变量是信号的变化，其动态信号描述信号在不同时刻的取值。而频域是频率域，自变量是信号的频率，因变量是信号的幅值，反映了信号幅值与频率的关系。时域表达简洁且直观，例如，正弦波信号只需要幅值、频率、相位三个特征量就可以进行表达，但对形状相似的非正弦波信号很难加以区分。而频域表达更加深刻简练，无论是正弦波信号还是非正弦波信号，都可以通过傅里叶积分或傅里叶变换将其分解为各次谐波，从而可以用各次谐波的幅值、频率和相位来表示信号。以方波信号进行傅里叶展开为例，如图 3-1 所示，一个方波信号等于多个不同频率的正弦波信号的叠加。

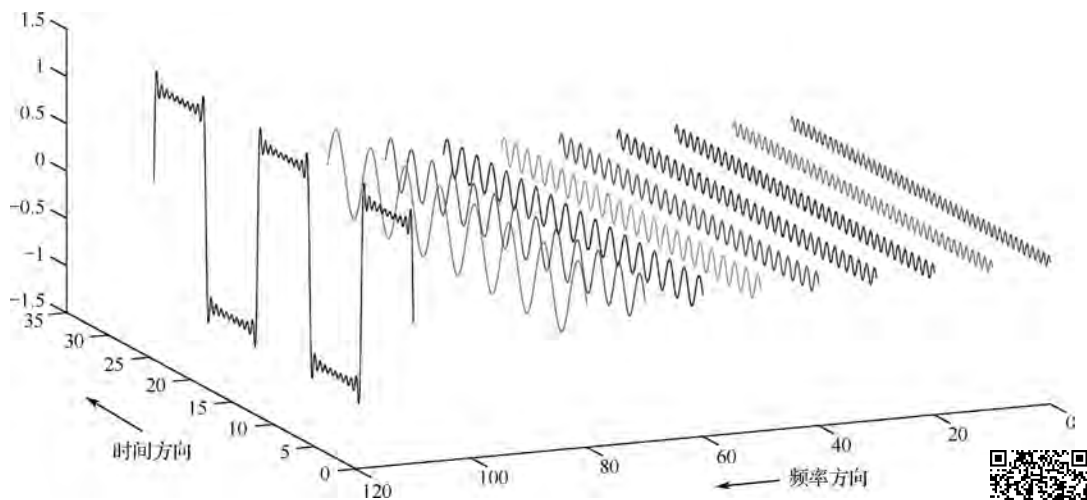


图 3-1 傅里叶展开示意图



2. 频域与时域的关系

时域与频域是两种用来描述信号的方式, 时域分析和频域分析是分析模拟信号的两种方法。当我们对信号进行时域分析时, 往往不能得到信号的所有特征, 因为信号不仅与时间相关, 还与频率分布、相位分布等因素有关。因此, 还需要对信号的频率分布进行分析, 也就需要在频域内对信号进行表示。信号从时域到频域的变换是通过傅里叶级数和傅里叶积分实现的, 傅里叶级数是针对周期函数信号的变换, 傅里叶积分是针对非周期函数信号的变换。

3.1.2 典型的二维信号

1. 冲激信号

线性系统和傅里叶变换研究的核心是冲激及其取样特性, 连续变量 t 在 $t=0$ 处的单位冲激函数表示为 $\delta(t)$, 其定义是

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

它还可以被限制为满足等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3-2)$$

物理上, 如果我们将 t 解释为时间, 那么一个冲激函数可以看成幅值无限、持续时间为 0、具有单位面积的尖峰信号。一个冲激函数具有如下积分形式的采样特性:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (3-3)$$

假设 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 则采样特性得到函数 $f(t)$ 在冲激位置的函数值。采样特性的一种更为一般的情况是在 $t=t_0$ 处采样, 对应的单位冲激函数表示为 $\delta(t-t_0)$ 。此时采样特性变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (3-4)$$

令 x 表示一个离散变量。单位离散冲激函数 $\delta(x)$ 在离散系统中的作用与处理连续变量时冲激函数 $\delta(t)$ 的作用相同。其定义如下:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

图 3-2 以图解的方式显示了单位离散冲激函数。与连续形式不同的是, 离散冲激函数是一个普通的函数。



图 3-2 单位离散冲激函数

2. 阶跃信号

连续信号的单位阶跃信号的表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (3-6)$$

令 x 表示一个离散变量。单位阶跃信号 $u(x)$ 在离散系统中定义如下:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (3-7)$$

图 3-3 以图解的方式显示了单位连续阶跃函数和单位离散阶跃函数。

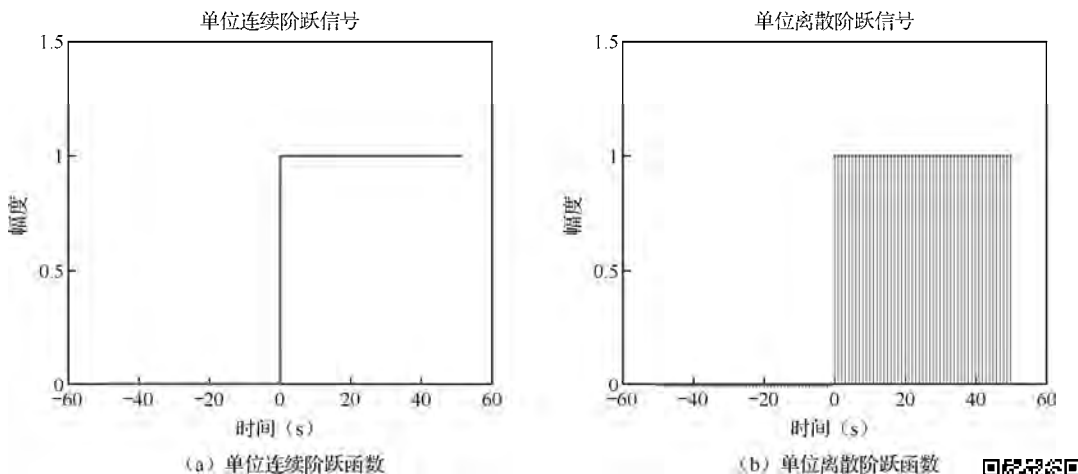


图 3-3 单位连续阶跃函数和单位离散阶跃函数

3.1.3 傅里叶变换

1. 傅里叶变换原理

傅里叶变换的实质是将信号表示为无穷多个各次谐波的叠加，利用直接测量得到的原始信号，进行多次谐波信号叠加，来得到正弦波信号的频率、振幅和相位。与之对应的是傅里叶反变换，即将多次谐波的正弦波信号叠加为一个信号。傅里叶变换将某些难以处理的时域信号转换为易于处理与分析的频域信号，随后利用一些频域分析方法对频域信号进行处理和加工，最后进行傅里叶反变换将处理后的频域信号转换为时域信号。

2. 傅里叶变换及其反变换

(1) 一维连续型傅里叶变换及其反变换

单变量连续函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $F(u)$ 定义为

$$F(u) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx \quad (3-8)$$

其中， $j = \sqrt{-1}$ ， u 为斜率变量。若给出 $F(u)$ ，则其傅里叶反变换 $f(x)$ 的定义为

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{j2\pi ux} du \quad (3-9)$$

假设单变量连续函数是冲激函数 $\delta(t)$ ，冲激函数的傅里叶变换 $F(u)$ 为

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ut} dt = 1 \quad (3-10)$$

同理，假设单变量连续函数是阶跃函数 $u(t)$ ，阶跃函数的傅里叶变换 $F(u)$ 为

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j2\pi ut} dt = \int_0^{+\infty} e^{-j2\pi ut} dt = \frac{1}{j2\pi u} \quad (3-11)$$

(2) 二维连续型傅里叶变换及其反变换

二维连续函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换 $F(u, v)$ 定义为

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (3-12)$$

若假定 $f(x, y)$ 为一个实函数，则其傅里叶变换是对称的，即

$$F(u, v) = F(-u, -v) \quad (3-13)$$

并且其傅里叶变换的频率谱也是对称的, 即

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (3-14)$$

若给定 $F(u, v)$, 则其傅里叶反变换 $f(x, y)$ 的定义为

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (3-15)$$

(3) 一维离散型傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT) 及其反变换 (Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)

单变量离散函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $F(u)$ 定义为

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad (3-16)$$

其中, $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。

欧拉公式为

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (3-17)$$

将式 (3-17) 代入式 (3-16) 可以得到

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \left(\cos \left(-2\pi \frac{ux}{M} \right) + j \sin \left(-2\pi \frac{ux}{M} \right) \right) \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \left(\cos \left(2\pi \frac{ux}{M} \right) - j \sin \left(2\pi \frac{ux}{M} \right) \right) \end{aligned} \quad (3-18)$$

若给定 $F(u)$, 则其傅里叶反变换 $f(x)$ 的定义为

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi \frac{ux}{M}} \quad (3-19)$$

其中, $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。

(4) 二维离散型傅里叶变换及其反变换

二维离散函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换 $F(u, v)$ 定义为

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (3-20)$$

其中, $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

若给定 $F(u, v)$, 则其傅里叶反变换 $f(x, y)$ 的定义为

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (3-21)$$

其中, $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

(5) 傅里叶变换的极坐标表示

① 一维傅里叶变换的极坐标表示为

$$F(u) = |F(u)| e^{-j\phi(u)} \quad (3-22)$$

频率谱为

$$|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I(u)^2} \quad (3-23)$$

其中, $R(u)$ 和 $I(u)$ 分别是 $F(u)$ 的实部和虚部。

相位谱为

$$\phi(u) = \arctan \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right] \quad (3-24)$$

② 二维 DFT 的极坐标表示为

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{-j\phi(u, v)} \quad (3-25)$$

频率谱为

$$|F(u, v)| = \sqrt{R(u, v)^2 + I(u, v)^2} \quad (3-26)$$

其中, $R(u, v)$ 和 $I(u, v)$ 分别是 $F(u, v)$ 的实部和虚部。

相位谱为

$$\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right] \quad (3-27)$$

傅里叶变换的频率谱和相位谱示例如图 3-4 所示。

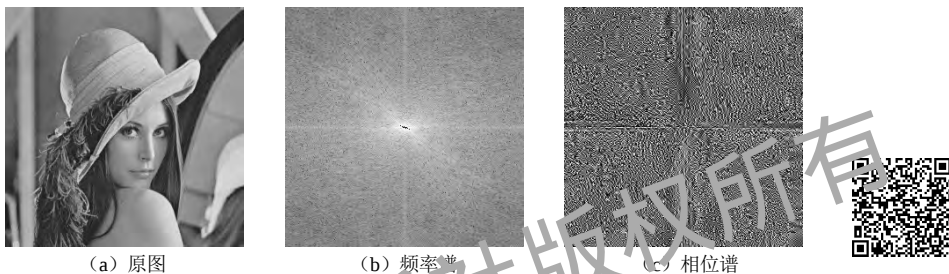


图 3-4 傅里叶变换的频率谱和相位谱示例

(6) 二维傅里叶变换的性质

① 平移性与旋转性

$$f(x, y) e^{j2\pi \left(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N} \right)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \quad (3-28)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi \left(\frac{x_0 u}{M} + \frac{y_0 v}{N} \right)} \quad (3-29)$$

其中, $\Leftrightarrow$ 表示函数 $f(x, y)$ 与其傅里叶变换 $F(u, v)$ 的对应关系, 也就是说, 右侧项是左侧项的傅里叶变换, 左侧项是右侧项的傅里叶反变换。式 (3-28) 表明将空间域函数 $f(x, y)$ 乘以一个指数项等价于将原来的频域中心 $F(u, v)$ 移动到一个新的频域 $F(u - u_0, v - v_0)$ 处; 式 (3-29) 表明将频域函数 $F(u, v)$ 乘以一个指数项等价于将原来的空间域中心 $f(x, y)$ 移动到一个新的空间位置 $f(x - x_0, y - y_0)$, 同时说明 $f(x, y)$ 的平移不影响 $f(x, y)$ 傅里叶变换的幅值。特别地, 当

$u_0 = \frac{M}{2}$ 且 $v_0 = \frac{N}{2}$ 时, 有

$$e^{j2\pi \left(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N} \right)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y} \quad (3-30)$$

将式 (3-30) 代入式 (3-28) 和式 (3-29), 可以得到

$$f(x, y) (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) \quad (3-31)$$

$$f\left(x - \frac{M}{2}, y - \frac{N}{2}\right) \Leftrightarrow F(u, v) (-1)^{u+v} \quad (3-32)$$

由式 (3-32) 可知, 将频域函数 $F(u, v)$ 乘以 $(-1)^{u+v}$, 即可将图像的原点从左上角 $(0, 0)$ 移到 $M \times N$ 大小的图像的中心点 $\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right)$ 。

将极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, u = \omega \cos \phi, v = \omega \sin \phi$ 代入式 (3-29), 并将 $f(x, y)$ 和 $F(u, v)$ 转换为 $f(r, \theta)$ 和 $F(\omega, \phi)$, 可以得到

$$f(r, \theta - \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi - \phi_0) \quad (3-33)$$

上式说明, 若空间域函数 $f(x, y)$ 旋转的角度是 θ_0 , 则其傅里叶变换也旋转相同的角度。

在图像处理中, 傅里叶变换的这两条性质说明图像平移并不会影响图像本身的频谱特征, 而图像的相位会随着图像本身的旋转而同步旋转。

② 分配律

傅里叶变换的分配律是相对于空间域函数 $f(x, y)$ 而言的, 即

$$\mathcal{F}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \mathcal{F}[f_1(x, y)] + \mathcal{F}[f_2(x, y)] \quad (3-34)$$

需要注意的是, 分配律对函数 $f(x, y)$ 的乘法是不适用的, 即

$$\mathcal{F}[f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] \neq \mathcal{F}[f_1(x, y)] \cdot \mathcal{F}[f_2(x, y)] \quad (3-35)$$

③ 尺度变换

对于任意的常数 a, b , 满足下列关系式

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v) \quad (3-36)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (3-37)$$

④ 周期性与共轭对称性

时间域函数 $f(x, y)$ 沿着 x, y 方向无限周期拓展, 即

$$f(x, y) = f(x + aM, y) = f(x, y + bN) = f(x + aM, y + bN) \quad (3-38)$$

其中, a 和 b 是整数。同样地, 复频域函数 $F(u, v)$ 始终沿着 u, v 方向无限周期拓展, 即

$$F(u, v) = F(u + aM, v) = F(u, v + bN) = F(u + aM, v + bN) \quad (3-39)$$

特殊地, 当 $f(x, y)$ 为实函数时, 其傅里叶变换满足共轭对称性, 即

$$F(u, v) = F^*(-u, -v) \quad (3-40)$$

其中, $F^*(u, v)$ 为 $F(u, v)$ 的共轭复数。

⑤ 分离性

二维离散傅里叶变换分离性的基本思想是二维 DFT 可分离为两次一维 DFT, 故可以通过计算两次一维 DFT 来得到二维 DFT。

对于一个 M 行 N 列的二维图像 $f(x, y)$, 先对行变量 y 做一次长度为 N 的一维 DFT, 再对列变量 x 做一次长度为 M 的一维 DFT, 就可以得到二维图像的傅里叶变换 $F(u, v)$, 即

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} F(x, v) \end{aligned} \quad (3-41)$$

其计算过程示意图如图 3-5 所示。

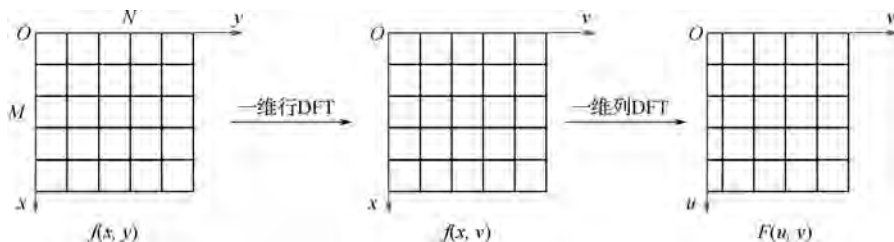


图 3-5 二维 DFT 分离性计算过程示意图

⑥ 平均值

根据二维离散傅里叶变换的定义：

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (3-42)$$

所以，

$$F(0, 0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (3-43)$$

结合 $f(x, y)$ 的平均值的定义

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (3-44)$$

所以，

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0) \quad (3-45)$$

对于图像 $f(x, y)$ ，其傅里叶变换的原点像素值也就是原图像的平均灰度。

⑦ 卷积定理

卷积包括空间域卷积和频域卷积。卷积是空间域滤波和频域滤波之间的纽带，两个空间域信号的卷积等价于其频域信号的乘积，即

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v) \quad (3-46)$$

其中，*表示信号的卷积。两个信号频域上的卷积等价于空间域的相乘，即

$$f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot H(u, v) \quad (3-47)$$

二维卷积表达式如下：

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x-m, y-n) \quad (3-48)$$

其中， $x=0, 1, \dots, M-1$ ， $y=0, 1, \dots, N-1$ 。该性质在图像处理方面的主要用处是简化计算，也就是将需要经过翻折、平移、相乘、求和等步骤实现的复杂的卷积运算简化为简单的乘法运算。实际应用中，根据空间域卷积定理，在空间域对应的是原始信号与滤波器的冲激响应的卷积，卷积定义为信号翻折平移求和的过程，步骤复杂，运算量大。但如果转换到频域进行处理，则将二者的频谱直接相乘就可以得到滤波结果，然后对滤波结果进行傅里叶反变换就可以得到滤波后的空间域图像。

下面使用一个一维的例子解释卷积。假设有离散函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ ，分别从 1 到 6 计算 $f(x) * g(x)$ ，可以使用图 3-6 理解，首先将 $g(x)$ 翻折，然后将 $g(x)$ 平移，根据 x 的大小确定平移的大小，接着将 $g(x)$ 和 $f(x)$ 对应的位置相乘，最后求和。

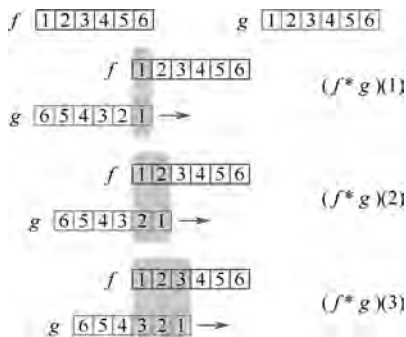


图 3-6 一维傅里叶卷积效果



数字图像是二维离散信号，对数字图像做卷积操作就是利用卷积核在图像上滑动，将图像点上的像素值与对应的卷积核上的数值相乘，然后将相乘的值相加，作为卷积核中间像素对应的图像上的像素灰度值，并最终滑动完成所有图像的过程。图 3-7 展示了图像的卷积核翻转过程，可以让卷积核对行和列同时翻转，也可以通过让卷积核绕着中心的核旋转 180° 。图 3-8 清晰地表示整个卷积过程中一次相乘后相加的所有结果，该图像采用 3×3 的卷积核，卷积核是已经翻转过的，卷积核内共有 9 个数值，所以图像右侧加法算式有 9 行，而每行都是图像像素和卷积核上的数值相乘，最终结果 -8 代替原图像中对应位置的 1。这样图像的一个步长为 1 的滑动，每次滑动都是一次相乘再相加的工作。

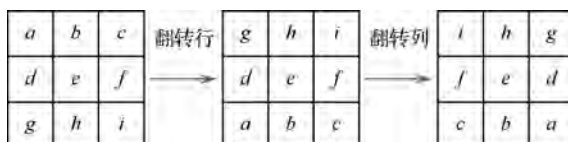


图 3-7 卷积核翻转

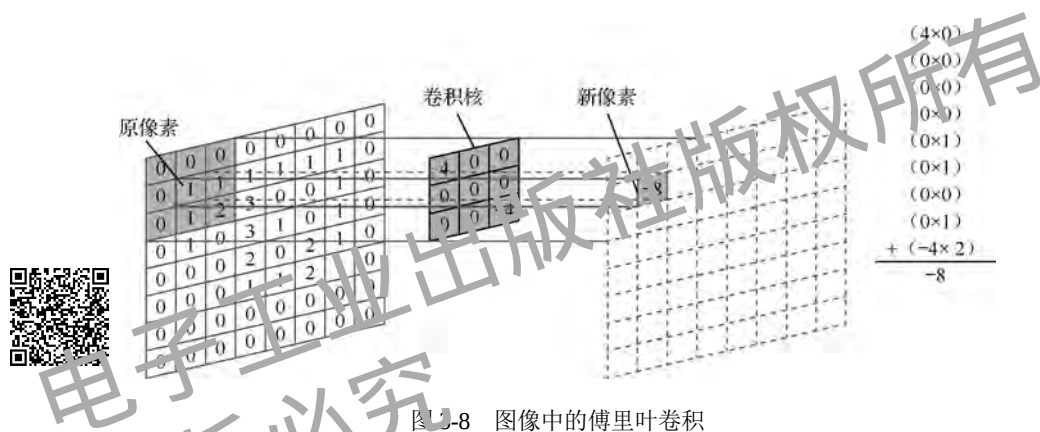


图 3-8 图像中的傅里叶卷积

③ 相关定理

空间域中 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 的相关等价于频域中 $F(u, v)$ 的共轭与 $G(u, v)$ 相乘，即

$$f(x, y) \circ h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v)H(u, v) \quad (3-49)$$

同理有

$$f^*(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ H(u, v) \quad (3-50)$$

其中，大小为 $M \times N$ 的两个函数 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的离散相关性定义为

$$f(x, y) \circ h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(m, n) \quad (3-51)$$

相关用于刻画两个信号在某个时刻的相似程度，在图像中代表两幅图像的互相匹配程度。由式 (3-48) 和式 (3-51) 可以看出，卷积和相关的区别在于卷积将核翻转了 180° 。

相关定理类似卷积定理，把相关性运算转化为频域相乘，从而简化了计算。相关定理的重要应用在于匹配：确定是否有感兴趣的物体区域。 $f(x, y)$ 是原始图像， $g(x, y)$ 作为感兴趣的物体或区域（模板），如果匹配，二维图像 $f(x, y)$ 中对应于 $g(x, y)$ 位置处的相关值会达到最大。

(7) 快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT)

由于 DFT 中要用到卷积计算，而卷积运算的计算量非常大，计算机很难进行计算，而快速傅里叶变换可以大大简化 DFT 的计算，对硬件实现特别有利。FFT 算法基于一个称为逐次加倍的