

第 1 章 数学物理方程的导出和定解问题

在这一章里，将通过弦振动、热传导、静电场的势等物理模型说明如何从实际问题导出数学物理方程，并相应地提出定解条件和定解问题等概念。它们将是本课程所介绍的理论与方法的主要研究对象。

1.1 数学物理方程的导出

常微分方程的未知函数都是单变量函数，如质点的位移、电路中的电流和电压等物理量都是时间 t 的函数，这些物理量的变化规律在数学上的表示就是常微分方程。但是，在科学研究和生产实际中，还有许多物理量不仅与时间 t 有关，而且与空间位置 (x, y, z) 有关。如描述声波在介质中的传播、电磁波的电场强度和磁感应强度随空间和时间变化等规律时，就会得到含有未知函数及其偏导数的关系式，这些关系式就称为**数学物理方程**。下面以几个典型方程的推导为例，说明如何从实际研究对象出发，抓住主要因素，利用有关的物理定律，如牛顿第二定律、能量守恒定律、质量守恒定律等，建立数学物理方程。

1.1.1 弦的微小横振动

在演奏乐器时，被拨动的弦只是一小段，但是弦是拉紧的，各小段之间有相互作用力，即张力。在张力的作用下，一小段弦的振动会引起邻近小段弦的振动，这种振动的传播称为**波**。现在研究弦的微小横振动。设有细长柔软的弦，紧绷于 A, B 两点之间，在平衡位置 AB 附近，弦受垂直外力作用后产生振幅极小的横振动，确定弦的运动状态。

1. 假设与结论

(1) 横振动：如图 1.1 所示，取弦的平衡位置为 x 轴，横振动是指弦上各点的振动发生在一个平面内，且各点的运动方向垂直于平衡位置。选坐标系 Oxu ，以 $u(x, t)$ 表示弦上点 x 在时刻 t 离开平衡位置的位移。

(2) 微小振动：弦上各点位移与弦长相比很小，且振动很平缓，即各点斜率变化很微小，也即 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1$ ，

于是

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x$$

即在微小横振动过程中，弦长基本上不发生改变。

(3) 弦是柔软的：弦线对形变不产生任何抗力，张力 $T(x, t)$ 的方向总沿着弦在点 x 的切线

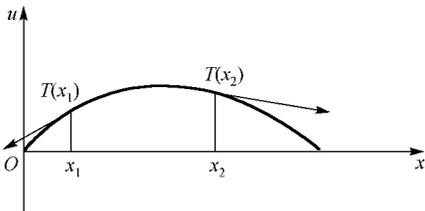


图 1.1 弦的微小横振动

方向，并且由于在振动过程中，弦长不发生变化，因此各点张力 $\mathbf{T}(x, t)$ 与时间无关，即 $\mathbf{T}(x, t) = \mathbf{T}(x)$ ，记 $|\mathbf{T}(x)| = T(x)$ 。

(4) 弦是均匀的：弦上各点密度为常数，记其为 ρ 。

(5) 弦的重力与张力相比很小，可以忽略。

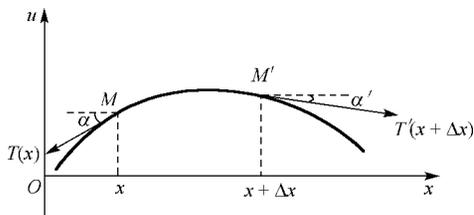


图 1.2 微元 $\widehat{MM'}$ 的受力分析

如图 1.2 所示，任取弦上一小弧段微元 $\widehat{MM'}$ ，研究 $\widehat{MM'}$ 在水平方向和铅垂方向上的运动情况。

2. 建立方程

1) 受力分析

设弦在点 M 、 M' 的切线与 x 轴的夹角分别为 α 、 α' ，微元在端点 M 受张力 $T(x)$ 作用，其在 x 轴方向的分量为 $-T(x)\cos\alpha$ ，在 y 轴方向的分量为 $-T(x)\sin\alpha$ ；在端点 M' 处受张力 $T(x + \Delta x)$ 作用，其在 x 轴、 y 轴方向的分量分别为 $T(x + \Delta x)\cos\alpha$ 和 $T(x + \Delta x)\sin\alpha$ 。

2) 运动方程

由于小弧段 $\widehat{MM'}$ 在水平方向上没有运动，故合力为零，即

$$T(x + \Delta x)\cos\alpha' - T(x)\cos\alpha = 0$$

由于 $\alpha \approx 0$ ，故

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \approx 1$$

同理， $\cos\alpha' \approx 1$ ，所以有

$$T(x + \Delta x) - T(x) = 0$$

即各点张力相等，以常数 T 表示。

弦在垂直方向上有运动，根据牛顿第二定律，有

$$T \sin\alpha' - T \sin\alpha = \rho \Delta s \frac{\partial^2 u(x^*, t)}{\partial t^2} \quad (1.1.1)$$

其中， x^* 为 $\widehat{MM'}$ 的质心。因为

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \approx \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \sin\alpha' \approx \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}$$

且 $\Delta s \approx \Delta x$ ，所以有

$$T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x^*, t)}{\partial t^2}$$

假设函数 $u(x, t)$ 二阶连续可微，由微分中值定理

$$T \frac{\partial^2 u(\tilde{x}, t)}{\partial x^2} \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x^*, t)}{\partial t^2}$$

其中， $x < \tilde{x} < x + \Delta x$ 。令 $\Delta x \rightarrow 0$ ，则 $\tilde{x} \rightarrow x$ ， $x^* \rightarrow x$ ，得

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

令 $a^2 = \frac{T}{\rho}$, 则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.2)$$

式(1.1.2)称为弦的自由振动方程。

若弦还受外力的作用, 假设外力线密度为 $F(x, t)$, 方向为 u 轴正向, 则式(1.1.1)应修改为

$$T \sin \alpha' - T \sin \alpha + F(\bar{x}, t) \Delta s = \rho \Delta s \frac{\partial^2 u(x^*, t)}{\partial t^2}$$

其中, $x < \bar{x} < x + \Delta x$, 考虑到 $\Delta s \approx \Delta x$, 并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 化简移项得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad (1.1.3)$$

其中, $f = \frac{F}{\rho}$ 。式(1.1.3)称为弦的强迫振动方程。

类似地, 研究平面柔软均匀薄膜的微小振动, 会得到二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 u = 0 \quad (1.1.4)$$

其中, $u(x, y, t)$ 为膜上各点的横向位移; $a^2 = \frac{T}{\rho}$, a 为膜上振动的传播速度, T 为膜上张力, ρ 为薄膜的面密度。如果薄膜上有横向外力作用, 设外力面密度为 $F(x, y, t)$, 则得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 u = f(x, y, t) \quad (1.1.5)$$

其中, $f(x, y, t) = \frac{F(x, y, t)}{\rho}$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维拉普拉斯算子。

利用流体力学中无黏性的理想流体的运动方程、连续性方程和绝热过程的物态方程, 通过研究空气质点在平衡位置附近的振动速度、空气的压强和密度的关系, 可以推导出描述声波在空气中传播规律的声学方程, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = 0 \quad (1.1.6)$$

其中, $u(x, y, z, t)$ 为空气密度相对变化量, 即 $u = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$; $a^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$; γ 为空气定压比热与

定容比热之比值; p_0 、 ρ_0 分别为空气处于平衡状态时的压强和密度; $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为

三维拉普拉斯算子。

在以上三个例子中, 方程的形式非常相似, 实际上, 在 1.3 节将看到它们是同一类方程, 式(1.1.2)、式(1.1.4)和式(1.1.6)都是波动方程, 只是维数不同而已。波动方程可以用来描述声波、电磁波、杆的振动等。

1.1.2 热传导方程

由于温度不均匀, 热量从温度高的地方向温度低的地方转移, 这种现象称为热传导。在热传导问题中, 研究的是温度在空间中的分布和随时间的变化规律。工程技术中存在大量热传导问题, 如混凝土温度应力场的计算问题, 首先应通过确定温度场得到温度梯度, 再计算温度应力。下面, 根据热传导的傅里叶定律和热量守恒定律来推导温度满足的方程。用 $u(x, y, z, t)$ 表示物体在点 $M(x, y, z)$ 、时刻 t 的温度, 通过对任意一个小的体积微元 Ω 内的热平衡关系的研究, 建立其方程。

热传导的起源是温度分布的不均匀, 温度不均匀的程度可由温度梯度表示, 热传导的强弱可用热流强度, 即单位时间内通过单位横截面积的热量来表示。关于温度梯度和热流强度的关系, 有如下傅里叶定律。

傅里叶定律 物体在 dt 时间内, 沿外法线方向 \mathbf{n} , 流过 dS 面积的热量 dQ 与 dt 、 dS 及 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 成正比, 即

$$dQ = -k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt \quad (1.1.7)$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \text{grad} u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, z)$$

为温度的法向导数, 它表示温度沿方向 \mathbf{n} 的变化率, \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向。 $k(x, y, z) > 0$ 称为导热系数, 式中的负号表示热流方向与温度梯度方向相反, 温度梯度 $\text{grad} u$ 是由温度低的一侧指向温度高的一侧, 而热流的方向正好相反。

在物体中, 取任意一个封闭的区域 Ω , 设其边界为 $\partial\Omega$, 则从 t_1 到 t_2 时间段内, 流入 Ω 的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_{\partial\Omega} k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right] dt$$

设温度函数 $u(x, y, z, t)$ 二阶连续可微, 则由奥氏公式有

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV dt$$

Ω 内各点的温度由 $u(x, y, z, t_1)$ 变到 $u(x, y, z, t_2)$ 共吸收热量为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c(x, y, z) \rho(x, y, z) [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV$$

其中, $c(x, y, z)$ 为各点的比热, $\rho(x, y, z)$ 为密度。而

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

由热量守恒定律, 有 $Q_1 = Q_2$, 即

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV \right\} dt = \iiint_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dt dV \quad (1.1.8)$$

由 u 的二阶连续可微性及 Ω 和 $[t_1, t_2]$ 的任意性, 得

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

若物体均匀且各向同性, 则 k 、 c 、 ρ 均为常数, 记 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ (a 称为导温系数), 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta_3 u = 0 \quad (1.1.9)$$

若 Ω 内有热源, 设单位时间内单位体积产生的热量为 $F(x, y, z, t)$, 则在时间 $[t_1, t_2]$ 内热源散发的热量为

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) dV dt$$

则式(1.1.8)应修改为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) dV dt = \iiint_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt$$

化简得到有热源的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta_3 u = f(x, y, z, t) \quad (1.1.10)$$

其中, $f(x, y, z, t) = F(x, y, z, t) / (c\rho)$ 。式(1.1.9)和式(1.1.10)统称为三维热传导方程。

若物体是一根细长的杆, 其侧面与周围介质不进行热交换, 垂直于轴线的同一截面上各点温度分布相同, 则可以近似地认为杆上温度分布只依赖于截面的位置, 因此若取细杆的轴线为 x 轴, 则相应的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1.1.11)$$

式(1.1.11)称为一维热传导方程。

若物体是一个薄片, 上、下底面不与周围介质进行热交换, 则热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) \quad (1.1.12)$$

式(1.1.12)称为二维热传导方程。

热传导方程除了可以描述物体的温度变化规律外, 还可以描述很多实际问题, 如物质扩散时的浓度变化规律、长海峡的潮汐波的运动、土壤力学中的渗透问题等。对于扩散问题, 若以 $N(x, y, z, t)$ 表示扩散物质的浓度, 则根据扩散定律和质量守恒定律, 可得

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D\Delta_3 N = 0 \quad (1.1.13)$$

其中, D 称为扩散系数, $D > 0$ 。

1.1.3 静电场的势方程

由静电学知道, 静电场是有源无旋场。反映静电场基本性质的是高斯定理。下面, 根据这一定理来推导出描述静电场的数学物理方程。

假设有一个静电场, 其电场强度为 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, 介电常数 $\varepsilon = 1$, 电荷密度为 $\rho(x, y, z)$; Ω 是空间中的一个有界区域, $\partial\Omega$ 为其边界, 则有如下静电学基本定理。

高斯定理 穿过闭合曲面 $\partial\Omega$ 向外的电通量等于 $\partial\Omega$ 内所含电量的 4π 倍, 即

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV$$

其中, \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的外法向量。由奥氏公式

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{\partial\Omega} [E_1 \cos(\mathbf{n}, x) + E_2 \cos(\mathbf{n}, y) + E_3 \cos(\mathbf{n}, z)] dS \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} \right] dV \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} dV \end{aligned}$$

于是, 有

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho dV$$

由 Ω 的任意性, 得静电场方程

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho(x, y, z)$$

又由于静电场 \mathbf{E} 是有势场, 故存在势函数 u , 使得

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$$

于是, 有

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = f(x, y, z)$$

其中, $f(x, y, z) = -4\pi \rho(x, y, z)$, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) \quad (1.1.14)$$

式(1.1.14)是静电场有源的电势方程, 称为三维泊松方程。若区域内无电荷, 即 $\rho(x, y, z) \equiv 0$, 则得无源的电势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.15)$$

式(1.1.15)称为三维拉普拉斯方程。

对于流速场 \mathbf{v} , 若其无旋, 则存在势函数 φ , 使得

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi$$

若该速度场无源, 则 \mathbf{v} 的散度为零, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

故对于无源无旋的流速场 \mathbf{v} , 有

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

即

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.16)$$

实际上, 引力势、弹性力学中的调和势等均可由拉普拉斯方程(或泊松方程)描述。在无热源的热传导问题中, 经过相当长的时间后, 各点的温度随时间的推移而趋于稳定, 称为温度分布趋于稳恒状态, 这时 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, 式(1.1.9)退化为拉普拉斯方程

$$\Delta_3 u = 0$$

类似地, 若热源与时间无关, 且温度分布达到稳定状态时就有

$$\Delta_3 u = f(x, y, z)$$

所以稳恒温度场、浓度场也可由拉普拉斯方程(或泊松方程)描述。

从上述几个例子可以看出, 推导数学物理方程实质上就是找物理规律的数学表示。物理规律反映的是某个物理量在邻近地点和邻近时刻之间的联系。一般地, 数学物理方程的导出步骤可归纳如下:

- (1) 确定所研究的物理量 u , 如振动问题中弦(或膜)的位移、热传导问题中的温度等;
- (2) 根据所研究问题的区域确定适当的坐标系, 如常用的直角坐标系、平面极坐标系等;
- (3) 确定研究单元, 根据物理定律(如前面用过的牛顿第二定律、能量守恒定律、质量守恒定律等)和实验资料写出该单元与邻近单元的相互作用, 分析这种相互作用在一个短时间内对物理量 u 的影响, 表达为数学式;
- (4) 简化整理, 得到数学物理方程。

应该强调的一点是, 虽然这里只对几个具体的物理问题导出了方程, 但是, 这些方程所反映的规律绝不局限于这几个具体问题, 它们具有广泛的代表性, 许多不同的物理过程的变化规律可以用同一个数学物理方程来描述, 如扩散方程、土壤力学中的渗透方程都具有热传导方程的形式, 稳定的温度分布、流体的势等都满足拉普拉斯方程, 杆的扭转、建筑物的剪振动等都满足波动方程。

1.2 定解条件及定解问题

通常, 方程描述的是某一类物理过程的共同规律, 为了描述一个特定的物理现象, 除了方程外, 还必须考虑实际物理模型的初始状态和所处的环境。如弦的振动, 方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 描述了所有均匀柔软的弦做微小横振动的一般性运动规律。容易验证

$$u_1(x, t) = \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi a t}{l}$$

$$u_2(x, t) = \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l}$$

$$u_3(x, t) = \sin \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{\pi at}{2l}$$

$$u_4(x, t) = \cos \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{\pi at}{2l}$$

都是一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的解，但它们显然是不同的，图 1.3 给出了这 4 个解在 $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ 时的图像，从中可以看出，这些解代表着不同的波。实际上，弦端点状态的不

同，如有两端固定、两端自由及一端固定而另一端按已知规律振动等，会导致所对应的振动规律 $u(x, t)$ 的不同，因此要刻画一条具体、特定的弦的振动规律，必须考虑端点的状况对解的影响。另外，由于任何一个振动物体在一个时刻的振动状态总是与此时刻前的状态有关，因此它一定与初始时刻的状态有关。如果引起弦振动的初始原因不同，那么弦的振动规律会有显著的不同。

因此，为了描述一个具体的物理问题，除了方程外，还必须考虑这个物理问题的初始状态和环境条件。在数学物理方程中，将用来说明物理模型的初始状态和边界上约束情况的条件分别称为**初始条件**和**边界条件**。下面具体说明初始条件和边界条件的表达形式。

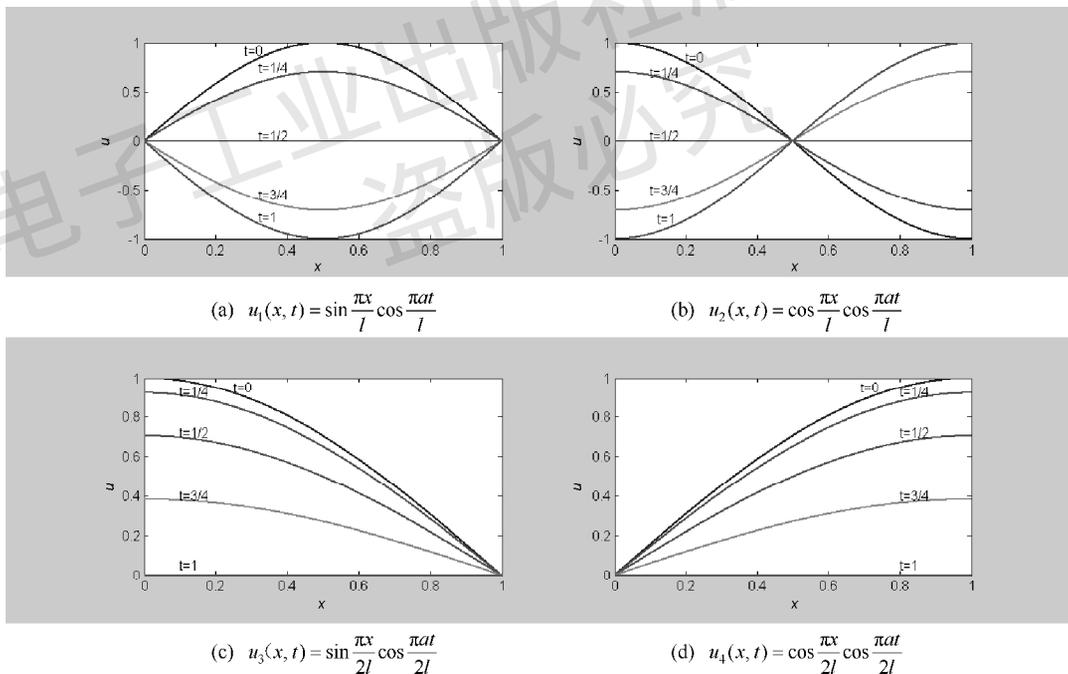


图 1.3 一维波动方程的 4 个解在 $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ 时的图像 (取 $l = 1, a = 1$)

1.2.1 初始条件

对随时间变化的问题，必须考虑研究对象在起始时刻的状态。对于振动过程，初始条件应包括初始时刻的位移和速度，设初始位移、初始速度分别为 $\varphi(x, y, z)$ 、 $\psi(x, y, z)$ ，称

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \left. \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y, z) \quad (1.2.1)$$

为振动方程的**初始条件**，当 $\varphi(x, y, z) \equiv 0$ 、 $\psi(x, y, z) \equiv 0$ 时，式(1.2.1)称为**齐次初始条件**；当 $\varphi(x, y, z)$ 或 $\psi(x, y, z)$ 不恒为零时，它称为**非齐次初始条件**。

对于输运过程（扩散、热传导等），初始状态指的是所研究物理量的初始分布（初始浓度分布、初始温度分布等），因此，初始条件是

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad (1.2.2)$$

其中， $\varphi(x, y, z)$ 为已知函数。

从式(1.2.1)和式(1.2.2)可以看到，不同类型的方程，其相应初始条件的个数不同。从数学角度看，就时间这个变量而言，输运过程的方程中只出现 t 的一阶导数，它是关于 t 的一阶微分方程，所以只需要一个初始条件；振动方程中出现了 t 的二阶导数，所以需要两个初始条件；对于泊松方程和拉普拉斯方程，由于其不包含时间变量，所以不需要提初始条件。

另外，需要注意的一点是初始条件应当给出整个系统的初始状态，而非系统中个别点的初始状态。例如，对于“长为 l 、两端固定的弦，初始时刻时，将弦的中点拉起 h ”，如图 1.4 所示。其相应的初始条件应为

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{2h}{l}x & \left(0 \leq x < \frac{l}{2}\right) \\ \frac{2h}{l}(l-x) & \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l\right) \end{cases}$$

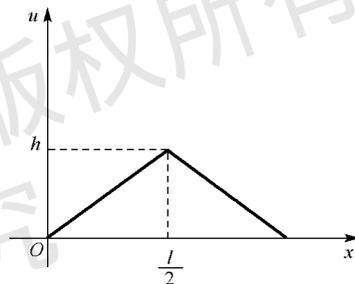


图 1.4 初始位移

1.2.2 边界条件

研究具体的物理系统，还必须考虑周围环境对研究对象的影响，即需要给出系统的边界条件。常用的线性边界条件主要有以下三类。

(1) 第一类边界条件：又称为**狄利克雷条件**，它直接规定未知函数在边界上的数值，即

$$u(x, y, z, t)|_{\Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (1.2.3)$$

其中， $f(x, y, z, t)$ 为已知函数， Γ 为边界。

如弦的振动问题，设弦长为 l ，一端固定，一端以 $\sin t$ 规律运动，则在其两个端点上满足

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = \sin t$$

(2) 第二类边界条件：又称为**诺伊曼条件**，它直接给出未知函数在边界上的法向导数值，即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (1.2.4)$$

其中， \mathbf{n} 为边界 Γ 上点 (x, y, z) 的外法向量， $f(x, y, z, t)$ 为已知函数。

对于弦的振动，第二类边界条件 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = f(t)$ 可视为在端点 $x=l$ 处有沿着 u 轴方向的外力

$Tf(t)$, 其中 T 为弦中张力。而齐次条件 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$ 则表示该端点不受垂直方向外力的作用, 所以称其为自由端。

而对于热传导方程, 由傅里叶传热定律得

$$k \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = -\frac{dQ}{dSdt}$$

故第二类边界条件 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f(x, y, z, t)$ 表示在单位面积、单位时间内沿边界外法线方向流出的热量为 $kf(x, y, z, t)$, 若在边界没有热量交换, 则称边界是绝热的, 此时有 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$ 。如长为 l 的导热杆, 在 $x=0$ 端有热量流出, 热流密度为 $q(t)$, $x=l$ 端绝热, 则杆两端的边界条件为 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{q(t)}{k}$ 和 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$ 。

(3) 第三类边界条件: 又称为混合边界条件。它给出了未知函数和它的法向导数的线性组合在边界上的值, 即

$$\left[u + h \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (1.2.5)$$

式中, $h(x, y, z)$ 、 $f(x, y, z, t)$ 为已知函数。

如在弦的振动问题中, 若端点 $x=l$ 固定于弹簧的一端, 弹簧的另一端固定, 且弦处于平衡位置, 则弹簧也处于平衡位置, 此种连接称为弹性连接。设弦的位移为 $u(x, t)$, 则在 $x=l$ 处, 弹性力为 $-ku|_{x=l}$, 其中 k 为弹簧的弹性系数, 而张力的垂直分量为 $T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l}$, 由力的平衡, 有

$$T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -ku|_{x=l}$$

即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \Big|_{x=l} = 0$$

其中, $h = \frac{k}{T}$ 。若 $x=0$ 端也固定在弹性支承上, 则有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu \right) \Big|_{x=0} = 0$$

又如杆的导热问题, 若端点 $x=l$ 自由冷却, 且周围介质温度为 u_1 , 则由牛顿冷却定理, 在 dt 时间内通过杆的端点横截面散失的热量和杆端点上的温度与介质的温度差、杆的横截面积及 dt 成正比, 即

$$dQ_1 = H(u - u_1)dSdt$$

其中, H 为热交换系数, $H > 0$; dS 为杆的横截面积。同时, 从杆的内部流到边界的热量为

$$dQ_2 = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt = -k \frac{\partial u}{\partial x} dS dt$$

则在这个端点的边界条件为

$$-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = H(u - u_1)$$

即

$$\left(u + h \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = u_1$$

其中, $h = k/H$ 。

以上三类边界条件都是线性的, 若 $f \equiv 0$, 则分别称为第一类、第二类、第三类齐次边界条件, 否则称为非齐次边界条件。

当然, 边界条件并不只限于以上三类, 还有各式各样的线性甚至非线性的边界条件。如在热传导问题中, 如果物体表面按照斯蒂芬定律向周围辐射热量, 那么边界条件为

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = H(u^4 \Big|_{\Gamma} - u_1^4)$$

其中, H 为一个常数, u_1 为外界温度, u 和 u_1 都是热力学温度。

关于边界条件有两点说明:

(1) 边界条件只要确切说明边界上的物理状况即可;

(2) 应区分边界条件和泛定方程中的外力或源, 如在一维热传导问题中, 若在 $x=0$ 端有热流流入, 强度为 q , 那么在该端点有边界条件

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = q$$

若把 $x=0$ 端的流入热流误解为热源, 而将方程写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{q}{c\rho}$$

则是错误的。

除了初始条件和边界条件外, 有些具体的物理问题还需要附加一些其他条件才能确定其解。如在研究弦振动问题时, 如果有横向力集中作用于点 $x = x_0$, 那么该点就成为弦的折点 (如图 1.5 所示)。在折点 x_0 处, 斜率的左、右极限 $u_x(x_0^-, t)$ 和 $u_x(x_0^+, t)$ 不同, u_x 有跃变, 因此 u_{xx} 不存在, 故弦振动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 在该点没有意义。但是, 在折点 x_0 处弦的位移应该是连续的, 即

$$u(x_0^-, t) = u(x_0^+, t) \quad (1.2.6)$$

同时, 折点 x_0 处外力与张力是平衡的, 即

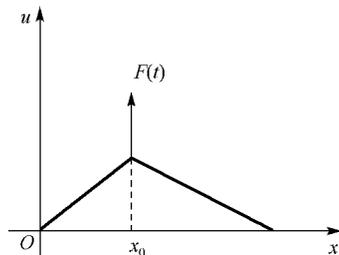


图 1.5 有折点弦的位移

$$T \frac{\partial u(x_0^+, t)}{\partial x} - T \frac{\partial u(x_0^-, t)}{\partial x} = -F(t) \quad (1.2.7)$$

其中, T 为弦中张力。式(1.2.6)和式(1.2.7)描述了弦在折点处的状态, 称为**衔接条件**。

另外, 在一些情况下, 出于物理上的合理性等原因, 要求解为单值、有限等, 提出所谓的自然边界条件。这些条件通常都不是所研究的问题直接明确地给出的, 而是根据解的特性要求自然加上去的, 故称为**自然边界条件**。如欧拉方程

$$x^2 y + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

的通解是 $y = C_1 x^n + C_2 x^{-(n+1)}$, 其中 C_1, C_2 是任意常数。在区间 $[0, l]$ 中, 若要求解有限, 则必有如下自然边界条件:

$$y|_{x=0} \rightarrow \text{有限}$$

从而, 在区间 $[0, l]$ 中, 其解应表示为

$$y = C_1 x^n$$

又如在平面极坐标系下, 由解的单值性可得到自然周期条件

$$u(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi + 2\pi) \quad (1.2.8)$$

对于球坐标系或柱坐标系, 有同样的条件成立。

初始条件、边界条件统称为**定解条件**, 对于具体的物理模型, 方程和定解条件一起才构成问题的完整提法。如弦的微小横振动, 两端固定, 初始位移为 $\varphi(x)$, 初始速度为 $\psi(x)$, 求弦上任一点 x 在振动开始后任一时刻 t 的位移 $u(x, t)$, 则问题的数学表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 & (0 < x < l) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

以上公式是弦振动问题的完整描述, 称之为**定解问题**。

对于描述稳恒过程的拉普拉斯方程或泊松方程, 未知函数 u 与时间 t 无关, 这时没有必要考虑初始条件, 边界条件加上方程就构成了定解问题, 称其为**边值问题**。通常, 将上述的三类边界条件加上方程构成的定解问题分别称为**第一边值问题**(或狄利克雷问题)、**第二边值问题**(或诺伊曼问题)和**第三边值问题**(或罗宾问题)。边值问题考虑的区域可以有界的, 如圆域内; 也可以是无界的, 如圆域外。当考虑的区域无界时, 按问题的实际意义, 通常要求给出未知函数在无穷远处的信息。如果物体的体积很大, 而只需考虑物体内部的物理量在较短的时间内的变化规律, 这时边界上的影响还达不到内部, 就把区域当成是无界区域来处理, 而不提边界条件。这种由初始条件和方程组成的定解问题称为**初值问题**, 又称为**柯西问题**, 如初始温度为已知函数 $\varphi(x)$ 的无限长杆的热传导问题描述为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

既含有初始条件又含有边界条件的定解问题称为混合问题，或称初边值问题，如三维热传导方程的混合问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 & [(x, y, z) \in \Omega, t > 0] \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u \right) \Big|_{\partial \Omega} = f(x, y, z, t) \\ u \Big|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \end{cases}$$

又如，波动方程的混合问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

定解问题是具体物理模型的数学抽象，到底应该加怎样的定解条件才是适当的呢？这个问题不能单纯地由定解条件决定，而应从整个定解问题来考虑。从问题的实际意义来看，定解问题既然是实际物理模型的抽象，那么它的解应该存在、唯一，而且对定解条件是连续依赖的。这些就是数学上所讲的定解问题解的存在性、唯一性和稳定性，总称为定解问题的适定性。适定性的研究需要涉及许多数学知识，故本书只对一些最基本、最特殊的定解问题的适定性进行介绍。

1.3 二阶线性偏微分方程的分类、化简及叠加原理

1.3.1 基本概念

在常微分方程理论中，了解了常微分方程的阶、通解、线性、齐次和非齐次等概念。在数学物理方程的理论中，也需要介绍类似的基本概念。

数学物理方程又称为偏微分方程，就是含有未知函数偏导数的方程，方程中所含有的未知函数偏导数的最高阶数，称为方程的阶；若方程中关于未知函数及其所有偏导数的次数为0次或1次，则称该方程为线性方程。若把所有的自变量依次记为 x_1, x_2, \dots, x_n ，二阶线性偏微分方程可统一表示为

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f \quad (1.3.1)$$

其中， $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 、 $b_j (j=1, 2, \dots, n)$ 、 c 、 f 都是自变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的函数，且 $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 不全等于零。若 $f \equiv 0$ ，则称方程是齐次的，否则称其为非齐次的。非齐次的方程通常描述有源（如外力、电荷扩散源等）作用的物理过程。

1.3.2 分类和化简

在 1.1 节中, 我们从实际问题出发, 推导并建立了波动方程、热传导方程和拉普拉斯方程。不同的方程描述的物理规律也不一样。如波的传播是可逆的, 而热传导是不可逆的。可以想象, 方程解的性质也有很大差别。反映这种差别并对其进行研究是非常有必要的, 为此, 在数学上将偏微分方程进行分类。这一节将主要讨论二阶线性偏微分方程的分类问题, 以两个自变量的二阶线性方程为例, 给出相应的定义与例子。一般地, 两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f \quad (1.3.2)$$

其中, a_{11} 、 a_{12} 、 a_{22} 、 b_1 、 b_2 、 c 、 f 只是自变量 x 、 y 的函数, 且 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{22} 中至少有一个不为零。

在解析几何中, Oxy 平面上的二次曲线方程

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = f$$

可通过适当的坐标变换化简为椭圆、双曲线或抛物线的标准方程。对于式(1.3.2), 也希望找到适当的自变量替换把它进行分类、化简。为此, 作自变量的变换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

设该变换的雅可比行列式不等于零, 即

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

由复合函数微分的链式法则, 有

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \end{aligned}$$

将它们代入式(1.3.2)中, 得到以 ξ 和 η 为自变量的方程

$$a'_{11}u_{\xi\xi} + 2a'_{12}u_{\xi\eta} + a'_{22}u_{\eta\eta} + b'_1u_\xi + b'_2u_\eta + cu = f \quad (1.3.3)$$

其中

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ a'_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ a'_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \\ b'_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y \\ b'_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y \end{cases} \quad (1.3.4)$$

由于 a'_{11} 、 a'_{12} 、 a'_{22} 、 b'_1 、 b'_2 、 c 、 f 都只是自变量 ξ 、 η 的函数，故式(1.3.3)仍是线性方程。现在问题的关键在于如何选取自变量变换，使得式(1.3.3)形式最简单。从式(1.3.4)观察到式(1.3.3)中两个二阶项系数 a'_{11} 、 a'_{22} 的结构形式完全相同，若能得到下面一阶偏微分方程

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (1.3.5)$$

的两个线性无关的解 $\varphi_1(x, y) = c_1$ 、 $\varphi_2(x, y) = c_2$ ，并取 $\xi = \varphi_1(x, y)$ 、 $\eta = \varphi_2(x, y)$ ，则有 $a'_{11} = 0$ 、 $a'_{22} = 0$ ，式(1.3.3)就大大地简化了。事实上，式(1.3.5)可以转化为一阶常微分方程求解。不妨设 $a_{11} \neq 0$ ，式(1.3.5)可写为

$$a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\varphi_x}{\varphi_y} + a_{22} = 0 \quad (1.3.6)$$

如果将 $\varphi(x, y) = c$ （其中 c 是常数）看成隐函数 $y(x)$ 的方程，则有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

将其代入式(1.3.6)中，有

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0 \quad (1.3.7)$$

常微分方程(1.3.7)称为二阶线性偏微分方程(1.3.2)的特征方程，其解称为特征线。

下面讨论式(1.3.7)根的情况、相应的特征线的形式及式(1.3.2)的简化形式。式(1.3.7)可分解为以下两个一阶方程：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (1.3.8)$$

特征方程的解决定于式(1.3.8)中根号的符号，记 $\Delta(x, y) \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ ，称其为判别式，根据判别式的符号可将二阶线性偏微分方程分为如下三类：

- (1) 当 $\Delta(x, y) > 0$ 时，双曲型；
- (2) 当 $\Delta(x, y) < 0$ 时，抛物型；
- (3) 当 $\Delta(x, y) = 0$ 时，椭圆型。

【例 1-1】 利用定义容易验证：

- (1) 弦振动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f$ 是双曲型的。
- (2) 二维拉普拉斯方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 是椭圆型的。
- (3) 一维热传导方程 $u_t - a^2 u_{xx} = f$ 是抛物型的。

注：① Δ 为 (x, y) 的函数，所以一个方程在不同的区域上（甚至不同的点上）可能具有不同的类型，这种方程称为混合型方程；② 对于多个自变量的情况，方程的类型不止以上三种。

下面分别讨论三种情形下式(1.3.2)的化简及其标准形式。

(1) 若在点 (x_0, y_0) 的某邻域中 $\Delta(x, y) > 0$ ，则式(1.3.2)是双曲型方程，此时式(1.3.7)分解为两个一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

和

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

分别求解, 可以得到两族不同的实特征线, 设为 $\varphi_1(x, y) = c_1$ 、 $\varphi_2(x, y) = c_2$, 取 $\xi = \varphi_1(x, y)$ 、 $\eta = \varphi_2(x, y)$, 此时, 式(1.3.3)中系数 $a'_{11} = a'_{22} = 0$, 且容易验证 $\Delta' = a'_{12} - a'_{11}a'_{22} = (\xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y)^2 (a_{12} - a_{11}a_{22}) = J^2\Delta$, 因为 $J \neq 0$, 故 $\Delta' > 0$, 由 $a'_{11} = a'_{22} = 0$ 得 $a'_{12} \neq 0$, 此时方程可化为

$$u_{\xi\eta} = Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu + D \quad (1.3.9)$$

其中, A 、 B 、 C 、 D 均为 ξ 、 η 的已知函数, 式(1.3.9)称为双曲型方程的第一标准型。

进一步, 令

$$\xi = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \eta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

则式(1.3.9)可化为

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = A_1u_{\alpha} + B_1u_{\beta} + C_1u + D_1 \quad (1.3.10)$$

式(1.3.10)称为双曲型方程的第二标准形式。

(2) 若在点 (x_0, y_0) 的某邻域中 $\Delta(x, y) = 0$, 则式(1.3.2)是椭圆型方程, 此时式(1.3.7)的解为一对共轭复根, 设其为 $\varphi_1(x, y) = c_1$ 、 $\varphi_2(x, y) = c_2$, 作代换

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

则方程可化为

$$u_{\xi\eta} = Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu + D$$

其中, A 、 B 、 C 、 D 均为 ξ 、 η 的已知复函数。再作代换

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2i} \end{cases}$$

则方程可化为

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = A_2u_{\alpha} + B_2u_{\beta} + C_2u + D_2 \quad (1.3.11)$$

其中 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 均为 ξ 、 η 的已知实函数, 式(1.3.11)称为椭圆型方程的标准形式。

(3) 若在点 (x_0, y_0) 的某邻域中 $\Delta(x, y) < 0$, 则式(1.3.2)是抛物型方程, 此时式(1.3.7)只有一个实根, $\varphi(x, y) = c$, 任取与 $\varphi(x, y)$ 线性无关的一个函数为 $\psi(x, y)$, 并令 $\xi = \varphi(x, y)$ 、 $\eta = \psi(x, y)$, 这时

$$a'_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0$$

即

$$\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y = 0$$

从而

$$a'_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0$$

又由 $\varphi(x, y)$ 与 $\psi(x, y)$ 线性无关, 有 $a'_{22} \neq 0$, 因此, 方程可化为

$$u_{\eta\eta} = A_3u_\xi + B_3u_\eta + C_3u + D_3 \quad (1.3.12)$$

其中, A_3, B_3, C_3, D_3 均为 ξ, η 的已知实函数, 式(1.3.12)称为抛物型方程的标准形式。

【例 1-2】 化简弦振动方程 $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ 。

解: 特征方程为

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0$$

对应的特征线族为

$$x + at = c_1, \quad x - at = c_2$$

作自变量变换, 令 $\xi = x + at$ 、 $\eta = x - at$, 则

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi + u_\eta \\ u_{xx} &= (u_\xi + u_\eta)_\xi\xi_x + (u_\xi + u_\eta)_\eta\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_t &= -au_\xi + au_\eta = a(u_\eta - u_\xi) \\ u_{tt} &= a^2(u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \end{aligned}$$

代入 $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ 中, 则方程化为

$$u_{\xi\eta} = 0$$

【例 1-3】 判别方程 $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$ 的类型, 并将其化为标准形式。

解: 计算判别式

$$\Delta = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$$

因此, 这个方程在整个定义域上是抛物型的。它的特征方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

解之, 得特征线

$$\frac{y}{x} = C$$

作自变量变换

$$\begin{cases} \xi = \frac{y}{x} \\ \eta = y \end{cases}$$

此时, ξ 和 η 是线性无关的函数。计算可得

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\frac{y}{x^2} u_\xi \\ u_{xx} &= \frac{2y}{x^3} u_\xi + \frac{y^2}{x^4} u_{\xi\xi} \\ u_{xy} &= -\frac{1}{x^2} u_\xi - \frac{y}{x^3} u_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2} u_{\xi\eta} \\ u_{yy} &= \frac{1}{x^2} u_{\xi\xi} + \frac{2}{x} u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

代入化简, 原方程可化为

$$y^2 u_{\eta\eta} = 0$$

当 $y \neq 0$ 时, 方程可化为

$$u_{\eta\eta} = 0$$

1.3.3 线性方程的叠加原理

一些复杂的问题, 会受到多种因素的制约, 若这些因素是相互独立的, 那么它们所产生的影响也是相互独立的, 可以进行叠加。如热传导问题, 由于既受热源的影响, 又受边界因素和初始状况的影响, 因而含有边界条件和初始条件的非齐次热传导问题就可以视为三种因素的叠加。一个复杂的问题可以化为若干个简单问题的叠加, 从而使问题得以简化。一般说来, 如果泛定方程和定解条件都是线性的, 就可以把定解问题的解看成几个部分的线性叠加, 只要这些部分各自满足的泛定方程和定解条件的相应的线性叠加正好是原来的泛定方程和定解条件即可, 这称为叠加原理。

含有 n 个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式可写为

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

而其定解条件可统一表示为

$$B[u] = g$$

其中, L 和 B 是微分算子。下面具体地给出叠加原理。

定理 1.1 (叠加原理 1) 若 u_i 满足线性方程 $L[u_i] = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (或定解条件 $B[u_i] = g_i$),

则它们的线性组合 $u = \sum_{i=1}^n c_i u_i$ 满足方程

$$L[u] = \sum_{i=1}^n c_i f_i \quad (\text{或定解条件 } B[u] = \sum_{i=1}^n c_i g_i)$$

其中, c_i 为任意常数。

叠加原理是一个非常重要的结论,在本书后面的章节中经常会用到它。利用叠加原理,可以把复杂问题分解成若干个简单问题来处理。在实际应用中,不仅用到有限个特解的叠加,还经常用到无限多个特解的叠加,需要用级数或积分表示,此时必须证明这些级数或积分是收敛的,而且收敛到原问题的解。因此,叠加原理还有如下拓广的形式。

定理 1.2 (叠加原理 2) 设 u_i 在区域 Ω 内满足线性方程 $L[u_i] = f_i, i = 1, 2, \dots$ (或定解条件 $B[u_i] = g_i$), 若函数项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 在 Ω 内收敛, 并且微分算子 L 的运算与级数求和运算可交换次序, 则级数的和函数 $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 一定满足方程

$$L[u] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i \quad (\text{或定解条件 } B[u] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i)$$

定理 1.3 (叠加原理 3) 设 $u(M; M^0)$ 满足线性方程 $L[u(M; M^0)] = f(M; M^0)$ (或定解条件 $B[u(M; M^0)] = g(M; M^0)$), 其中 $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是自变量, $M^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ 是参数。设积分 $U(x) = \int u(M; M^0) dM^0$ 收敛, 且微分算子 L 的运算与求积分运算可交换次序, 则 $U(x)$ 一定满足方程

$$LU(x) = \int f(M; M^0) dM^0 \quad (\text{或定解条件 } B[U(x)] = \int g(M; M^0) dM^0)$$

【例 1-4】 非齐次波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

的解等于齐次波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

的解和齐次初始条件的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解之和。

【例 1-5】 泊松方程狄利克雷问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) & [(x, y, z) \in \Omega] \\ u|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

的解可由对应的拉普拉斯方程狄利克雷问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & [(x, y, z) \in \Omega] \\ u|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

的解与方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

的任一特解之和求得。

习 题

1. 设均匀弹性细杆的线密度为 ρ ，杨氏模量为 E 。试推导出杆的纵振动方程。
2. 气体或液体由于浓度不均匀，物质会由浓度高的地方向浓度低的地方转移，这种现象称为扩散。Nernst 定律描述了扩散现象： dt 时间内通过法向量为 \mathbf{n} 的曲面微元流向 \mathbf{n} 所指那一侧的物体质量为

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt$$

其中， k 为物体的扩散系数， $u = u(x, y, z, t)$ 表示在时刻 t 、点 (x, y, z) 处的浓度， dS 为面积微元。试利用 Nernst 扩散定律和质量守恒定律推导扩散方程。

3. 设有一平面薄板的导热物体，上下两面绝热，边界与周围介质没有热交换。试推导其热传导方程。
4. 若弦在阻尼介质中振动，阻尼力与速度成正比，即 $F = -R \frac{\partial u}{\partial t}$ ， R 为阻力系数。试推导弦的阻尼振动方程。
5. 证明 $n(n \geq 2)$ 维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

的通解为

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} c_1 + c_2 \frac{1}{r^{n-2}} & (n \neq 2) \\ c_1 + c_2 \ln \frac{1}{r} & (n = 2) \end{cases}$$

其中， $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ ， c_1 、 c_2 为任意常数。

6. 长为 l 的均匀弦，两端固定，弦中张力为 T ，在 $x = x_0$ 处以横向力 F 拉弦，达到平衡后放手任其自由振动，写出该振动的初始条件和边界条件。

7. 设有长度为 l 的细杆, 侧表面绝热, $x=0$ 端温度恒定为 u_0 , 另一端有恒定热流 q_0 流入, 杆的初始温度分布是 $\frac{x(l-x)}{2}$ 。试写出这个热传导问题的定解问题。

8. 长为 l 的柱形管, 一端封闭, 另一端开放, 管外空气含有某种气体, 其浓度为 u_0 , 向管内扩散, 写出该扩散问题的定解问题。

9. 验证一维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 经自变量替换 $\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$ 可简化为 $u_{\xi\eta} = 0$ 的形式。

10. 将下列方程化为标准型:

$$(1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(2) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0。$$

电子工业出版社版权所有
盗版必究