

# 第一篇 电磁理论

## 第1章 数学基础

我们所要讨论的电磁场是与空间和时间相关的一种抽象的矢量场。矢量分析是研究电磁场理论的重要数学工具,应用矢量分析的方法,可以使电磁场的基本定律、公式以简洁的形式表述出来,且与坐标的选择无关。因此本章主要介绍有关数学基础知识。

### 1.1 矢量代数和矢量函数

#### 1. 矢量

物理学中有两类量最常用:一类是仅需用数值和单位(合称量值)表示其大小的量,叫标量,如长度、时间、质量、温度、能量等都是标量;另一类是既需用量值表示其大小,又需要指明方向的量,叫矢量,如力、速度、加速度、动量、角动量等都是矢量。我们在这里用带箭头的字母(例如 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 等)或黑斜体字母(如 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{D}$ 等)表示矢量。矢量的大小又称矢量的模,并用 $A$ 或 $|\vec{A}|$ 表示。

#### 2. 矢量加减运算

两矢量相加可按图 1.1-1 的方法求和。由此可见相加的结果与相加的顺序无关,从而矢量加法服从交换律

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (1.1-1)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1.1-2)$$

当有三个矢量相加时,容易看出,矢量加法服从结合律

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (1.1-3)$$

两矢量相减时,如 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ,可先取 $\mathbf{B}$ 的负矢量,即和 $\mathbf{B}$ 大小相同方向相反的矢量 $-\mathbf{B}$ ,然后和 $\mathbf{A}$ 相加,如图 1.1-2 所示。

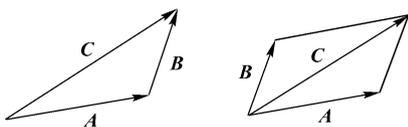


图 1.1-1 矢量相加

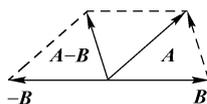


图 1.1-2 矢量相减

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (1.1-4)$$

### 3. 单位矢量和分矢量

一个矢量  $\mathbf{A}$  乘以一个正标量  $m$  得到一个新矢量,它与  $\mathbf{A}$  同方向,但大小为  $A$  的  $m$  倍,即  $m\mathbf{A}$ 。单位矢量是大小为 1 的矢量,如  $\mathbf{A}$  的单位矢量表示为  $\mathbf{A}^0$ 。这样,一个矢量可以用该矢量方向上的单位矢量和该矢量的大小相乘得到,即

$$\mathbf{A} = A\mathbf{A}^0 \quad (1.1-5)$$

任一矢量可以分解为几个矢量,它们的和就是这个矢量。特别是可以分解为沿坐标轴的互相垂直的分量。例如,在笛卡儿坐标系(直角坐标系)中,矢量  $\mathbf{A}$  可以分解为

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1.1-6)$$

式中,  $e_x, e_y, e_z$  为坐标轴方向的单位矢量。

### 4. 两矢量的标量积

矢量  $\mathbf{A}$  和矢量  $\mathbf{B}$  的标量积(也称点乘)记为  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 。标量积是一个标量,有

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \quad (1.1-7)$$

式中,  $\theta$  是矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  矢量的夹角。

若将矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  矢量用直角坐标系方法表示,则有

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.1-8)$$

两矢量的标量积满足交换律和分配律

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.1-9)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (1.1-10)$$

### 5. 两矢量的矢量积

矢量  $\mathbf{A}$  和矢量  $\mathbf{B}$  的矢量积(也称叉乘)记为  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。矢量积是一个矢量,它的大小等于  $AB\sin\theta$  ( $\theta$  是矢量  $\mathbf{A}$  和矢量  $\mathbf{B}$  的夹角),此值也就是以  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  为边的平行四边形面积;其方向垂直于矢量  $\mathbf{A}$  和矢量  $\mathbf{B}$  所决定的平面,并且满足右手螺旋定则。如图 1.1-3 所示。

两矢量的矢量积不服从交换律,但满足分配律

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.1-11)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (1.1-12)$$

若将矢量  $\mathbf{A}$  和矢量  $\mathbf{B}$  用直角坐标系方法表示,则有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.1-13)$$

### 6. 三矢量相乘

三矢量相乘有三种形式,即

(1) 第一种是  $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ ,这只是一个标量  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$  和矢量  $\mathbf{A}$  的乘积,乘积是和矢量  $\mathbf{A}$  同一个方向的矢量。

(2) 第二种是所谓的三重标量积,如  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ,它表示要先求矢量积,然后求标量积,其结果为一个标量,即为平行六面体的体积。如图 1.1-4 所示。故有

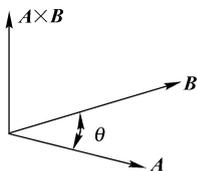


图 1.1-3 矢量叉乘

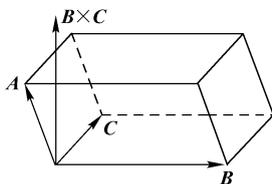


图 1.1-4 矢量三重标量积

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.1-14)$$

(3) 第三种是所谓的三重矢量积,即  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , 括号表示需要先进行运算。它具有如下性质

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.1-15)$$

## 7. 矢量函数与矢量线

### (1) 标量函数与矢量函数

具有确定数值的标量可以是空间坐标(如直角坐标系中的  $x, y, z$ )和时间  $t$  的函数,我们称为  $f(x, y, z; t)$  标量函数。

而有确定方向的物理量的矢量,一般都是一个或几个(标量)变量的函数,称  $\mathbf{F}(x, y, z; t)$  为矢量函数。例如:

$$\mathbf{F}(x, y, z; t) = e_x F_x(x, y, z; t) + e_y F_y(x, y, z; t) + e_z F_z(x, y, z; t) \quad (1.1-16)$$

一个矢量函数  $\mathbf{F}(x, y, z; t)$  对应三个标量函数  $F_x(x, y, z; t)$ 、 $F_y(x, y, z; t)$ 、 $F_z(x, y, z; t)$ 。

如果  $f$  或  $\mathbf{F}$  的物理状态与时间无关,则它代表静态场;如果是时间的函数,则称为动态场或时变场。

描述物理状态空间分布的标量函数  $f(x, y, z; t)$  和矢量函数  $\mathbf{F}(x, y, z; t)$ , 在时间是一定值的情况下,它们是唯一的,它们的数值和方向与所选择的坐标系无关。即使进行坐标系变换,它们也保持不变。这就是矢量和矢量场的不变特性。例如矢量大小与坐标无关,即有

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F_\rho^2 + F_\varphi^2 + F_z^2 = F_r^2 + F_\theta^2 + F_\varphi^2 \quad (1.1-17)$$

大小和方向都保持不变的矢量称为常矢,如  $\mathbf{a}_x$ ; 反之称为变矢,如  $\mathbf{a}_\varphi$ 。

矢量函数对时间和空间坐标变量的微分,仍然是一个矢量。

### (2) 矢量线(力线)

为了形象地描述矢量场在空间的分布状态,引入矢量线概念。矢量线上的每一点的切线方向都代表该点的矢量场方向。矢量场中的每一点均有唯一的一条矢量线通过。所以矢量线充满了整个矢量所在空间。

电力线、磁力线就是电场和磁场中的矢量线。

由矢量线定义可知,其上任一点的切向长度元  $d\mathbf{l}$  与该点矢量场  $\mathbf{A}$  的方向平行,于是

$$\mathbf{A} \times d\mathbf{l} = 0 \quad (1.1-18)$$

直角坐标系中

$$d\mathbf{l} = e_x dx + e_y dy + e_z dz$$

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$$

由

$$\mathbf{A} \times d\mathbf{l} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

可得

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1.1-19)$$

这就是矢量线的微分方程,求得它的通解可绘出矢量线。

## 1.2 场、梯度、散度和旋度

### 1. 场

如果在一个空间区域中,某个物理量在其中每一点都取确定值,就称这个空间区域存在该物理量的场。如果这个物理量是标量,就称这个场是**标量场**;若这个物理量为矢量,则称这个场是**矢量场**。例如温度场、电势场是标量场,电场、磁场是矢量场。

### 2. 标量场的方向导数和梯度

由上述标量场的定义可知,标量场中分布在各点的物理量  $u$  是场中点坐标的单值函数,即

$$u = u(\mathbf{r}) \quad (1.2-1)$$

这里,  $\mathbf{r}$  代表三个空间坐标  $(x, y, z)$ 。若给定了函数  $u$  的具体形式,标量  $u$  在场中的分布就完全确定了。在研究标量场时,常常还需要知道  $u$  在场中各点沿各个方向的变化情况,  $u$  在场中的变化情况往往具有更重要的物理意义。例如,若  $u$  为电势  $\varphi$ ,  $\varphi$  在场中各点的变化就决定了各点的电场强度。若  $u$  是温度,  $u$  在各点的变化就决定了这些点上热传导进行的方向和速度。为了讨论场在空间各点的变化,首先引入方向导数的概念。

#### (1) 方向导数

在场中取一点  $M_0$ ,由  $M_0$  点引射线  $l$ ,其方向由方向余弦  $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  确定。在  $l$  上取另一点  $M$  (见图 1.2-1)。记  $\Delta u = u(M) - u(M_0)$ ,  $\rho = \overline{M_0M}$ ,定义  $u$  在  $M_0$  点沿  $l$  的方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\overline{MM_0}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho} \quad (1.2-2)$$

方向导数描述  $u$  在  $M_0$  点沿  $l$  方向的变化率。

设函数  $u$  在  $M_0$  点可微,方向导数在直角坐标系下可表示为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \quad (1.2-3)$$

式中,  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$  为函数  $u$  在该点的偏导数;  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  为方向余弦。

#### (2) 梯度

一般来说,在场中一点沿着不同的方向  $l$ ,标量场  $u$  有不同的方向导数,如果在标量场  $u$  中定义一个矢量  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.2-4)$$

式中,  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  是沿直角坐标系坐标轴  $x, y, z$  方向的单位矢量。在场中任意点,矢量  $\mathbf{G}$  是唯一的。记沿  $l$  方向的单位矢量为  $\mathbf{e}_l$ ,由式(1.2-3)得

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_l = G \cos\theta \quad (1.2-5)$$

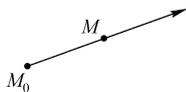


图 1.2-1 方向导数

$\theta$  是矢量  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{e}_l$  的夹角。式(1.2-5)表明  $\mathbf{G}$  具有这样的意义:它在任意方向的投影就给出沿这个方向  $u$  的方向导数。因此,矢量  $\mathbf{G}$  的方向就是  $u$  变化率最大的方向,其模就是变化率的最大值。式(1.2-4)中  $\mathbf{G}$  称为标量场  $u$  的梯度。记为  $\text{grad } u = \mathbf{G}$ 。引进矢量微分算子( $\text{del}$  算子)

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.2-6)$$

则梯度可以记为

$$\nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.2-7)$$

**【例 1-1】** 已知标量场  $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ , 求空间一点  $P(1, 1, 1)$  的梯度和沿  $\mathbf{l} = 2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$  方向的方向导数。

解: 首先由

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_P = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_P = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_P = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_P = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_P = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_P = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

根据梯度公式(1.2-7), 得标量场  $\varphi$  在  $P$  点的梯度为

$$\nabla \varphi \Big|_P = \left( \mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_P = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$$

$\mathbf{l}$  的单位矢量为

$$\mathbf{e}_l = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \frac{2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3} (2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$$

由方向导数与梯度之间的关系式(1.2-5)可知, 沿  $\mathbf{e}_l$  方向的方向导数为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \cdot \frac{1}{3} (2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

### 3. 矢量场的通量和散度

在研究矢量场时, 为形象起见常引进矢量线来描述矢量场。矢量线上每一点的切线方向即为该点矢量场的方向, 每一点矢量场的大小由过该点且与该点矢量场垂直的单位面积上穿过的矢量线条数表示。矢量线的疏密分布形象地反映了矢量场强度的分布。有两种不同的矢量场: 一种矢量场, 它的矢量线从场中一点发出, 终止在另外一点上或无穷远处, 这类矢量场称为纵场; 另一种矢量场, 其矢量线没有起点及终点, 是无头无尾的闭合回线, 这类矢量场称为横场。横场和纵场具有完全不同的物理意义和数学性质。

#### (1) 矢量场的通量

矢量场  $\mathbf{A}$  沿场中任一有向曲面  $S$  的积分

$$\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.2-8)$$

称为矢量场  $\mathbf{A}$  穿过面  $S$  的通量。当式(1.2-8)中的  $S$  为一小闭合曲面时, 取曲面正法向由内向外, 记  $S$  包围的空间区域为  $\Omega$ , 其体积为  $\Delta V$ 。由于横场矢量线是闭合曲线, 横场对任何闭曲面的通量为零, 仅纵场对式(1.2-8)的积分贡献才可以是非零的。当式(1.2-8)中  $\Psi$  为正值时, 表明有纵场矢量

线从  $\Omega$  中发出,  $\Omega$  中有纵场源; 若  $\Psi$  为负, 表明有纵场线终止在  $\Omega$  中,  $\Omega$  中有吸收矢量线的汇。如果把汇看做是负源, 穿过闭合曲面  $S$  的通量  $\Psi$  不为零, 就表明  $\Omega$  中存在纵场源。

在直角坐标系中矢量  $\mathbf{A}$  可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z \quad (1.2-9)$$

式中,  $A_x, A_y, A_z$  是矢量场  $\mathbf{A}$  沿坐标轴的三个分量。

又在直角坐标系中有向面元  $d\mathbf{S}$  可表示为

$$d\mathbf{S} = [\mathbf{e}_x \cos(\mathbf{n}, x) + \mathbf{e}_y \cos(\mathbf{n}, y) + \mathbf{e}_z \cos(\mathbf{n}, z)] d\sigma \quad (1.2-10)$$

式中,  $\cos(\mathbf{n}, x), \cos(\mathbf{n}, y), \cos(\mathbf{n}, z)$  为有向面元  $d\mathbf{S}$  外法线  $\mathbf{n}$  的方向余弦,  $d\sigma$  为面元面积。

故矢量场  $\mathbf{A}$  穿过任一小闭合有向曲面  $S$  的通量在直角坐标系中可表示为

$$\Psi = \oint_S [A_x \cos(\mathbf{n}, x) + A_y \cos(\mathbf{n}, y) + A_z \cos(\mathbf{n}, z)] d\sigma \quad (1.2-11)$$

根据数学中的高斯积分公式, 式(1.2-11)变为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d\tau \quad (1.2-12)$$

利用积分中值定理, 式(1.2-12)变为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Big|_{M_0} \cdot \Delta v \quad (1.2-13)$$

式中,  $M_0$  为闭合曲面  $S$  所围区域  $\Omega$  中的一点,  $\Omega$  的体积为  $\Delta v$ 。

## (2) 矢量场的散度

在矢量场  $\mathbf{A}$  中取一点  $M_0$ , 作一包围  $M_0$  点的闭合有向曲面  $S$ , 设  $S$  包围的空间区域为  $\Omega$ , 体积为  $\Delta v$ 。以  $\Delta\Psi$  记为穿过  $S$  的通量, 当  $\Omega$  以任意方式缩向  $M_0$  时, 极限值

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\Delta v} \quad (1.2-14)$$

称为矢量场  $\mathbf{A}$  在  $M_0$  点的散度, 记为  $\text{div} \mathbf{A}$ 。由此可见, 矢量场中任一点的散度, 就表示纵场中该点的源强度。

由式(1.2-13)和式(1.2-14)可知, 在直角坐标系中, 一个矢量  $\mathbf{A}$  的散度可表示为

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.2-15)$$

引用 del 算子, 即式(1.2-6), 矢量场  $\mathbf{A}$  的散度可简记为

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.2-16)$$

## (3) 高斯散度定理

在矢量分析中, 一个重要的定理是

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau$$

称为高斯定理。它的意义是: 任一矢量场  $\mathbf{A}$  的散度的体积分等于该矢量场  $\mathbf{A}$  穿过该限定体积的闭合面的总通量。

**【例 1-2】** 已知  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ , 计算该矢量场的散度  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 。

**解:** 由直角坐标系中的散度公式, 即式(1.2-15)有

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

#### 4. 矢量场的环量、环量面密度和旋度

##### (1) 环量

设有矢量场  $\mathbf{A}$ , 称  $\mathbf{A}$  沿场中任一有向闭曲线  $L$  的积分, 即

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.2-17)$$

为矢量  $\mathbf{A}$  沿  $L$  的环量。可以证明纵场对任意闭合回路的环量恒为零, 只有横场才有不为零的环量。为了理解环量的物理意义, 在这里我们取  $\mathbf{A}$  为磁场  $\mathbf{H}$ , 根据安培环路定理, 式(1.2-17)的积分就表示通过有向闭曲线  $L$  所围一曲面的电流强度。电流是激发磁场的源, 若  $\Gamma$  不为零, 则表明  $L$  所围区域中横场  $\mathbf{A}$  的源不为零。这在后面的章节中将详细说明。

在直角坐标系中有向线元  $d\mathbf{l}$  可表示为

$$d\mathbf{l} = [\mathbf{e}_x \cos(\mathbf{n}, x) + \mathbf{e}_y \cos(\mathbf{n}, y) + \mathbf{e}_z \cos(\mathbf{n}, z)] dl \quad (1.2-18)$$

式中,  $\cos(\mathbf{n}, x), \cos(\mathbf{n}, y), \cos(\mathbf{n}, z)$  为有向线元  $d\mathbf{l}$  的方向余弦,  $dl$  为线元的长度。

故  $\mathbf{A}$  沿  $L$  的环量在直角坐标系中可以写为

$$\Gamma = \oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz \quad (1.2-19)$$

##### (2) 环量面密度

为了描述横场中任意一点源的强度, 我们首先引进环量面密度的概念。取矢量场  $\mathbf{A}$  中一点  $M_0$ , 在  $M_0$  点取定方向  $\mathbf{n}$ , 过  $M_0$  点作一微小曲面  $\Delta S$ , 以  $\mathbf{n}$  为其在  $M_0$  点的法向矢量, 取  $\Delta L$  为  $\Delta S$  的周界,  $\Delta L$  绕行方向与  $\mathbf{n}$  成右手螺旋关系。则可定义矢量场  $\mathbf{A}$  沿  $\Delta L$  的环量与面积  $\Delta S$  之比, 在  $\Delta L$  缩向  $M_0$  点情况下的极限, 即

$$\mu_n = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} \quad (1.2-20)$$

为  $\mathbf{A}$  在  $M_0$  点沿方向  $\mathbf{n}$  的环量面密度。

下面我们给出直角坐标系中环量面密度的计算公式。利用斯托克斯公式,  $\mathbf{A}$  沿  $L$  的环量可写成

$$\Gamma = \int_S \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(\mathbf{n}, x) + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(\mathbf{n}, y) + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(\mathbf{n}, z) \right] d\sigma \quad (1.2-21)$$

注意: 此处  $\cos(\mathbf{n}, x), \cos(\mathbf{n}, y), \cos(\mathbf{n}, z)$  为有向闭曲线围成的有向面元外法线  $\mathbf{n}$  的方向余弦。

利用积分中值定理, 式(1.2-21)变为

$$\Gamma = \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(\mathbf{n}, x) + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(\mathbf{n}, y) + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(\mathbf{n}, z) \right] \Big|_{M_0} \cdot \Delta S \quad (1.2-22)$$

式中,  $M_0$  为微小曲面  $\Delta S$  上的一点。

由式(1.2-20)可知,  $M_0$  点环量面密度应为

$$\mu_n = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(\mathbf{n}, x) + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(\mathbf{n}, y) + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(\mathbf{n}, z) \quad (1.2-23)$$

### (3) 旋度

显然环量面密度的大小依赖于方向  $\mathbf{n}$ , 故环量面密度不能描述横场中各点的源强度。如果我们定义矢量

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (1.2-24)$$

则  $\mathbf{R}$  在场中任一点具有一个确定的值。定义  $\mathbf{R}$  为矢量场的旋度, 记为  $\text{rot } \mathbf{A}$ 。可见旋度在任意方向上的投影就给出了沿该方向的环量面密度。从而旋度方向就是环量面密度取最大值的方向,  $R$  就是环量面密度的最大值。

引用 del 算子, 矢量场  $\mathbf{A}$  的旋度可简记为

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1.2-25)$$

### (4) 斯托克斯定理

对于矢量场  $\mathbf{A}$  所在的空间中, 任意一个以  $C$  为周界的曲面  $S$ , 存在着如下关系

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.2-26)$$

其意义是: 矢量场旋度的面积分, 等于该矢量沿包围此曲面的闭合路径的线积分。它同散度定理一样, 是场论中的重要定理, 在后面的讨论中, 经常要用到这种积分变换关系。

## \* 5. 亥姆霍兹定理

前面我们介绍了矢量分析中的一些基本概念和运算方法。其中矢量场的散度、旋度和标量场的梯度都是场性质的重要度量。换言之, 一个矢量场所具有的性质, 可完全由它的散度和旋度来表明; 一个标量场的性质则完全可以由它的梯度来表明。亥姆霍兹定理就是对矢量场性质的总结说明。在阐述亥姆霍兹定理之前, 先介绍两个零恒等式, 它们分别表明梯度矢量和旋度的一个重要性质, 并对场的分析、引入辅助位函数起着重要作用。

### (1) 两个零恒等式

#### ① 恒等式 I 与无旋场

梯度矢量的一个重要性质就是: 任何标量场的梯度的旋度恒等于零。即

$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0 \quad (1.2-27)$$

恒等式 I 的逆定理也成立, 即如果一个矢量的旋度为零, 则该矢量可以表示为一个标量场的梯度。

将逆定理应用于电磁场理论中, 可以引入辅助位函数, 以方便求解场矢量。例如静电场, 因  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , 可引入标量电位函数  $\Phi$ , 令

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (1.2-28)$$

式中, 负号表明  $\mathbf{E}$  矢量沿  $\Phi$  减小的方向。

如果矢量场所在的全部空间中, 场的旋度处处为零, 即  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , 则这种场不可能存在旋涡源, 因此称为无旋场。

无旋场, 也称位场、保守场。因无旋场中,  $\mathbf{F} = \nabla u$ , 由斯托克斯定理:

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_S \nabla \times (\nabla u) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (1.2-29)$$

可见场力  $\mathbf{F}$  沿闭合曲线路径做功等于零,场能无变化,故称保守场。

如图 1.2-2 所示,  $\mathbf{F}$  沿闭合路径的积分又可分为两线段积分之和:

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

于是 
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.2-30)$$

可见,线积分与路径无关,只与始末位置有关,这样的场称为位场。静电场就是这样的场。

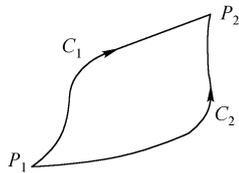


图 1.2-2 位场的线积分

## ② 恒等式 II 与无散场

旋度的一个重要性质是:任何矢量场的旋度的散度恒等于零。即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.2-31)$$

恒等式 II 的逆定理是:如果一个矢量场的散度为零,则它可表示为另一个矢量的旋度。

该定理应用于电磁场研究中,可引入辅助矢量位(即矢势),有利于场矢量的求解。例如恒定磁场,因  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,可引入矢量磁位  $\mathbf{A}$ ,令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.2-32)$$

如果矢量场所在的全部空间中,场的散度处处为零,即  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ,则这种场中不可能存在通量源,因而称为无散场,或无源场。恒定磁场就是这样的场。

由散度定理可知,无散场  $\mathbf{F}$  穿过任何闭合曲面  $S$  的通量都等于零,即

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.2-33)$$

**【例 1-3】** 已知  $\mathbf{F} = \mathbf{e}_x(3y - C_1z) + \mathbf{e}_y(C_2x - 2z) - \mathbf{e}_z(C_3y + z)$

(1) 如果  $\mathbf{F}$  是无旋的,试确定常数  $C_1, C_2, C_3$ ;

(2) 将  $C_i$  代入,判断  $\mathbf{F}$  能否表示为一个矢量的旋度。

**解:** (1) 因为  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , 即

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y - C_1z & C_2x - 2z & -C_3y - z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x(-C_3 + 2) + \mathbf{e}_y(-C_1) + \mathbf{e}_z(C_2 - 3) = 0 \end{aligned}$$

所以  $C_1 = 0, C_2 = 3, C_3 = 2$ 。

(2) 只有当  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  时,才可使  $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ , 因此须计算  $\mathbf{F}$  的散度看是否为零。

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -1 \neq 0$$

可见  $\mathbf{F}$  不能表示为一个矢量的旋度,本题中  $\mathbf{F}$  属有源无旋场。

## (2) 亥姆霍兹定理

可以证明,在有限的区域  $V$  内,任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件(即限定区域  $V$  的闭合曲面  $S$  上的矢量场的分布)唯一地确定,这就是亥姆霍兹定理。

该定理可以从下述两个方面来理解。先看矢量场  $\mathbf{F}$  在空间的变化率。 $\mathbf{F}$  的散度,反映了  $\mathbf{F}$  在坐标轴上的分量沿这个坐标的变化率;而  $\mathbf{F}$  的旋度,则反映了这些分量沿其他坐标的变化率,两者结合起来,即给定了  $\mathbf{F}$  的所有分量沿空间各个坐标的变化率。依照积分方法,原则上可以确定这个矢量函数  $\mathbf{F}$ ,最多相差一个常矢量。但当边界上的场矢量值给出时,这个矢量也可以确定。于是该矢量唯一确定。对于无界空间,  $\mathbf{F}$  仅由它的散度和旋度确定。这时,我们

可视它们自然满足无限远边界上场矢量为零的自然边界条件。

现在,我们再从矢量场的“源”这个角度来说明这个问题。一般矢量场可能既有散度、又有旋度,则这个矢量场可表示为一个没有旋度只有散度的无旋场分量  $\mathbf{F}_i$  和一个没有散度只有旋度的旋涡场分量  $\mathbf{F}_s$  之和:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_s \quad (1.2-34)$$

无旋场  $\mathbf{F}_i$  的散度不恒等于零(否则,  $\mathbf{F}_i$  无源不存在), 设为  $\rho(x, y, z)$ , 则

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_i + \nabla \cdot \mathbf{F}_s = \nabla \cdot \mathbf{F}_i = \rho \quad (1.2-35)$$

无散场  $\mathbf{F}_s$  的旋度不恒等于零, 设为  $\mathbf{J}(x, y, z)$ , 则

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}_i + \nabla \times \mathbf{F}_s = \nabla \times \mathbf{F}_s = \mathbf{J} \quad (1.2-36)$$

$\mathbf{F}$  的散度代表通量源密度  $\rho(x, y, z)$ ,  $\mathbf{F}$  的旋度代表矢量场的一种旋涡源密度  $\mathbf{J}(x, y, z)$ 。因为场是由它的源引起的, 所以场的分布由源的分布决定。现在矢量的散度、旋度为已知, 即源分布已确定, 自然矢量场分布也就唯一地确定了。

亥姆霍兹定理非常重要, 它总结了矢量场的基本性质, 是研究电磁场理论的一条主线。无论是静态场, 还是时变场, 都要研究场矢量的散度、旋度以及边界条件, 得出像式(1.2-35)、式(1.2-36)那样的方程, 我们称这些方程为矢量场的基本方程的微分形式。如果从场矢量的通量、环量两方面去研究, 便会得到场矢量基本方程的积分形式。

## 1.3 矢量微分算子

### 1. $\nabla$ 算子

$\nabla$ 算子是一个微分算子, 同时又是一个矢量算子, 具有微分运算和矢量运算的双重性质。一方面它作为微分算子对它作用的函数求导, 另一方面这种运算又必须适合矢量运算法则。本节来说明  $\nabla$ 算子的运算性质, 并给出一些常用公式。必须指出, 虽然作为例子用直角坐标系给出了一些公式的证明, 但这些公式的正确性与坐标系选择无关。

我们已经给出  $\nabla$ 算子表示标量场的梯度、矢量场的散度和旋度, 即

$$\nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.3-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.3-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (1.3-3)$$

$\nabla$ 算子还可以构成一个纯标量算子, 即

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.3-4)$$

称为 Laplace 算子, 其可作用在标量函数和矢量函数上。

### 2. $\nabla$ 算子常见计算公式

(1) 设  $u$  是标量场, 则有

$$\nabla f(u) = \frac{df}{du} \nabla u \quad (1.3-5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}}{du} \quad (1.3-6)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du} \quad (1.3-7)$$

(2) 设  $u$  和  $v$  是标量,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  是矢量, 则有

$$\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u \quad (1.3-8)$$

$$\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = \nabla u \cdot \mathbf{A} + u \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.3-9)$$

$$\nabla \times (u\mathbf{A}) = \nabla u \times \mathbf{A} + u \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.3-10)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \quad (1.3-11)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (1.3-12)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (1.3-13)$$

(3) 关于  $\nabla$  的二级微分运算为

$$\nabla \cdot (\nabla u) = (\nabla \cdot \nabla) u = \nabla^2 u \quad (1.3-14)$$

$$\nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla) u = 0 \quad (1.3-15)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.3-16)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \nabla) \mathbf{A} = 0 \quad (1.3-17)$$

### 3. 关于场源的一些常用结论

设有场点为  $\mathbf{r} = e_x x + e_y y + e_z z$ , 源点为  $\mathbf{r}' = e_x x' + e_y y' + e_z z'$ , 且记

$$\nabla' = e_x \frac{\partial}{\partial x'} + e_y \frac{\partial}{\partial y'} + e_z \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \mathbf{R} = e_x(x-x') + e_y(y-y') + e_z(z-z')$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

则有

$$\nabla R = -\nabla' R = \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (1.3-18)$$

$$\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1.3-19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = 3 \quad (1.3-20)$$

$$\nabla \times \mathbf{R} = 0 \quad (1.3-21)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0 \quad (1.3-22)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{R} = \mathbf{A} \quad (1.3-23)$$

$$\nabla(\mathbf{C} \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{C} \quad \mathbf{C} \text{ 为常矢量} \quad (1.3-24)$$

$$\nabla f(R) = \frac{df}{dR} \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (1.3-25)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -4\pi\delta(\mathbf{R}) \quad (1.3-26)$$

### 4. 高斯定理和斯托克斯定理

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau \quad (1.3-27)$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.3-28)$$

**【例 1-4】** 计算下列各式的值,其中  $C$  为常矢量。

$$(1) \nabla \cdot [(C \cdot r)r]; \quad (2) \nabla \times [(C \cdot r)r]; \quad (3) (C \cdot \nabla) \frac{r}{r^3}.$$

**解:** (1)  $\nabla \cdot [(C \cdot r)r] = \nabla[(C \cdot r)] \cdot r + (C \cdot r)(\nabla \cdot r) = C \cdot r + 3C \cdot r = 4C \cdot r$

$$(2) \nabla \times [(C \cdot r)r] = \nabla[(C \cdot r)] \times r + (C \cdot r)(\nabla \times r) = C \times r$$

$$(3) (C \cdot \nabla) \frac{r}{r^3} = \frac{(C \cdot \nabla)}{r^3} r + [(C \cdot \nabla) \frac{1}{r^3}] r = \frac{C}{r^3} + [C \cdot \frac{-3r}{r^5}] r$$

**【例 1-5】** 求  $\nabla^2 e^{iK \cdot r}$ , 其中  $K$  为常矢量。

**解:** 由  $\nabla e^{iK \cdot r} = e^{iK \cdot r} \nabla(iK \cdot r) = iK e^{iK \cdot r}$

$$\nabla^2 e^{iK \cdot r} = \nabla \cdot \nabla e^{iK \cdot r} = \nabla \cdot (iK e^{iK \cdot r}) = \nabla e^{iK \cdot r} \cdot iK = -|K|^2 e^{iK \cdot r}$$

## \* 1.4 正交曲线坐标系

前面已经得到了梯度、散度和旋度在直角坐标系下的表达式,但在解决具体问题时,使用其他坐标系有时更方便。本节我们首先介绍正交曲线坐标系的概念,然后导出梯度、散度、旋度及 Laplace 算子在几种正交曲线坐标系下的表达式。

### 1. 正交曲线坐标系及几种常见的正交曲线坐标系

正交曲线坐标系是直角坐标系概念的推广。在直角坐标系中,方程  $x = C_1$  表示一个与  $x$  轴垂直的平面,这个平面上所有点的  $x$  坐标都是  $C_1$ ,称  $C_1$  是这个平面的标识值。当  $C_1$  取不同常数值时,方程代表一个与  $x$  轴垂直的平面族。与此类似,方程  $y = C_2, z = C_3$ ,分别表示与  $y$  轴和  $z$  轴垂直的平面族。这三族平面两两相交,给出三个直线族,分别是与  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴平行的直线。空间一点  $P$  的坐标就由在此点相交的三个平面的标识值  $C_1, C_2, C_3$  值给出。

与此类似,限制  $f_1$  是空间点的单值函数,方程  $f_1(x, y, z) = q_1$ , 在  $q_1$  为常数时代表三维空间中的一个曲面,这个曲面可由  $q_1$  标识。当  $q_1$  取不同常数值时,上式表示一个曲面族。同样  $f_2, f_3$  是空间点的单值函数时,方程  $f_2(x, y, z) = q_2, f_3(x, y, z) = q_3$  都分别表示三维空间中的一个曲面族。由于  $f_1, f_2, f_3$  是空间点的单值函数,对空间任意点必有每个曲面族中的一个且仅有一个曲面通过。于是空间每个点的位置也可由在此相交的三个曲面的标识值  $q_1, q_2, q_3$  唯一确定。 $(q_1, q_2, q_3)$  可以代替直角坐标系中的  $(x, y, z)$  表示空间点的坐标。称  $(q_1, q_2, q_3)$  为空间点的曲线坐标。

分别属于三族之一的三个曲面两两相交形成的曲线称为坐标曲线。在两曲面  $f_2(x, y, z) = q_2, f_3(x, y, z) = q_3$  相交形成的坐标曲线上,  $q_2$  和  $q_3$  已取定值,只有  $q_1$  可以变化,称此曲线为坐标曲线  $q_1$ 。同理,由曲面  $f_1(x, y, z) = q_1$  和  $f_3(x, y, z) = q_3$  以及  $f_1(x, y, z) = q_1$  和  $f_2(x, y, z) = q_2$  相交的曲线依次称为坐标曲线  $q_2$  和  $q_3$ 。

我们用  $e_1, e_2, e_3$  分别表示沿坐标曲线  $q_1, q_2, q_3$  的切线方向的单位矢量,并约定其方向指向  $q_1, q_2, q_3$  增大的方向。对于一般的曲线坐标系,  $e_1, e_2, e_3$  之间的夹角可以是非零的任意角度。当  $e_1, e_2, e_3$  相互正交时,得到一类特殊的曲线坐标系,称为正交曲线坐标系。我们只研究正交曲线坐标系,并假定  $e_1, e_2, e_3$  的取向构成右手螺旋系统,虽然  $e_1, e_2, e_3$  为单位矢量,但其方向却随空间点变化。这与直角坐标系基矢  $e_x, e_y, e_z$  是与空间点无关的常矢量根本不同。

下面介绍几种常见的正交曲线坐标系。

### (1) 直角坐标系

直角坐标系中的三个坐标变量是  $x, y, z$ 。它们的变化范围是  $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty$ 。点  $P(x, y, z)$  是  $x, y, z$  三个平面的交点,如图 1.4-1 所示。

$e_x, e_y, e_z$  是坐标系的三个单位矢量,它们相互正交,遵循右手螺旋法则:

$$\left. \begin{aligned} e_x \times e_y &= e_z \\ e_y \times e_z &= e_x \\ e_z \times e_x &= e_y \end{aligned} \right\}$$

且  $e_x, e_y, e_z$  方向不随  $P$  点位置的变化而变化,这是直角坐标系的一个很重要的特征。

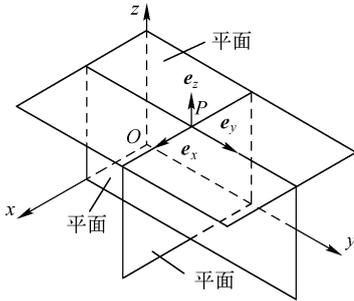


图 1.4-1 直角坐标系

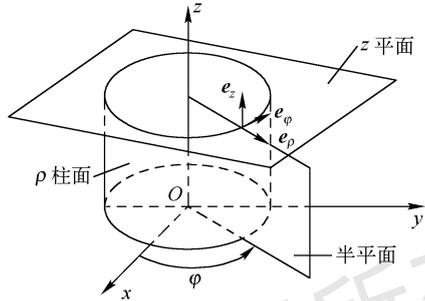


图 1.4-2 柱坐标系

### (2) 圆柱坐标系

圆柱坐标系中的三个坐标变量是  $\rho, \varphi, z$ 。与直角坐标系相同,也有一个  $z$  变量。各变量的变化范围是:  $0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty$ 。

参见图 1.4-2,点  $P(\rho, \varphi, z)$  是以下三个坐标曲面的交点:以  $\rho$  为半径的圆柱面,包含  $z$  轴与  $xy$  平面成  $\varphi$  角的半平面,  $z$  平面。单位矢量  $e_\rho, e_\varphi, e_z$  相互正交,成右手螺旋关系:

$$\left. \begin{aligned} e_\rho \times e_\varphi &= e_z \\ e_\varphi \times e_z &= e_\rho \\ e_z \times e_\rho &= e_\varphi \end{aligned} \right\}$$

须注意,圆柱坐标系的  $e_\rho, e_\varphi, e_z$  不是常矢量,不同的点其方向不同。

### (3) 球坐标系

球坐标系中的三个坐标变量是  $r, \theta, \varphi$ 。与柱坐标系相似,也有一个  $\varphi$  变量。它们的变化范围是:  $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 。

如图 1.4-3 所示,在球坐标中,点  $P(r, \theta, \varphi)$  由下述三个曲面的交点所确定:球心在原点,半径为  $r$  的球面;顶点在原点,以  $z$  轴为轴线,半顶角为  $\theta$  的正圆锥面;过  $z$  轴,且与  $xz$  平面成  $\varphi$  角的半平面。

单位矢量  $e_r, e_\theta, e_\varphi$  相互正交,成右手螺旋关系:

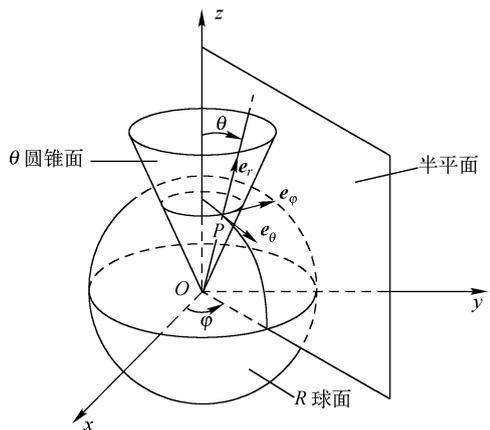


图 1.4-3 球坐标系

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \right\}$$

## 2. 正交曲线坐标系中的微分线元

在直角坐标系中坐标变量都具有长度的量纲。但在正交曲线坐标系中,坐标变量可以是角度等,不一定有长度量纲。为了导出梯度、散度、旋度在正交曲线坐标系中的表达式,我们首先给出正交曲线坐标系中微分线元的表达式。

在直角坐标系中,微分线元

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (1.4-1)$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (1.4-2)$$

在正交曲线坐标系下,沿坐标曲线  $q_1$ ,  $d\mathbf{l}$  沿  $\mathbf{e}_1$  方向,  $q_2, q_3$  为常数,所以

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1, dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1, dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 \quad (1.4-3)$$

由式(1.4-2),沿坐标曲线  $q_1$  的微分线元为

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} dq_1 \quad (1.4-4)$$

同理,沿坐标曲线  $q_2, q_3$  的微分线元为

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} dq_2 \quad (1.4-5)$$

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} dq_3 \quad (1.4-6)$$

记  $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ , 称为度量因子。式(1.4-4)、式(1.4-5)、式(1.4-6)可写为

$$dl_i = h_i dq_i \quad (i=1,2,3) \quad (1.4-7)$$

即在正交曲线坐标系中,坐标的微分  $dq_1, dq_2, dq_3$  必须乘上相应的度量因子才得到沿该坐标曲线的微分线元。有了微分线元,就可求得微分面积元和微分体积元,如图 1.4-4 所示。

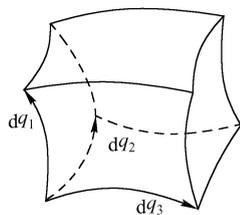


图 1.4-4 微分线元示意图

## 3. 梯度、散度、旋度及 Laplace 算子在正交曲线坐标系下的表达式

### (1) 梯度

标量场的梯度在空间任一方向上的投影给出沿该方向的方向导数。正交曲线坐标系下标量函数  $u(q_1, q_2, q_3)$  的梯度可由沿三条坐标曲线切线方向的方向导数的矢量和表示出来。由于在坐标曲线  $q_1$  上,  $dq_2 = dq_3 = 0$ , 所以  $du = \frac{\partial u}{\partial q_1} dq_1$ , 从而沿坐标曲线  $q_1$  的方向导数可写为  $\frac{\partial u}{\partial l_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}$ 。同理  $\frac{\partial u}{\partial l_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial l_3} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}$ 。由此,在正交曲线坐标系下,标量函数  $u(q_1, q_2, q_3)$  的梯度可表示为

$$\nabla u = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \quad (1.4-8)$$

算子  $\nabla$  在正交曲线坐标系下可写为

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (1.4-9)$$

## (2) 散度

在正交曲线坐标系下

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{e}_1 A_1) + \nabla \cdot (\mathbf{e}_2 A_2) + \nabla \cdot (\mathbf{e}_3 A_3) \quad (1.4-10)$$

又由式(1.4-8)知,

$$\nabla q_2 = \mathbf{e}_2/h_2, \quad \nabla q_3 = \mathbf{e}_3/h_3 \quad (1.4-11)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{e}_1 A_1) &= \nabla \cdot \left[ A_1 h_2 h_3 \left( \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \times \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \right) \right] = \nabla \cdot [A_1 h_2 h_3 (\nabla q_2 \times \nabla q_3)] \\ &= \nabla(A_1 h_2 h_3) \cdot [(\nabla q_2 \times \nabla q_3)] + (A_1 h_2 h_3) \nabla \cdot [\nabla q_2 \times \nabla q_3] \\ &= \nabla(A_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \end{aligned} \quad (1.4-12)$$

$$\text{故可得} \quad \nabla \cdot (\mathbf{e}_1 A_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} A_1 h_2 h_3 \quad (1.4-13)$$

$$\text{同理} \quad \nabla \cdot (\mathbf{e}_2 A_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} A_2 h_1 h_3 \quad (1.4-14)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{e}_3 A_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} A_3 h_1 h_2 \quad (1.4-15)$$

$$\text{所以} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right] \quad (1.4-16)$$

## (3) 旋度

在正交曲线坐标系下

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) + \nabla \times (A_2 \mathbf{e}_2) + \nabla \times (A_3 \mathbf{e}_3) \quad (1.4-17)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) &= \nabla \times (A_1 h_1 \nabla q_1) = \nabla(A_1 h_1) \times \nabla q_1 + A_1 h_1 (\nabla \times \nabla q_1) \\ &= \nabla(A_1 h_1) \times \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \end{aligned} \quad (1.4-18)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) &= \left[ \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_3} \right] \times \left[ \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \right] \\ &= \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_2} \end{aligned} \quad (1.4-19)$$

$$\text{同理} \quad \nabla \times (A_2 \mathbf{e}_2) = \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial q_2} - \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial q_3} \quad (1.4-20)$$

$$\nabla \times (A_3 \mathbf{e}_3) = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1 h_3} \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial q_1} \quad (1.4-21)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 h_1 & \mathbf{e}_2 h_2 & \mathbf{e}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} \quad (1.4-22)$$

## (4) Laplace 算子

对正交曲线坐标系,用式(1.4-8)代替式(1.4-16)中的  $\mathbf{A}$ ,可得

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right] \quad (1.4-23)$$

#### 4. 梯度、散度、旋度和 Laplace 算子在柱坐标和球坐标系下的表达式

柱坐标系和球坐标系是两个常用的重要正交曲线坐标系。下面根据一般正交曲线坐标系下的普遍结果,给出这两个具体坐标系中梯度、散度、旋度和 Laplace 算子的表达式。

##### (1) 柱坐标系

空间点的柱坐标和直角坐标有以下关系

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1.4-24)$$

由度量因子公式可得  $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1$ , 代入式(1.4-8)、式(1.4-16)、式(1.4-22)、式(1.4-23)中可得梯度、散度、旋度和 Laplace 算子在柱坐标系中的表达式

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.4-25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial (A_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (\rho A_z)}{\partial z} \right] \quad (1.4-26)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z \quad (1.4-27)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (1.4-28)$$

##### (2) 球坐标系

空间点的球坐标和直角坐标有以下关系

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.4-29)$$

由度量因子公式可得  $h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta$ 。与柱坐标系下的计算类似,求得

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (1.4-30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial (A_r r^2)}{\partial r} + r \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial (A_\varphi)}{\partial \varphi} \right] \quad (1.4-31)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (A_\theta)}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (A_r)}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial (A_r)}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi \quad (1.4-32)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] \quad (1.4-33)$$

### \* 1.5 $\delta$ 函数

#### 1. $\delta$ 函数

点电荷是一个重要的物理模型。为了对点电荷的电荷密度分布有一个数学描述,需要引

入  $\delta$  函数的概念。设  $x'$  点有一个单位点电荷,以  $\rho(x)$  表示空间的电荷密度分布, $\rho(x)$  应该具有如下性质

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x' \\ \infty, & x = x' \end{cases} \quad (1.5-1)$$

$$\int_V \rho(x) d\tau = \begin{cases} 0, & x' \text{ 点不在区域 } V \text{ 中} \\ 1, & x' \text{ 点在区域 } V \text{ 中} \end{cases} \quad (1.5-2)$$

这样的密度分布函数在早期的数学理论中是没有意义的,只是由于近代物理学和数学的发展,把该函数概念推广后才给出确切定义。Dirac 在 1926 年最早引用它,并用符号  $\delta$  表示,所以又称为 Dirac  $\delta$  函数。这里我们不准备讨论  $\delta$  函数的普遍理论,只是给出与我们应用有关的几个基本性质和具体表达式。

根据上面说明,一维  $\delta$  函数可定义为

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0, & x \neq x' \\ \infty, & x = x' \end{cases} \quad (1.5-3)$$

$$\int_V \delta(x - x') d\tau = \begin{cases} 0, & x' \text{ 点不在区域 } V \text{ 中} \\ 1, & x' \text{ 点在区域 } V \text{ 中} \end{cases} \quad (1.5-4)$$

在直角坐标系、柱坐标和球坐标系下,三维  $\delta$  函数可表示为

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (1.5-5)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z') \quad (1.5-6)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') \quad (1.5-7)$$

## 2. $\delta$ 函数的微商

同普通函数一样,可定义  $\delta$  函数的各级微商。如对一维  $\delta$  函数,其一阶导数可定义为

$$\frac{d\delta(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(x + \Delta x) - \delta(x)}{\Delta x} \quad (1.5-8)$$

则电偶极子的电荷密度分布就可用  $\delta$  函数的导数表示。

如图 1.5-1 所示,在一维情况下, $x$  轴上  $x_0$  点的一个电偶极子,空间电荷密度分布函数为

$$\rho(x) = -Q\delta(x - (x_0 - \Delta x)) + Q\delta(x - x_0)$$

或 
$$\rho(x) = -Q\Delta x \frac{\delta(x - (x_0 - \Delta x)) - \delta(x - x_0)}{\Delta x}$$

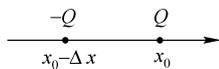


图 1.5-1

$$\rho(x) = -P_x \frac{d\delta(x - x_0)}{dx} \quad (1.5-9)$$

式中, $P_x$  为电偶极矩的  $x$  向分量。

## 3. $\delta$ 函数的性质

$\delta$  函数具有一个重要性质,即对任意在  $x'$  点连续的函数  $f(x)$ ,有

$$\int_V f(x) \delta(x - x') dx = \begin{cases} f(x'), & \text{积分区域包含 } x' \\ 0, & \text{积分区域不包含 } x' \end{cases} \quad (1.5-10)$$

式中, $V$  是包含有  $x'$  的任意区域。

#### 4. $\delta$ 函数的傅里叶积分形式

$\delta$  函数的一维傅里叶积分形式为

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} dk \quad (1.5-11)$$

$\delta$  函数的三维傅里叶积分形式为

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k} \quad (1.5-12)$$

**【例 1-6】** 证明  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R}$ , 其中  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。

**证明:** 利用例 1-5, 把  $\nabla^2 e^{ik \cdot \mathbf{r}} = -|k|^2 e^{ik \cdot \mathbf{r}}$  代入  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k}$ , 则

可得

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nabla^2 e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2} d\mathbf{k}$$

这里积分运算和微分运算是针对不同变数进行的, 微分算子可以移到积分号外面, 即

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \nabla^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2} d\mathbf{k}$$

为了求出上式右边的积分, 在波矢  $\mathbf{k}$  空间取球坐标系  $(k, \theta, \varphi)$ , 坐标原点就取在  $\mathbf{r}'$ , 取极轴沿  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  方向, 因为  $d\mathbf{k} = k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi$ , 所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2} d\mathbf{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} \sin\theta e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^{\infty} dk \frac{\sin kR}{kR} = 2\pi^2 \frac{1}{R}$$

则

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R}$$

#### 习题 1

1.1 给定三个矢量  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  如下:

$$\mathbf{A} = e_x + 2e_y - 3e_z, \quad \mathbf{B} = -4e_y + e_z, \quad \mathbf{C} = 5e_x - 2e_y$$

求: (1)  $\mathbf{e}_A$  ( $\mathbf{e}_A$  表示矢量  $\mathbf{A}$  方向上的单位矢量); (2)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ; (3)  $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$

1.2 根据算子  $\nabla$  的微分性与矢量性推导下列公式

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

1.3 设  $u$  是空间坐标  $x, y, z$  的函数, 证明:

$$\nabla f(u) = \frac{df}{du} \nabla u, \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}}{du}, \quad \nabla \times \mathbf{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du}$$

1.4 设  $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$  为源点  $\mathbf{r}'$  到场点  $\mathbf{r}$  的距离,  $\mathbf{R}$  的方向规定为从源点指向场点。

(1) 证明下列结果, 并体会对源变数求微商 ( $\nabla' = e_x \frac{\partial}{\partial x'} + e_y \frac{\partial}{\partial y'} + e_z \frac{\partial}{\partial z'}$ ) 与对场变数求微商  $\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}$  的关系。

$$\nabla R = -\nabla' R = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad \nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0, \quad \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla' \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0, \quad R \neq 0$$

(2) 求  $\nabla \cdot \mathbf{R}$ ,  $\nabla \times \mathbf{R}$ ,  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{R}$ ,  $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R})$ ,  $\nabla \cdot [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})]$  及  $\nabla \times [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})]$ , 其中  $\mathbf{a}, \mathbf{k}$  及  $\mathbf{E}_0$  均为常矢量。

1.5 (1) 应用高斯定理证明:

$$\int_V dV \nabla \times \mathbf{f} = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{f}$$

(2) 应用斯托克斯(stokes)定理证明:

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \varphi = \oint_L d\mathbf{l} \varphi$$

1.6 求标量场  $\varphi(x, y, z) = 6x^2y^2 + z^2$  在点  $P(2, -1, 0)$  的梯度。

1.7 求下列矢量场在给定点的散度。

(1)  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x x^3 + \mathbf{e}_y y^2 + \mathbf{e}_z (3z - x)$  在点  $P(1, 0, -1)$ ;

(2)  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x x^2y + \mathbf{e}_y yz + \mathbf{e}_z xy$  在点  $P(1, 1, 0)$ 。

1.8 求下列矢量场的旋度。

(1)  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x x^2 + \mathbf{e}_y y^2 + \mathbf{e}_z 3z^2$ ; (2)  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x yz + \mathbf{e}_y xz + \mathbf{e}_z xy$ 。

1.9 求  $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ 。

1.10 计算:

(1) 矢量  $\mathbf{r}$  对一个球心在原点, 半径为  $a$  的球表面的积分。

(2)  $\nabla \cdot \mathbf{r}$  对球体积的积分。

1.11 利用直角坐标系证明:  $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$

1.12 用直角坐标验证矢量恒等式:  $\nabla \times (f\mathbf{G}) = f \nabla \times \mathbf{G} + \nabla f \times \mathbf{G}$

电子工业出版社版权所有  
盗版必究

## 第 2 章 电磁场的基本规律

本章首先给出静电场、稳恒电流场、稳恒磁场的基本规律,然后讨论时变电磁场的基本规律,并讨论了电磁场的物质性。

### 2.1 静 电 场

#### 1. 电荷及电荷分布描述

自然界中只存在正、负两种电荷,物质微粒不管带正电荷或负电荷,其电量都是基本电荷单位  $e$  ( $e \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ ) 的整数倍。

为了描述电荷在带电体上的分布,引入电荷体密度  $\rho(\mathbf{r})$ 。空间  $\mathbf{r}$  点的电荷体密度是包括该点在内的小区域  $\Omega$  中的电荷总量  $\Delta Q$  与该区域体积  $\Delta V$  之比在  $\Delta V \rightarrow 0$  时的极限值,即

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \quad (2.1-1)$$

当带电体的大小和形状的影响可以忽略不计,带电体上的电荷可被看成是集中在一个点上的电荷,称为点电荷。在坐标  $\mathbf{r}'$  上电量为  $Q$  的点电荷,其密度分布函数为

$$\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.1-2)$$

与此类似,当电荷分布在一个薄层中,若薄层厚度的影响可以忽略,则可以用面电荷密度  $\sigma(\mathbf{r})$  描写它的分布。面上  $\mathbf{r}$  点的面电荷密度是包括该点的面元  $\Delta S$  带的电荷总量  $\Delta Q$  与面元面积  $\Delta S$  之比在  $\Delta S \rightarrow 0$  时的极限值,即

$$\sigma(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{ds} \quad (2.1-3)$$

若电荷沿一条细线分布,可以用线电荷密度  $\lambda(\mathbf{r})$  描述电荷分布。线上  $\mathbf{r}$  点的线电荷密度是在含有该点的线元  $\Delta l$  上的电荷总量  $\Delta Q$  与线元  $\Delta l$  之比在  $\Delta l \rightarrow 0$  时的极限值,即

$$\lambda(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad (2.1-4)$$

当然任意实际的带电体,其电荷不可能分布在一个几何点、几何面或几何线上,也就是说点电荷、面电荷、线电荷只是一定条件下实际问题的抽象。

#### 2. 库仑定律、电场强度

1785 年法国物理学家库仑从实验总结出两静止点电荷之间相互作用力的规律,称为库仑定律。它可表述为:真空中两点电荷  $Q, Q'$  之间的相互作用力  $\mathbf{F}$  的大小与两电量  $Q, Q'$  的乘积  $QQ'$  成正比,而与它们的距离  $R$  的平方成反比。力的方向沿它们的连线;两点电荷同号时为斥力,异号时为吸力。即

$$\mathbf{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.1-5)$$

式中,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  表示从  $Q'$  到  $Q$  的矢量;  $R = |\mathbf{R}|$  表示从  $Q'$  到  $Q$  的距离;  $\mathbf{F}$  的单位为牛顿,  $Q$  的单

位为库仑;  $\epsilon_0$  称为真空介电常数, 其值为  $8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 。

库仑定律正确描述了真空中两个静止点电荷之间作用力的大小和方向, 但它并没有揭示库仑力的物理本质。这个作用力是从哪里来的呢? 法拉第以前的传统观念认为, 电荷之间的作用是“超距作用”, 即一个带电体不通过任何中间媒介, 直接地、瞬时地把作用力施加到另一个带电体上。法拉第最早引入“场作用”的概念, 认为电磁作用是通过“场”, 以有限速度传播的。这两种观点都可以解释库仑定律, 但当电荷运动变化时, 场可以离开电荷在空间单独存在, 这两种观点显示出本质上不同的物理内容。现代物理已抛弃“超距作用”的观点, 认为任何电磁作用都是通过场进行的, 场本身是物质存在和运动的一种形式。

根据法拉第的观点, 电荷  $Q'$  之所以对电荷  $Q$  产生力的作用, 是由于  $Q'$  在它的周围产生电场, 此电场对  $Q$  的作用力表现为  $Q'$  对  $Q$  产生作用力。电场是客观存在的一种物质, 虽然不能直接看到它, 但可以测出它。我们把作用于单位检验电荷的力作为描述电场的物理量, 此物理量称为电场强度。即假设检验电荷  $Q$  在  $Q'$  形成的电场中受到力  $\mathbf{F}$  的作用, 则电场强度可定义为

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q \quad (2.1-6)$$

电场强度是个矢量, 所以电场是一个矢量场。其单位为  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$  ( $\text{N} \cdot \text{C}^{-1} = \text{J} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ )。

因为  $Q'$  形成的电场为  $\mathbf{E}$ , 由式(2.1-6), 电场对  $Q$  的作用力  $\mathbf{F}$  可以写成

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}Q \quad (2.1-7)$$

则库仑定律式(2.1-5)可以写为

$$\mathbf{F}_{Q' \rightarrow Q} = \mathbf{E}Q \quad (2.1-8)$$

式中

$$\mathbf{E} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.1-9)$$

$\mathbf{E}$  为点电荷  $Q'$  所产生的电场强度矢量。

根据静电场的叠加性原理, 可以计算出真空中  $N$  个点电荷, 在电荷连续分布在体积  $V$ 、电荷连续分布在表面  $S$ 、电荷连续分布在细线  $L$  上等各种情况下所产生的电场强度, 计算公式如下:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} \quad (2.1-10)$$

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\tau' \quad (2.1-11)$$

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} ds' \quad (2.1-12)$$

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} dl' \quad (2.1-13)$$

**【例 2-1】** 计算均匀带电的环形薄圆盘轴线上任意点的电场强度。

**解:** 如图 2.1-1 所示, 环形薄圆盘的内半径为  $a$ 、外半径为  $b$ , 电荷面密度为  $\rho_s$ 。在环形薄圆盘上取面积元  $dS' = \rho' d\rho' d\varphi'$ , 其位置矢量为  $\mathbf{r}' = \mathbf{e}_\rho \rho'$ , 它所带的电量为  $dq = \rho_s dS' = \rho_s \rho' d\rho' d\varphi'$ 。而薄圆盘轴线上的场点  $P(0, 0, z)$  的位置矢量为  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_z z$ , 因此有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{e}_z z - \mathbf{e}_\rho \rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\varphi'$$

由于  $\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\rho d\varphi' = \int_0^{2\pi} (\mathbf{e}_x \cos\varphi' + \mathbf{e}_y \sin\varphi') d\varphi' = 0$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}_z \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{\rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \\ &= \mathbf{e}_z \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(z^2 + b^2)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

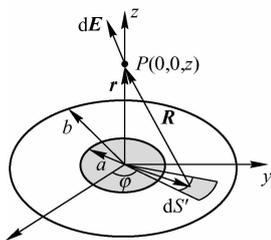


图 2.1-1 均匀带电的  
环形薄圆盘

### 3. 静电场的通量和散度

为了更好地描述电场与电荷的关系,需要引入电通量的概念。

电场中通过任意有向面元的电通量可定义为

$$d\Psi = \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.1-14)$$

则通过有限面积  $S$  的电通量为

$$\Psi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.1-15a)$$

同理,通过闭合面  $S$  的电通量为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.1-15b)$$

式中,规定闭合面上所有面积元的法线向外为正。

从实验总结得出的库仑定律出发,可以导出静电场的高斯定律。高斯定律的数学表达式为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \quad (2.1-16)$$

式(2.1-16)为高斯定律的积分形式,其说明了闭合面所通过的电通量与闭合面内部所有电荷之间的联系,而没有说明某一点的具体情况。如果想知道某点上电场与电荷的关系,首先作一小闭合面包围该点,将高斯定律应用到此闭合面上;然后当此闭合面所限定的小体积趋于零时,根据高斯积分公式,可得高斯定律的微分形式,即

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (2.1-17)$$

它把静电场中每点  $\mathbf{E}$  的散度与该点的电荷密度联系起来,是静电场中的一个基本关系式。

**【例 2-2】** 求真空中均匀带电球体的场强分布。已知球体半径为  $a$ , 电荷密度为  $\rho$ , 如图 2.1-2 所示。

**解:** 由对称性分析可知,该系统场强为球对称分布,作与球表面同心的高斯面,则高斯面上各点的场强大小相等,而且都与该点面元的法线方向平行,由高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_S E d\sigma = E \oint_S d\sigma = 4\pi r^2 E$$

(1) 带电球体外某点的场强,即  $r \geq a$  时,由于所取高斯面包含整个带电球体,故高斯面内电荷等于带电球体总电荷即

$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ , 所以由式(2.1-16)知

$$4\pi r^2 E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

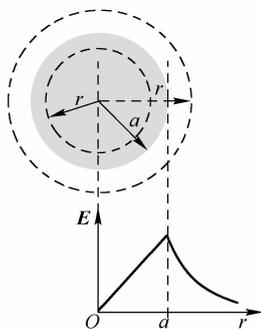


图 2.1-2 均匀带电球体的  
场强分布

得  $E_1 = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}, r \geq a$ 。

(2) 带电球体内某点的场强, 即  $r < a$  时, 由于所取高斯面在带电球体之内, 其包含的电荷等于  $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ , 故

$$4\pi r^2 E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

所以有  $E_2 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, r < a$ 。

在图 2.1-2 中我们可以看出场强随  $r$  的分布情况。

#### 4. 静电场的标势、梯度及旋度

当电荷在静电场力作用下移动时, 静电场将对电荷做功。可以证明, 静电场对电荷所做的功只与起点、终点有关, 与路径无关, 故静电场如同重力场一样是一个位场, 即

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.1-18)$$

如同物体在重力场中任一给定位置具有重力势能一样, 电荷在静电场中具有电势能。我们可以定义单位正电荷在电场中某一点所具有的电势能为电场在该点的电势, 用  $\phi(\mathbf{r})$  来表示。其为一个位置函数, 即一个标量电势函数。可以根据电势的定义计算出各种电荷分布静电场中任意一点的电势。应该注意: 静电场的电势具有相对性, 其大小与零电势选择有关。实际工作中, 我们重视静电场中两点的电势差, 而对静电场某一点的电势绝对值不感兴趣。

我们知道静电场的电场强度和静电场的电势, 是从不同的角度来描述静电场的性质而引入的。前者是从场的作用力出发的, 而后者则从场力所做的功出发的。两者显然都能描述同一电场中各点的特征, 那么它们之间必有密切的关系存在。可以证明, 场中任意给定点的场强, 等于该点电势梯度的负值, 负号的意义是指场强指向电势降低的方向, 即

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.1-19)$$

对式(2.1-19)式两端求旋度, 可得

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.1-20)$$

式(2.1-20)表明静电场是无旋场。

#### 5. 静电场中的导体和介质

前面我们分析了真空中的静电场的基本性质, 下面将研究导体和介质中电场性质。

##### (1) 静电场中的导体

导体是指内部有大量自由电荷的物体。导体内部有电场时, 自由电荷将受到电场力的作用而发生宏观运动, 形成电流。导体内部若没有电荷的宏观运动, 则内部一定没有电场, 我们称此时导体处于静电平衡状态。如果把一个不带电的导体放在静电场中, 则外电场将使自由电荷在导体表面形成某种分布, 使此不带电导体的某部分表面出现过剩正电荷, 而其他部分表面出现等值负电荷, 这种在外电场作用下, 导体中自由电荷重新分配的现象称为静电感应, 导体表面的过剩电荷称为感应电荷。静电平衡条件下, 感应电荷所产生的电场强度与外电场强度在导体内部处处相抵消, 结果导体内部任意点的电场强度都等于零。导体表面上, 确切地说是紧靠导体表面的真空中, 合成电场强度必须垂直于导体表面。

导体在静电平衡状态下的电势问题如何? 平衡时内部场强处处为零, 由场强和电势梯度之间的关系可知, 导体内部电势不随位置变化, 是一个恒量。在导体表面, 电场强度全部沿法线方向, 即表面切线方向的场强分量为零, 否则电荷将沿表面运动, 所以表面上电势处处也是一个恒量, 而且导体表面和导体内部的电势相等, 导体是一个等势体。

## (2) 静电场中的介质

真空中静电场的基本定律只能说明真空中的静电现象。电介质中有静电场时, 必须考虑电场与电介质的相互作用所引起的影响。电介质与导体不同, 电介质在电结构方面的特征是电子与原子核的结合力相当大, 以致彼此之间相互束缚着。在外电场的作用下, 电荷只能在微观范围内, 即一个分子的范围内位移, 它不可能由电介质中的某点位移到另外一点。

外电场使电介质中的正电荷沿电场方向位移而负电荷向相反方向位移, 结果正电荷与负电荷相分离, 这种现象称为电介质的极化。各种电介质极化的微观机理可能不同, 但宏观结果, 即产生的净余电偶极矩和面束缚电荷, 则是相同的。

显然不同介质在同一静电场中, 其极化程度也有强弱之分, 我们可以用极化强度  $\mathbf{P}$  来描述电介质的极化程度。设在电介质中取任意体积元  $\Delta v$ , 在外电场作用下, 这个体积元内所有电偶极矩  $\mathbf{p}$  的矢量和为  $\sum \mathbf{p}$ , 则电极化强度矢量(极化强度)可定义为

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta v} \quad (2.1-21)$$

其单位为库仑/米<sup>2</sup>。

设  $S$  为包围介质中空间区域  $V$  的闭合曲面, 经过推导,  $V$  中的束缚电荷密度, 即  $\rho_p$  与极化强度之间的关系可表示为

$$\int_V \rho_p d\tau = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.1-22)$$

上式计算结果为正值, 则表示体积  $V$  内有净余正电荷; 为负值, 则表示体积  $V$  内有净余负电荷。

其微分形式为

$$\rho_p = - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2.1-23)$$

电介质表面极化电荷面密度可以表示为

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (2.1-24)$$

由真空中静电场高斯定理可知, 矢量  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  的闭合面积分等于该闭合面所包围的电荷总量。当空间有电介质时, 电介质极化产生的极化电荷引起电场改变, 故在这种情况下, 电介质中电场的高斯定律应当具有如下形式

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = Q + Q_p \quad (2.1-25)$$

式(2.1-25)中的  $\mathbf{E}$  代表宏观电场强度,  $Q$  和  $Q_p$  分别表示闭合面  $S$  内部的自由电荷和极化电荷。如果自由电荷和极化电荷都是体分布, 则式(2.1-25)变成

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V (\rho + \rho_p) dv \quad (2.1-26)$$

式(2.1-26)中  $V$  为闭合面  $S$  所限定的体积。将高斯积分公式应用到上式的左边, 可得

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r}) \quad (2.1-27)$$

由式(2.1-23)和式(2.1-27)可得

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (2.1-28)$$

定义矢量  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  为电介质中的电位移矢量, 即

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.1-29)$$

则式(2.1-28)变为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathbf{r}) \quad (2.1-30)$$

上式是电介质中静电场高斯定律的微分形式。

式(2.1-29)表达了  $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{P}$  的关系,  $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{P}$  不是相互独立的。在弱外电场的作用下, 在各向同性电介质中,  $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{E}$  成正比, 即

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (2.1-31)$$

无量纲常数  $\chi$  称为电介质的电极化率。把  $\mathbf{P}$  的表达式, 即式(2.1-31)代入式(2.1-29), 可得

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.1-32)$$

其中

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi), \quad \varepsilon_r = 1 + \chi \quad (2.1-33)$$

$\varepsilon$  称为电介质的介电常数,  $\varepsilon_r$  称为电介质的相对介电常数。 $\varepsilon$  是描述电介质极化性质的物理量, 它是材料的电参量。 $\varepsilon$  可能是坐标的函数, 如果  $\varepsilon$  是一个与坐标无关的常数, 则此电介质称为均匀电介质, 否则称为非均匀电介质。

除了上述各向同性电介质外, 还有单晶材料一类的电介质, 它的分子电偶极矩容易沿结晶轴的方向形成, 结果矢量  $\mathbf{P}$  的方向与矢量  $\mathbf{E}$  的方向不一定相同。这类电介质称为各向异性电介质。对各向异性电介质, 矢量  $\mathbf{D}$  的每一个分量一般都是矢量  $\mathbf{E}$  的三个分量的函数。因此, 各向异性电介质不能用一个简单的介电常数描述。它必须用下面的式子代替式(2.1-32)。

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{12} E_y + \varepsilon_{13} E_z \\ D_y = \varepsilon_{21} E_x + \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_{23} E_z \\ D_z = \varepsilon_{31} E_x + \varepsilon_{32} E_y + \varepsilon_{33} E_z \end{cases} \quad (2.1-34)$$

此时介质的介电常数是一个张量。

电介质与真空的区别仅在于电介质的介电常数为  $\varepsilon$ , 而真空的介电常数为  $\varepsilon_0$ , 只要把真空中所有静电场公式中的  $\varepsilon_0$  的换成  $\varepsilon$ , 这些公式就变为电介质中的静电场公式。

## 2.2 恒定电场

当导体构成的闭合回路中有直流电源时, 回路中便会出现恒定电流。这个恒定电流是导体中的自由电荷受到电场力的作用下产生的定向运动。可见, 导体中存在电场, 该电场称为恒定电场。

### 1. 电流及电流密度

电荷的运动称为电流, 单位时间通过某面积的电荷总量称为电流强度或简称电流, 电流的单位是安培。用  $I$  表示电流, 则

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (2.2-1)$$

电流的正方向规定为正电荷运动方向。

为了表示电流在导体内的分布, 取一个矢量, 方向为该点的正电荷运动方向, 大小等于垂直于它的单位面积上的电流, 即

$$\mathbf{j} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (2.2-2)$$

称此矢量为电流密度矢量  $\mathbf{j}$ , 单位为安培/米<sup>2</sup>。很明显, 穿过任意面积  $S$  的电流等于电流密度矢量穿过这个表面的通量, 即

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.2-3)$$

如果电流存在的空间是一个厚度可以忽略的薄层,那么可以用面电流密度  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})$  来描述电流分布。面上  $\mathbf{r}$  点的面电流密度,其方向为该点的电流方向,大小定义为过该点与电流垂直的线元  $\Delta l$  上流过的电流  $\Delta I$  与线元长度  $\Delta l$  之比,当  $\Delta l \rightarrow 0$  时的极限值,即

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \quad (2.2-4)$$

在面电流情况下,流过面上任意一曲线  $L$  的电流强度可表示为

$$I = \int_L (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\alpha}) \cdot d\mathbf{l} \quad (2.2-5)$$

式中,  $\mathbf{n}$  为垂直于电流所在平面的单位矢量。

如果电流是由一种带电粒子的运动形成的,设这种带电粒子的电荷密度是  $\rho$ ,运动速度为  $\mathbf{v}$ ,则这种带电粒子形成的电流密度为

$$\mathbf{j} = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v} \quad (2.2-6)$$

## 2. 电流连续性方程

电荷的定向移动形成电流,电荷有正、负之分,等量的正电荷与负电荷相结合就成为电中性,具有电中性的物质可以在电场的作用下分离成等量的正电荷和负电荷,但是无法产生和消灭电荷。这就是电荷的守恒性质,电荷的守恒性质是电荷的基本性质。根据电荷守恒性质,流出某闭合面  $S$  的电流总和一定等于此闭合面内部总电荷在单位时间内的减少量,即

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.2-7)$$

$S$  为闭合的空间曲面,  $V$  为  $S$  包围的空间区域。式(2.2-7)称为电流连续性方程。由式(2.2-7)可得电流连续性方程的微分形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.2-8)$$

在稳恒情况下,电荷密度与时间无关。因此稳恒电流连续性方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.2-9)$$

其积分形式为

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.2-10)$$

式(2.2-10)表明稳恒电流线总是闭合的。

## 3. 导体中的电流和电场

导体内部存在一定数量的自由电荷,若内部存在电场时,自由电荷将发生宏观运动。导体中电荷的运动称为传导电流。传导电流密度与电场强度成正比

$$\mathbf{j} = \sigma_c \mathbf{E} \quad (2.2-11)$$

比例常数  $\sigma_c$  称为导体的电导率,它的单位为  $1/(\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$ ,即  $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ 。式(2.2-11)称为欧姆定律的微分形式。假设导体是均匀的,均匀导体的介电常数  $\epsilon$  和电导率  $\rho_c$  都是常数。将式(2.2-11)代入式(2.2-9),可得

$$\nabla \cdot \sigma_c \mathbf{E} = 0 \quad (2.2-12)$$

则

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.2-13)$$

可得 
$$\rho = 0 \quad (2.2-14)$$

式(2.2-14)说明导体处于稳恒电流场时,内部电荷密度处处为零。其原因是,导电媒质内部运动的自由电荷与静止的离子处处相抵消,结果电荷密度处处等于零。导体内部没有电荷,但表面上有分布电荷,表面上电荷不随时间变化,它所产生的电场满足

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.2-15)$$

式(2.2-14)为恒定电场的第二个基本方程。

导体是电导率较高的导电媒质,导体内部通有电流时,电场强度一般不等于零。由于电场强度不等于零,则通有电流的导体不再是等电位体,导体的表面不再是等电位面,导体表面上电荷的分布不再与静电平衡时电荷的分布相同。

## 2.3 稳恒磁场

运动的电荷在它的周围不但产生电场,同时还产生磁场。恒定徙动(migration)电流的周围同时存在电场和磁场;恒定传导电流因为运动的自由电荷与静止的离子电荷相抵消,所以它的周围只有磁场。恒定电流所产生的磁场是恒定磁场。本节将讨论真空及介质中恒定磁场的计算和性质。

### 1. 安培定律

正如引入点电荷概念一样,我们可以引入理想模型电流元的概念,理想电流元表示为 $\mathbf{j}(\mathbf{r})d\tau$ 。因为

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})d\tau = \mathbf{j}(\mathbf{r})dsdl = Id\mathbf{l} \quad (2.3-1)$$

式中, $ds$ 表示电流元的横截面积, $d\mathbf{l}$ 表示电流元长度, $d\mathbf{l}$ 方向为电流方向。

实验证明两个电流元之间存在作用力。安培分析了大量的实验资料以后,总结出真空中两个稳恒电流元之间的作用力公式,即安培定律

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})d\tau \times [\mathbf{j}(\mathbf{r}')d\tau' \times \mathbf{R}]}{R^3} \quad (2.3-2)$$

$d\mathbf{F}$ 表示电流元 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')d\tau'$ 对电流元 $\mathbf{j}(\mathbf{r})d\tau$ 的作用力。 $\mathbf{R}$ 是由 $\mathbf{r}'$ 点引向 $\mathbf{r}$ 点的矢量, $\mu_0$ 是真空中磁导率,其单位为亨利/米。国际单位制中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ 。

电流元 $\mathbf{j}(\mathbf{r})d\tau$ 对电流元 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')d\tau'$ 的作用力 $d\mathbf{F}'$ 可表示为

$$d\mathbf{F}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')d\tau' \times [\mathbf{j}(\mathbf{r})d\tau \times \mathbf{R}']}{R'^3} \quad (2.3-3)$$

注意其中 $\mathbf{R}' = -\mathbf{R}$ 。安培定律在稳恒磁场中的地位与库仑定律在静电场的地位是相当的。

### 2. 毕奥-萨伐尔定律

两个电流元之间的作用力是如何传递的呢?如同电荷之间库仑力一样,它也是通过场来作用的,传递电流之间相互作用的场被称为磁场。磁场对放入其中的电流产生力的作用。因此式(2.3-2)可以写为

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j}(\mathbf{r})d\tau \times d\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.3-4)$$

式中, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 与受力电流元 $\mathbf{j}(\mathbf{r})d\tau$ 无关,它描述了施力电流元 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')d\tau'$ 在 $\mathbf{r}$ 点产生的磁场性质,称为磁感应强度(磁通量密度)。其单位为

$$\frac{\text{牛顿}}{\text{安培} \cdot \text{米}} = \frac{\text{伏特} \cdot \text{秒}}{\text{米}^2} = \frac{\text{韦伯}}{\text{米}^2} = \text{特斯拉} \quad (\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Wb} \cdot \text{m}^{-2} = \text{T})$$

比较式(2.3-2)和式(2.3-4)可得

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' \times \mathbf{R}]}{R^3} \quad (2.3-5)$$

实验表明,磁场也满足叠加性,一个稳恒电流激发的磁场可以表示为各个电流元激发磁场的叠加,即

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (2.3-6)$$

上式称为毕奥-萨伐尔定律。

在很多情况下,只考虑线电流,此时导线外各点电流密度都是零,积分区域只取导线回路,则式(2.3-6)可表示为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (2.3-7)$$

**【例2-3】** 计算线电流圆环轴线上任一点的磁感应强度。

**解:** 设圆环的半径为  $a$ , 流过的电流为  $I$ 。为计算方便取线电流圆环位于  $xOy$  平面上, 则所求场点为  $P(0, 0, z)$ , 如图 2.3-1 所示。采用圆柱坐标系, 圆环上的电流元为  $I d\mathbf{l}' = e_\varphi I a d\varphi'$ , 其位置矢量为  $\mathbf{r}' = e_\rho a$ , 而场点  $P$  的位置矢量为  $\mathbf{r} = e_z z$ , 故得

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = e_z z - e_\rho a, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

$$I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e_\varphi I a d\varphi' \times (e_z z - e_\rho a) = e_\rho I a z d\varphi' + e_z I a^2 d\varphi'$$

轴线上任一点  $P(0, 0, z)$  的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e_\rho z + e_z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\varphi'$$

由于  $\int_0^{2\pi} e_\rho d\varphi' = \int_0^{2\pi} (e_x \cos\varphi' + e_y \sin\varphi') d\varphi' = 0$

所以  $\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e_z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\varphi' = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} e_z$

可见,线电流圆环轴线上的磁感应强度只有轴向分量,这是因为圆环上各对称点处的电流元在场点  $P$  产生的磁感应强度的径向分量相互抵消。

在圆环的中心点上,  $z=0$ , 磁感应强度最大, 即

$$\mathbf{B}(0) = e_z \frac{\mu_0 I}{2a}$$

当场点  $P$  远离圆环, 即  $z \gg a$  时, 因  $(z^2 + a^2)^{3/2} \approx z^3$ , 故  $\mathbf{B} = e_z \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}$ 。

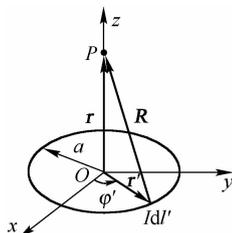


图 2.3-1 载流圆环

### 3. 稳恒磁场的通量、散度及高斯定律

一矢量场的性质表现为场矢量的散度和旋度。与分析静电场相似, 要想知道稳恒磁场的散度, 我们首先介绍稳恒磁场的磁通量概念。磁场中面积元  $d\boldsymbol{\sigma}$  所通过的磁通量可定义为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.3-8)$$

下面我们从毕奥 - 萨伐尔定律出发推导磁场的高斯定律。

因为 
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (2.3-9)$$

又 
$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.3-10)$$

故 
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.3-11)$$

又  $\nabla$  算子与源点无关,故  $\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ , 且

$$\nabla \times (u\mathbf{A}) = \nabla u \times \mathbf{A} + u \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.3-12)$$

可得 
$$\mathbf{B} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] d\tau' \quad (2.3-13)$$

由式(2.3-13)可知磁感应强度是矢量的旋度,根据任意矢量的旋度的散度恒等于零,可知磁感应强度的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3-14)$$

对上式两边进行体积分,可得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.3-15)$$

其中  $S$  为限定体积  $V$  的闭合面。式(2.3-15)为稳恒磁场的高斯定律的积分形式。它说明磁场是一个无源场。磁场的无源性质与客观上不存在单独磁荷的现象一致。

#### 4. 稳恒磁场的旋度与安培回路定律

由式(2.3-13),我们可以引入一个新的矢量,其定义如下

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] d\tau' \quad (2.3-16)$$

它是描述稳恒磁场的一个重要物理量,即稳恒磁场的矢势,后面会详细讨论。单位为韦伯/米,故式(2.3-13)变成

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.3-17)$$

故稳恒磁场的磁感应强度的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.3-18)$$

下面来证明磁感应强度的旋度具有如下的表达式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.3-19)$$

证明:

(1) 首先证明  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 对式(2.3-16)取散度得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left[ \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] d\tau' \quad (2.3-20)$$

因  $\nabla$  与源点无关,且  $\nabla \cdot (u\mathbf{C}) = \nabla u \cdot \mathbf{C}$ , 式(2.3-20)变成

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \nabla \frac{1}{R} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] d\tau' \quad (2.3-21)$$

又  $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$ , 故式(2.3-21)变为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ -\nabla' \cdot \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] d\tau' \quad (2.3-22)$$

因为 
$$\nabla' \cdot \left[ \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] = \nabla' \cdot \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'),$$

又因为是稳恒电流产生的磁场,故  $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ , 则式(2.3-22)变为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \nabla' \cdot \left[ \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] \right] d\tau' \quad (2.3-23)$$

根据高斯积分公式,式(2.3-23)变为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s} \quad (2.3-24)$$

由于积分区域  $V$  含由  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq 0$  的全部区域,但在  $V$  的边界面  $S$  上  $\mathbf{j}_n(\mathbf{r}') = 0$ , 因此

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.3-25)$$

(2) 再证明  $\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ 。由式(2.3-16)可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] d\tau' \quad (2.3-26)$$

即 
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \nabla^2 \frac{1}{R} \right] \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.3-27)$$

又由【例 1-6】知 
$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.3-28)$$

可得 
$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.3-29)$$

故 
$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (2.3-30)$$

将式(2.3-25)、式(2.3-30)代入式(2.3-18),即得式(2.3-19)。式(2.3-19)表明稳恒磁场的源强度是电流密度矢量。

设磁场中有任意有向曲面  $S$ , 对式(2.3-19)两边进行面积分,即

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (2.3-31)$$

$I$  为通过有向曲面  $S$  的电流强度。设  $L$  是曲面  $S$  的边界线,其绕行方向成右手螺旋关系,应用斯托克斯积分变换公式得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (2.3-32)$$

式(2.3-32)即为安培环路定理,表示磁感应强度沿任意一闭合回路  $L$  的环量与穿过以  $L$  为边界的任意曲面的电流强度成正比。

## 5. 磁介质及磁介质中磁场基本方程

在静电场中已研究过电场使电介质极化,极化的电介质又产生附加电场的过程。这里将讨论发生在磁现象中的相似过程。凡处于磁场中与磁场发生相互作用的物质皆可称为磁介质。磁介质在外磁场作用下产生磁化电流的过程称为磁化。磁化电流不是自由电子的长距离漂移运动所致,而是由规则排列的分子电流组成的,就好像是不同分子中的束缚电子的“接力”运动,故称束缚电流。

根据磁化微观机理进行分类,磁介质分为四类:①抗磁质,如锌、铜、水银、铅等;②顺磁质,

如锰、铂、氧等；③铁磁质，如铁、钴、镍等；④完全抗磁性，如超导体。这里主要研究介质磁性和介质中磁场的规律，不必分析介质磁化的微观细节，而将每个介质分子用具有相同磁矩的磁偶极子，或用所谓“分子圆电流”来替代。并假设“分子圆电流”的电流强度为  $I$ ，截面积为  $S$ ，对应的分子磁矩为

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{e}_n \quad (2.3-33)$$

式中， $\mathbf{e}_n$  代表圆电流平面法向单位矢量。如同电介质一样，对于磁介质，可以引用一个宏观物理量来描述介质磁化的程度，这个物理量称为磁化强度  $\mathbf{M}$ ，定义为单位体积内分子磁矩的矢量和。

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta v} \quad (2.3-34)$$

$\mathbf{m}_i$  代表  $\Delta v$  内第  $i$  个分子磁矩。磁化强度的单位是安培/米，显然真空中各点磁化强度为零。

在电介质极化时出现的附加电场是由极化电荷贡献的，而极化电荷密度与极化强度有关。在磁介质磁化时也出现附加磁场，该附加磁场是由磁化电流所产生的，而磁化电流密度又与磁化强度有密切关系。

若在介质内部取一曲面  $S$ ，其边界线为  $L$ ，则由于磁化从  $S$  背面流向前面的总磁化电流  $I_m$  可写成：

$$I_m = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.3-35)$$

显然，磁化电流可以表示为磁化电流密度的通量：

$$I_m = \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.3-36)$$

对上式应用斯托克斯公式，并令上式和式(2.3-35)相等，可得

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (2.3-37)$$

式(2.3-37)式表明，对于匀强磁场中的均匀介质， $\mathbf{M}$  与空间坐标无关，磁化电流密度在介质内部处处为零，这是因为两相邻体积元的分子相互抵消。但应注意介质表面总有磁化电流，其面电流密度矢量为

$$\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (2.3-38)$$

磁介质中磁感应强度仍然满足高斯公式，这是因为孤立的磁荷至今还没有被发现，即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.3-39)$$

其微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3-40)$$

注意：与真空情形不同，上两式中的磁感应强度包括自由电流和磁化电流产生的合磁场。

下面分析磁介质内磁场的环量特性方程。把真空中安培环路定律用在磁介质中，则可以写成

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_f + \mu_0 I_M \quad (2.3-41)$$

$I_f, I_M$  分别为穿过安培环路  $L$  的传导电流总和和分子电流。由式(2.3-35)可得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \mu_0 I_f$$

则

$$\oint_L \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = I_f$$

如同电介质中引入电位移矢量  $\mathbf{D}$  一样,在磁介质中引入磁场强度矢量  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (2.3-42)$$

其单位为安培/米。则磁介质中的安培环路定律为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f \quad (2.3-43)$$

其微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f \quad (2.3-44)$$

一般来说  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{H}$  之间的关系是复杂的,但对于各向同性非铁磁性物质而言,存在如下关系

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (2.3-45)$$

$\chi_m$  为介质磁化率。若定义  $\mu_r = 1 + \chi_m$  为介质的相对磁导率,同时定义介质的磁导率为  $\mu = \mu_r \mu_0$ ,则得

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.3-46)$$

真空中的相对磁导率等于 1。

## 2.4 时变电磁场

上面已经分别研究了静电场和稳恒磁场的基本规律,但均未涉及场随时间变化的问题。如果电场或磁场随着时间变化,则变化的磁场会产生电场,变化的电场又会产生磁场。这时,电场与磁场成为紧密相关、不可分割的统一的电磁场。下面将要分析电场与磁场之间这种相互关联、相互激发的关系,以及电磁场的普遍规律。

自从奥斯特在 1820 年发现电流磁效应之后,磁的电效应就成为物理学家研究的重要课题。法拉第从 1822 年起,经过约 10 年的实验研究,终于在 1831 年发现了电磁感应定律。1833 年,楞次建立了确定感应电流方向的规则。1861 年至 1864 年期间,麦克斯韦提出感应电场和位移电流的概念,并用高超和优美的数学形式建立了完整的电磁场方程组,这组方程概括了所有宏观电磁现象的规律,预言了电磁场的存在,并揭示出光的电磁本质。正是电磁学理论研究的那种进展和成功,才给电工和无线电工业的建立和发展奠定了基础。

### 1. 电磁感应定律

法拉第通过大量实验发现:当穿过导体回路的磁通量发生变化时,回路中就有感应电流。这表明回路中感应了电动势,且感应电动势的大小等于磁通量的时间变化率,感应电动势的方向由楞次定律确定。楞次定律指出,感应电动势以及它所引起的电流,力图使得回路的磁通量保持不变。法拉第的实验结果和楞次定律相结合就成为法拉第电磁感应定律,即

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.4-1)$$

$\varepsilon$  代表回路中感应电动势, $\Phi$  代表回路中的磁通量。如把磁通量写成磁通量密度的面积分,同时电动势写成电场强度的闭合回路积分,则得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.4-2)$$

式(2.4-2)为用场矢量表示的电磁感应定律。式(2.4-1)和式(2.4-2)中的符号是楞次定律所要求的。

我们知道电磁感应定律是建立在闭合的导体回路中的,然而麦克斯韦把这个定律加以推广,麦克斯韦认为电磁感应定律可以包括在真空和任意介质中的,即认为变化磁场引起感应电场的现象不仅发生于导体回路中,而且可以不受导线回路的限制。根据这个观点,在介质中任取的一个闭合回路,则在此回路上,电磁感应定律同样是成立的。电磁波的发现完全证明了这一假设是正确的。

法拉第定律的微分形式可以直接由式(2.4-2)导出,应用斯托克斯积分公式,式(2.4-2)等号左边为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.4-3)$$

故式(2.4-2)变成

$$\int_S \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.4-4)$$

因为  $S$  是任意的,所以上式中积分函数必须等于零,则可以得到

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4-5)$$

这个结果表明,感应电场和静电场的性质完全不同,它是有旋度的场。因而这个电场不能用一个标量的梯度去代替,即不能应用标量势的概念。

## 2. 位移电流

变化的磁场能够产生电场,那么当电场随时间变化时,能否感应出磁场,即发生与电磁感应相类似的现象呢? 麦克斯韦发现将稳恒磁场中安培环路定律应用到时变场时会出现矛盾,为此提出位移电流的假说,对安培环路定律做出修正。位移电流的假说也就是变化的电场产生磁场的假说。

式(2.4-5)表示变化磁场是产生电场的一个原因。与此对比,如果变化的电场不产生磁场,则磁场仍然只能由传导电流产生。那么对于时变场,应仍然有下式成立,即

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_t \quad (2.4-6)$$

式中,  $\mathbf{j}_t$  是传导电流密度。因为一个矢量场旋度的散度为零,故

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_t = 0 \quad (2.4-7)$$

式(2.4-7)表明传导电流密度的散度为零。但是在时变电场情形下,电荷是随时间变化的,因此  $\mathbf{j}_t$  的散度不再等于零,而等于该点电荷密度的减小率,即

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.4-8)$$

这样,式(2.4-7)和式(2.4-8)便相互矛盾。其中式(2.4-8)是电荷守恒定律的结果,无疑是正确的。因此可以认为式(2.4-7)已不再适合时变场情形。换言之,变化电场将感应出磁场,而成为磁场的一个“源”。式(2.4-6)的右边应增加一个反映电场变化的项。事实上,如果我们考虑到  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ,则

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (2.4-9)$$

即

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.4-10)$$

我们看到,如果令

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.4-11)$$

则与电荷守恒定律相一致。式(2.4-11)中 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 是麦克斯韦首先引入到 $\mathbf{H}$ 旋度的方程中的,并称它为**位移电流密度**,因为它具有电流密度的量纲。式(2.4-11)说明传导电流和位移电流都是磁场的“源”。位移电流不同于通常电流(即电荷流动)的概念,它不过是为了说明变化电场产生磁场的现象而引入的一个假想概念而已。

由于引入位移电流,电流的范围扩大了。通常把包括传导电流、位移电流、有时还有运流电流(真空或气体中自由电荷运动引起的电流,又称徙动电流)在内的电流称为全电流。只要电场随时间变化,便会有位移电流,所以位移电流存在于真空及一切介质中,且位移电流与电场变化频率有关,频率越高,位移电流密度越大。

位移电流的假设不能由实验直接验证;但是根据这一假设推导出来的麦克斯韦方程已为实践所证明是客观真理。

**【例 2-4】** 铜的电导率 $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ,相对介电常数 $\varepsilon_r = 1$ 。设铜中的传导电流密度为 $\mathbf{J} = \mathbf{e}_x J_m \cos(\omega t) \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ 。试证明:在无线电频率范围内,铜中的位移电流与传导电流相比是可以忽略的。

**证明:** 当铜中存在时变电磁场时,位移电流密度为

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{e}_x E_m \cos \omega t] = -\mathbf{e}_x \omega \varepsilon_r \varepsilon_0 E_m \sin \omega t$$

位移电流密度的振幅值为

$$J_{dm} = \omega \varepsilon_r \varepsilon_0 E_m$$

由微分形式的欧姆定律,即式(2.2-11),得传导电流密度的振幅值为

$$J_m = \sigma E_m$$

$$\frac{J_{dm}}{J_m} = \frac{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0 E_m}{\sigma E_m} = \frac{2\pi\nu \times 1 \times 8.854 \times 10^{-12} E_m}{5.8 \times 10^7 E_m} = 9.58 \times 10^{-13} \nu$$

我们通常所说的无线电频率是指 $\nu = 300\text{MHz}$ 以下的频率范围,即使扩展到极高频段( $\nu = 30 \sim 300\text{GHz}$ ),从上面的关系式看出比值 $J_{dm}/J_m$ 也是很小的,故可忽略铜中的位移电流。

### 3. 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组是电磁场的基本方程,是麦克斯韦在他提出的位移电流的假设下,全面总结电生磁和磁生电现象后提出来的。其微分形式如下

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.4-12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4-13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4-14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (2.4-15)$$

式(2.4-12)也称为全电流定律,该式表明传导电流和变化的电场都能产生磁场;式(2.4-13)也称为法拉第电磁感应定律,该式表明变化的磁场产生电场;式(2.4-14)也称为磁通连续定律,该式表明磁场是无源场,磁感应线是闭合曲线,这与客观上不存在单独磁荷的现象一致;式(2.4-15)表明电荷产生电场,其中 $\rho_f$ 为自由电荷体密度。

积分形式的麦克斯韦方程组为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = Q_f \quad (2.4-16)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.4-17)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.4-18)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.4-19)$$

式(2.4-16)表明穿过任意闭合曲面的电位移的通量等于该闭合曲面所包围的自由电荷的代数和;式(2.4-17)表明穿过任意闭合曲面的磁感应强度的通量恒等于0;式(2.4-18)表明电场强度沿任意闭合曲线的环量,等于穿过以该闭合曲线为周界的任一曲面的磁通量变化率的负值;式(2.4-19)表明磁场强度沿任意闭合曲线的环量,等于穿过以该闭合曲线为周界的任意曲面的传导电流和位移电流之和。

麦克斯韦方程组表明了电磁场和它们的源之间的全部关系。麦克斯韦方程组是宏观电磁现象的基本规律,电磁场的计算都可归结为求麦克斯韦方程组的解。静电场、恒定电场和恒定磁场的方程都可以由麦克斯韦方程组导出,它们不过是  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  的特殊情形下的麦克斯韦方程组。

#### 4. 电磁场的边值关系

当研究某一区域的电磁场时,常遇到该区域被不同介质分成几个区域的情况。由于介质性质的突变,这些界面上将出现面电荷、面电流分布,电磁场矢量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$  将发生跃迁,微分形式的麦克斯韦方程组在界面上将失去意义。要解出一个子区域内的电磁场,除了要知道该区域的电流、电荷及初始条件外,还必须给出这个子区域的边界条件。由于电磁场沿界面一侧的分布就是另一侧电磁场的边界条件,在场没有解出之前,子区域的边界条件一般不能给出,但可以给出界面两侧场量满足一定的关系。这种描述界面两侧场量改变与界面上电荷电流之间的关系式称为边值关系。按照静电场和稳恒磁场中推导边值关系的方法,将麦克斯韦方程的积分形式应用到分界面上,即可求得电磁场的边值关系。

界面上电磁场的边值关系实质上就是麦克斯韦方程组在界面上的等效形式。下面分别讨论场矢量的法向分量和切向分量在界面上的边值关系。这里的法向和切向是针对界面而言的。

##### (1) 场矢量的法向分量在界面上的边值关系

设界面的单位法向矢量为  $\mathbf{n}$ ,则场矢量的法向分量可以写成  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ 、 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ 、 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ 、 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$ ,在此只研究  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$  和  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ 。在两介质界面上取一面元  $\Delta S$ ,以  $\Delta S$  为截面作一无限薄扁平小柱体,使柱体上下两底面分属于两介质(见图 2.4-1)。

首先讨论电位移矢量在界面法向上的变化关系。把式(2.4-16)应用于该小柱体,左端的面积分沿柱体表面。由于柱体高度  $h$  是小量,而在侧面上  $\mathbf{D}$  处处有限,故侧面对面积分的贡献可忽略,只由上下两底面的积分给出。而该式的右端是柱体内总自由电荷。

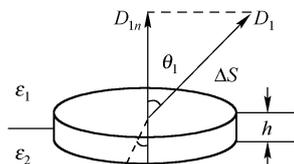


图 2.4-1 分界面上  $D_n$  的边界条件

在柱体高度  $h \rightarrow 0$  时,柱体内总自由电荷为面  $\Delta S$  上的自由电荷  $\sigma_f \Delta S$ ,即

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n}) \cdot \Delta \mathbf{S} = \sigma_f \Delta S \quad (2.4-20)$$

则可得 
$$\mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n} = \sigma_f, \quad \text{即} \quad (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \sigma_f \quad (2.4-21)$$

上式表明电位移矢量在界面法向上是不连续的,其跃变与自由电荷密度有关。

其次讨论磁感应强度矢量在界面法向上的变化关系。把式(2.4-17)应用于该小柱体,可得

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.4-22)$$

上式表明磁感应强度矢量在界面法向上是连续的。

### (2) 场矢量的切向分量在界面上的边值关系

设界面的单位法向矢量为  $\mathbf{n}$ ,则场矢量的切向分量可以写成  $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$ 、 $\mathbf{D} \times \mathbf{n}$ 、 $\mathbf{B} \times \mathbf{n}$ 、 $\mathbf{H} \times \mathbf{n}$ ,在此只研究  $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$  和  $\mathbf{H} \times \mathbf{n}$ 。为求出场矢量的切向分量在界面上的边值关系,在两介质界面上取一线元  $\Delta l$ ,以  $\Delta l$  为中线垂直于界面作一无限窄小矩形,它的两短边可以看成宏观小量,但其上下两边分别深入到界面两侧介质的分子层中(见图 2.4-2)。

首先讨论磁场强度矢量在切向上的变化关系。把式(2.4-19)应用于该小矩形回路,等式左边积分得

$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \Delta \mathbf{l}$ 。由于回路面积趋于零,体分布的电流对右端积分贡献为零,仅面分布的电流有非零贡献,由于分界面的法线方向  $\mathbf{n}$  由介质 2 指向介质 1,闭合回路所包围的平面的方向为  $\mathbf{s}$ (图中  $\otimes$  表示垂直纸面向内),在回路包围面积上通过的电流为  $\mathbf{a}_f \cdot \mathbf{s} \Delta l$ ,又

$$\Delta \mathbf{l} = (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \Delta l \quad (2.4-23)$$

则回路积分变为

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \Delta l = \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{s} \Delta l$$

即

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{s} \Delta l = \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{s} \Delta l \quad (2.4-24)$$

上式利用了矢量恒等式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (2.4-25)$$

由于回路是任意选取的,其包围面的方向也为任意,故一定有

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{a}_f \quad (2.4-26)$$

上式表明磁场强度矢量在界面切向上是不连续的,其跃变与界面上自由电流密度有关。如果交界面没有自由的面电流,则  $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0$ 。

其次讨论电场强度矢量在切向上的变化关系。把式(2.4-18)应用于该小矩形回路,可得

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (2.4-27)$$

上式表明电场强度矢量在界面切向上是连续的。

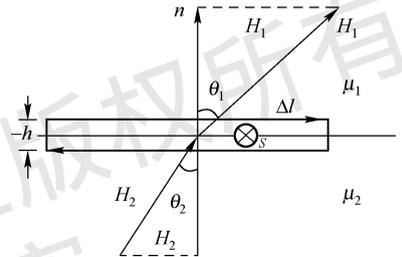


图 2.4-2 分界面上  $H_t$  的边界条件

## 2.5 电磁场的能量和能流

前面讨论了电磁现象的基本规律,下面就从这些基本规律出发揭示电磁场的物质性。

电磁场是物质的一种形式,应像静电场和稳恒磁场一样具有能量。根据实验事实,电磁场与带电体相互作用时的能量可以转化为带电体的机械能,说明电磁场确实具有能量。那么电磁场的能量和能量流动应如何描述呢?

## 1. 电磁场的能量和能量密度

人们总是通过已知能量形式的相互转化来认识一种新的能量形式的。当电磁场和电荷相互作用时,场对电荷做功,带电体能量发生变化。根据能量守恒定律,带电体能量的增加就等于电磁场能量的减少。

设有一个空间区域  $V$ ,其中存在电磁场  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ ,电荷密度为  $\rho$ ,电荷运动速度为  $\mathbf{v}$ ,根据洛伦兹力公式,电磁场对电荷作用力的力密度为

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.5-1)$$

按经典力学,电磁场对电荷做功的功率密度为

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_f \quad (2.5-2)$$

考虑到  $\mathbf{j}_f = \rho\mathbf{v}$  为电流密度。电磁场对电荷做功的总功率为

$$P = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\tau = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_f d\tau \quad (2.5-3)$$

根据能量守恒定律,电磁场对电荷做功的总功率等于电磁场能量的减少率。为了电磁场能量表达式,把电流密度  $\mathbf{j}_f$  通过场量表达出来,由麦克斯韦方程  $\mathbf{j}_f = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ,可得

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_f = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.5-4)$$

又因为

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

故式(2.5-4)为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_f &= \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5-5)$$

所以式(2.5-3)变为

$$P = \int_V \left[ -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] d\tau \quad (2.5-6)$$

若定义  $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ,则式(2.5-6)可变为

$$P = - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\tau - \int_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau \quad (2.5-7)$$

利用高斯公式,可得

$$P = - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \int_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau \quad (2.5-8)$$

式中, $S$  是包围区域  $V$  的闭合曲面,以上空间  $V$  是任意的。为了看清上式各项的物理意义,假设  $V$  为全空间。对于分布在有限区域内的电荷、电流,在任意有限时间内,无穷远处的电磁场场量都必定为零,此时上式可写成

$$P = - \frac{d}{dt} \int_V w d\tau \quad (2.5-9)$$

上式左边是全空间电磁场对电荷做功的总功率,右边必为全空间中电磁场能量的减少率。全空间中除去电荷外,就是与它作用着的电磁场,故  $w$  就是电磁场的能量密度。

上面我们知道了  $w$  就是电磁场的能量密度,其具体表达式在某些简单情况下是可以给出的。例如,空间区域是各向同性线性介质,则  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ,且  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ,则可得

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \right] \quad (2.5-10)$$

则电磁场的能量密度为

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (2.5-11)$$

注意以上形式的适用范围。

一般情况下,电磁场的能量密度公式为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

## 2. 电磁场的能流密度

时变电磁场中一个重要现象就是电磁能量的流动,我们定义单位时间内穿过与能量流动方向相垂直的单位面积的能量为能流密度矢量,其意义就是电磁场中某点的功率密度,方向为该点能量流动的方向。详细说明如下。根据上面推导过程可得

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_t d\tau = - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \int_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau \quad (2.5-12)$$

将上式等号右边第二项移到等号左边,可得

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_t d\tau + \int_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.5-13)$$

上式等号左边第一项是区域  $V$  中电磁场对电荷做功的总功率,第二项是区域  $V$  内电磁场能量的增量,考虑到能量守恒,右边的积分一定是区域边界面  $S$  流进来的电磁场能量。所以  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  可以解释为电磁场能流密度,记为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.5-14)$$

又称为坡印廷矢量,其方向表示电磁场能量流动方向,大小等于单位时间内通过与能量流动方向垂直的单位面积上电磁场能量。

式(2.5-13)是电磁场和电荷相互作用的能量守恒定律的积分形式,可由高斯积分公式得到其微分形式

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_t + \frac{\partial w}{\partial t} = - \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (2.5-15)$$

必须指出,上述电磁场能量密度、能流密度的表达式是在确认能量守恒的前提下推导出来的,因此不是严格意义上的推导,事实上严格推导是不可能的。因为电磁场能量密度和能流密度的表达式是在能量守恒的前提下得出的,而能量守恒表达式又依赖于电磁场能量密度和能流密度的表达式。二者中任何一个都不能先于另一个解决,只能够同时解决。重要的是上述结果已被大量的实验事实证明是正确的。

**【例 2-5】** 用坡印廷矢量分析直流电源沿同轴电缆向负载传送能量的过程。设电缆为理想导体,内外半径分别为  $a$  和  $b$ ,如图 2.5-1 所示。

**解:** 内导体是半径为  $a$  的圆柱体,而外导体是半径为  $b$  的圆柱壁(厚度很小以至忽略),两者之间为绝缘介质。系统具有柱对称性,所以采用柱坐标分析较方便。内导体和外导体上的电流强度大小相等,流动方向相反,所以

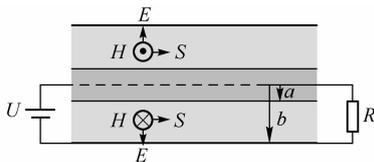


图 2.5-1 同轴电缆

外导体之外的磁场强度为零。由于为理想导体,电阻为零,电导率  $\sigma_e \rightarrow \infty$ ,由欧姆定律微分形式  $\mathbf{j} = \sigma_e \mathbf{E}$ ,故导体内部电场强度为零。所以,只有内、外导体之间才有可能同时存在电场和磁场,坡印廷矢量不为零。

由于柱对称性,可以判断出电场强度的方向平行于  $\mathbf{e}_\rho$ ,磁场强度的方向平行于  $\mathbf{e}_\varphi$ 。由电场的高斯定理,容易得出电场强度  $\mathbf{E} \propto \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho$ ,再由  $\int_a^b E d\rho = U$ ,得

$$\mathbf{E} = \frac{U}{\rho \ln(b/a)} \mathbf{e}_\rho$$

由磁场的安培环路定理,可得磁场强度

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi$$

则坡印廷矢量

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{U}{\rho \ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_z$$

流入内外导体间的横截面  $A$  的功率为

$$P = - \int_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \int_a^b \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)} 2\pi\rho d\rho = UI$$

即说明电源提供的能量全部被负载吸收了,电磁能量是通过导体周围的介质传播的,导线只起导向作用。

## 习题 2

2.1 已知某一区域中给定瞬间的电流密度  $\mathbf{J} = C(x^3 \mathbf{e}_x + y^3 \mathbf{e}_y + z^3 \mathbf{e}_z)$ ,其中  $C$  是大于零的常量,求:

- (1) 在此瞬间,坐标为  $(1, -1, 2)$  的点处电荷密度的时间变化率;
- (2) 求此瞬间以原点为球心,  $a$  为半径的球内总电荷的时间变化率。

2.2 设在某静电场域中任意点的电场强度均平行于  $x$  轴。

**证明:** (1)  $\mathbf{E}$  与坐标  $y, z$  无关; (2) 若此区域中没有电荷,则  $\mathbf{E}$  与坐标  $x$  无关。

2.3 设真空中的一对平行导线之间的距离为  $d$ ,两导线上的电流分别为  $I_1$  和  $I_2$ ,试计算长为  $L$  的两导线之间的作用力。

2.4 已知无源区  $\mathbf{j} = 0, \rho = 0$  中的电场  $\mathbf{E} = iE_m \cos(\omega t - kz)$ ,式中  $E_m, K, \omega$  是常量。由麦克斯韦方程组求  $\mathbf{B}$ ,并且证明  $K^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$

2.5 从微分形式麦克斯韦方程组导出电流连续性方程。

2.6 试证明通过电容器的位移电流等于导线中的传导电流。

2.7 线性各向同性均匀介质中某点的极化强度  $\mathbf{P} = 18\mathbf{e}_x - 30\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z, D_z = 20.5$ ,求这点的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{D}$ 。

2.8 证明均匀介质内部的体极化电荷密度  $\rho_p$  总是等于体自由电荷密度  $\rho_f$  的  $-\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$  倍。

2.9 有一个内、外半径分别为  $a$  和  $b$ ,介电常数为  $\epsilon$  的介质球壳,其中有密度为  $\rho$  的均匀电荷,求任一点的  $\mathbf{D}$  及球壳中的极化电荷密度。

2.10 半径为  $a$  的球形媒质的磁导率为  $\mu$ ,球外是空气,已知球内、外的磁场强度分别为:

$$\mathbf{H}_1 = A(r \cos\theta - \theta \sin\theta), \quad r < a; \quad \mathbf{H}_2 = Cr^3(r 2 \cos\theta + \theta \sin\theta), \quad r > a$$

(1) 确定  $A$  和  $C$  之间的关系; (2) 求球面的自由电流密度。

2.11 将低频电压  $u = U_0 \cos\omega t$  加于极板半径为  $a$ ,间隔为  $d$  的平行板电容器设  $d \ll a$ 。求:

- (1) 平行板电容器板间电场和磁场;
- (2) 平行板电容器内能流密度。

## 第3章 电磁场的波动性

本章先简单回顾波与波动方程,了解波这种物质特殊运动形式的共同特性。然后从第2章给出的麦克斯韦方程组出发,推导出电磁场的波动方程,得出时变电磁场能以波动的形式存在。接着讨论单色电磁波的一些特点、相速度与群速度,以及电磁波与物质作用时的介质色散问题。最后介绍电磁波的辐射。

### 3.1 电磁场的波动方程

#### 1. 波与波动方程

振动在空间传播形成波动。在波场中,描写振动的物理量随时间、空间呈周期性地变化。例如,一个沿  $x$  方向传播的平面波的函数为

$$u(x, t) = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3.1-1)$$

式中,  $A$  是振幅,  $\lambda$  是波长,  $T$  是周期。也可以用其他一些参数描写波动,如波矢量  $k$ 、频率  $\nu$ 、圆频率  $\omega$  等,它们的关系是

$$\lambda = 2\pi/k, \omega = 2\pi\nu = 2\pi/T \quad (3.1-2)$$

我们知道,力学中描写的波动,如声波、水波、地震波等,都可以看成质点振动在空间的传播。按照牛顿定律,可以导出质点位移满足的微分方程,它是关于时间和空间的偏微分方程。一维形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-3)$$

式中,  $v$  为波速

$$v = \lambda/T = \omega/k \quad (3.1-4)$$

三维情况下,式(3.1-3)改写为

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-5)$$

#### 2. 电磁场波动方程

现在我们假定在真空中的某一区域内存在一种迅速变化的电荷电流分布,而在该区域以外的空间中,电荷及电流密度处处为零,即  $\rho = 0, j = 0$ 。在此情况下,我们来研究此空间(无源空间)内电磁场的运动形式。

在无源空间中(即电流源为零,电荷源为零),电场和磁场相互激发,电磁场的运动规律满足下列麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.1-6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.1-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.1-8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1-9)$$

现在我们从这组联立的偏微分方程中找出电场和磁场各自满足的方程,再看它们的解具有什么样的性质。为此,对式(3.1-7)两边取旋度

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) \quad (3.1-10)$$

应用矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

而按式(3.1-9),即  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ,再利用式(3.1-6),式(3.1-10)化为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-11)$$

式中

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (3.1-12)$$

用同样的方法可以导出磁场  $\mathbf{H}$  所满足的方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-13)$$

将式(3.1-11)或式(3.1-13)与式(3.1-5)比较发现,它们的形式完全相同,这表明这里的电磁场是以波动形式存在的。或者说,一切脱离场源(即电流源,电荷源)而单独存在的电磁场,在空间的运动都是以波动的形式进行的。以波动形式运动的电磁场称为电磁波。在真空中传播的一切电磁波(包含各种频率范围的电磁波,如无线电波、光波、X射线、 $\gamma$ 射线等),无论它们的频率是多少,它的传播速度都为  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 。

### 3. 光的电磁理论

麦克斯韦用他自己总结出的电磁场基本方程,推出了电磁场波动方程,预言了电磁波的存在,并得出真空中的电磁波以速度  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  传播。常数  $c$  首先由科耳劳什和韦伯于 1856 年,从测量电容器的静电单位电容和电磁单位之比定出。结果发现,它和光在自由空间中的传播速度相同,这使麦克斯韦想到:光就是一种电磁波!

早在 1675 年罗麦由木卫一星蚀观测中实现了光速测定,后来布雷德利于 1728 年又用不同方法(从恒星光行差)做了光速测定。第一个对地面光源光速的测量是由斐索于 1849 年实现的。后来,迈克耳孙用多年时间完善测量系统,根据大约 200 次测量的平均值得到  $c$  为 299796km/s。梅赛 1923 年测量了电磁波在导线上的速度,得到  $c$  为 299782km/s。

从各种不同测量(在一些情况下使用的辐射频率和光学测量中所用的频率要差几十万倍)得到的  $c$  值如此接近一致,这使麦克斯韦理论得到了有力的证明。现代测量技术的发展,利用激光技术使光计量的准确度达到了新的水平,多种测量方法得到的结果相当一致。1983 年 10 月第十七届国际计量大会正式通过新的“米”定义:“米(m)是光在真空中于  $1/299792458$  秒时间间隔内所经过的路径的长度”。在这个新的“米”定义中,光速作为等于 299792458m/s 的定义值确定下来,不再具有不确定度。

光的波动性已为众多的干涉、衍射实验所证实。惠更斯、杨氏、菲涅耳等人都对建立光的波动理论做出过重大贡献。然而,在麦克斯韦以前,光被认为是在一种特殊弹性媒质(称为“以太”)中传播的机械波,为了不与观察测量事实抵触,必须赋予“以太”极其矛盾的属性:密

度极小而弹性模量极大。这不仅在实验上无法得到证实,理论上也显得荒唐。麦克斯韦指出了光的电磁属性,认为光是一种电磁波,这在认识光的本质方面是一个重大的突破。

后面我们还将介绍,在无界空间中传播的电磁波是横波,即振动面与传播方向垂直,这与光的偏振实验得出的结论一致。用电磁场理论说明光的反射、折射与衍射等,也得到满意的结果。除了涉及物质微观结构的光学现象需要用量子理论外,宏观领域的光学现象在应用电磁理论时获得圆满成功,从而进一步确认了光的电磁理论。

然而,麦克斯韦阐述的理论像机械波动理论一样,还需要有以太,只不过是以电磁的以太代替了机械的以太,在电磁以太中有位移电流和磁场,麦克斯韦本人长期试图借助机械模型来描述电磁场。随着物理学的发展,人们才逐渐放弃机械模型解释麦克斯韦方程,应当把电磁场看做是物质的一种特殊形态,是不能再简化的东西,电磁波不同于一般的弹性波,它不必有其他的传播介质,电磁振动在空间的传播是由于变化的电场和磁场相互激发的缘故。

## 3.2 单色电磁波

3.1 节导出了电磁场在真空中的波动方程,场量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  与时间有关,形成时变电磁场。如果激发电磁场的场源(电流源或电荷源)以一定的频率做正弦变化,则它所激发的电磁场也以相同的频率随时间做正弦变化,如无线电广播、通信的载波、激光器发出的激光束等都接近于正弦电磁波。这种以一定的频率做正弦变化的场称为正弦电磁场或时谐电磁场,又称单色场。对于单一频率变化的电磁场在各向同性线性介质中有如下简单关系

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega), \quad \mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\omega) \quad (3.2-1)$$

需要注意的是,对于不同频率的电磁波,介电常数及磁导率是不同的。即  $\varepsilon$  和  $\mu$  是  $\omega$  的函数

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega) \quad (3.2-2)$$

对于一般的电磁波,场量可以是时间的任意函数,但总可以通过傅里叶(Fourier)分析表示成单色波的叠加。

### 1. 亥姆霍兹(Helmholtz)方程

对于单色波而言,波场中每一点场量都是时间的谐变函数,电场和磁场的一般形式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.2-3)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.2-4)$$

时谐场的空间部分和时间部分可以分离,  $e^{-i\omega t}$  是电磁场的时间部分,表示电磁场以  $\omega$  为圆频率随时间做正弦变化;而  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  或  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  是电磁场的空间部分,既描述了振幅在空间的分布特点,又描述了相位在空间的分布特点,同时其矢量特性又包含了电磁波的偏振信息。所以,讨论单色电磁波主要就是分析  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  或  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 。 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  或  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  也称为复振幅。

在无源空间中将式(3.2-3)、式(3.2-4)代入麦克斯韦方程组中,并利用式(3.2-1),经过运算,消去方程两边的时间因子  $e^{-i\omega t}$ ,可得麦克斯韦方程组的复数形式为

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\mu\omega\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (3.2-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\varepsilon\omega\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.2-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.2-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.2-8)$$

对于均匀介质中的单色波,上面的四个方程并不完全独立,如对式(3.2-5)两边取散度,利用  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$ ,即可得  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ,即式(3.2-7)。同样对式(3.2-6)两边取散度,也可导出式(3.2-8)。所以我们研究均匀线性介质中的单色波可以只考虑式(3.2-5)和式(3.2-6)两个方程。对式(3.2-5)式两边取旋度,并利用式(3.2-6)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\mu\omega \nabla \times \mathbf{H} = \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{E}$$

又

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

则有

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.2-9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.2-10)$$

式(3.2-9)称为亥姆霍兹(Helmholtz)方程。亥姆霍兹方程也可以由式(3.2-3)直接代入波动方程而得到,它是单色波复振幅都需要满足的方程。其中

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (3.2-11)$$

是空间沿传播方向单位度完整波数目的  $2\pi$  倍,称为电磁波的波矢或圆波数,它决定于媒质的电磁性质和波的激发频率。

式(3.2-10)是电场需要满足的补充条件,决定了电磁场的横波性,称为横波条件。如果能从式(3.2-9)出发解出  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,则可以由式(3.2-5)解出

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\mu\omega} \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.2-12)$$

用上述同样的计算方法可求出  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  满足的波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (3.2-13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.2-14)$$

解出  $\mathbf{H}$  后,电场由式(3.2-6)给出

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{i\epsilon\omega} \nabla \times \mathbf{H} \quad (3.2-15)$$

场的空间部分一旦求出,则时谐场的全解表示成式(3.2-3)和式(3.2-4)的形式。

## 2. 能量密度和能流密度的时间平均值

我们知道,电磁场能量密度  $w$  和能流密度矢量  $\mathbf{S}$  在各向同性线性介质中可表示为

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.2-16)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.2-17)$$

由于能量密度和能流密度是场强的二次式,而二次项中两个因子取实部后的乘积与两个复数相乘后取实部并不相等,故不能把场强的复数表示直接代入。计算  $w$  和  $\mathbf{S}$  瞬时值时,应把实数表达式代入。但因  $w$  和  $\mathbf{S}$  都是随时间迅速脉动的量,实际上我们往往只需用到它们的时间平均值。为了以后应用,这里给出二次式求平均值的一般公式。设  $f(t)$  和  $g(t)$  的复数形式为

$$f(t) = f_0 e^{-i(\omega t + \varphi_1)}, g(t) = g_0 e^{-i(\omega t + \varphi_2)}$$

则两者的乘积在一周期的平均值为

$$\begin{aligned} \overline{f_{\text{实}}(t) \cdot g_{\text{实}}(t)} &= \frac{1}{T} \int_0^T f_0 g_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f_0 g_0 \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

利用复数取复共轭及取实部运算, 上式可改写为

$$\overline{f_{\text{实}}(t) \cdot g_{\text{实}}(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ f_{\text{复}}^*(t) \cdot g_{\text{复}}(t) \} \quad (3.2-18)$$

这表明两个同频率变化的物理量乘积的时间平均值可用其复数表达式的相应运算直接算出。所以我们可以算出实际能量密度和能流密度的时间平均值为

$$\overline{w} = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} \} = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \{ \varepsilon \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} + \mu \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} \} \quad (3.2-19)$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \} \quad (3.2-20)$$

### 3. 平面波和球面波

在电磁波的传播过程中, 对于任意时刻  $t$ , 空间电磁场中具有相同位相的点构成等相位面, 或称波阵面。波阵面为平面的电磁波称为平面电磁波, 波阵面为球面的电磁波称为球面波。

由上面讨论可知, 对于时谐电磁场, 波动方程可简化为亥姆霍兹方程求解。按照激发方式或传播条件的不同, 亥姆霍兹方程的解可以有平面波解、球面波解等多种形式。先看最基本的平面波解。

平面波的等相位面为与传播方向垂直的平面。考虑到等相位面上各点场矢量的振幅可以相同或不同, 把平面波分为均匀平面波和非均匀平面波。场矢量在等相位面上各点振幅相同的平面波为均匀平面波, 否则称为非均匀平面波。非均匀平面波在后面研究全反射现象时将会遇到; 而在无界均匀线性各向同性无耗介质空间中只存在均匀平面波。

不难证明下式满足亥姆霍兹方程

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.2-21)$$

实际上 
$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$= \mathbf{E}_0 [ (ik_x)^2 + (ik_y)^2 + (ik_z)^2 ] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

即

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

形如式(3.2-21)的解称为平面波解。补上时间因子, 则

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.2-22)$$

对于平面波, 相位相同的面(等相面)满足  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{常数}$ , 即与  $\mathbf{k}$  垂直的平面。

同样可证, 下面形式也满足亥姆霍兹方程

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_0}{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.2-23)$$

此式代表一个从原点发出的球面波, 当波向外传播时, 其振幅不断减小, 而球面面积不断扩大。显然, 其等相位面为球面。在离开波源足够远的地方, 波阵面上的一个小区域和平面波的一部分非常相似, 这时球面波可近似看做平面波来处理。

## 3.3 相速度与群速度

### 1. 相速度

上面所述单色波, 无论平面波还是球面波, 空间各点的振动位相都是互相关联的。设沿波

传播方向上两点相距  $dz$ , 到达同一相位值的时间差为  $dt$ , 则定义相速度  $v_p = \left( \frac{dz}{dt} \right)_{d\varphi=0}$ 。  $d\varphi=0$

表示求相速度时须保持相位值不变。相速度表征空间位相分布的时序关系。

对于沿  $z$  轴传播的平面波, 电场为  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ , 相位因子可写为

$$\varphi(z, t) = \omega t - kz \quad (3.3-1)$$

$$v_p = \left( \frac{dz}{dt} \right)_{d\varphi=0} = \frac{\omega}{k} \quad (3.3-2)$$

球面波位相沿径向传播, 相位因子可写为  $\varphi(r, t) = \omega t - kr$ , 径向距离即  $dr$ , 所以  $v_p =$

$\left( \frac{dr}{dt} \right)_{d\varphi=0} = \frac{\omega}{k}$ 。所以, 无论平面波还是球面波都有

$$v_p = \omega/k \quad (3.3-3)$$

一般折射率定义为真空光速与相速度的比值, 并注意式(3.2-11)

$$n = c/v_p = c \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \quad (3.3-4)$$

$\mu_r$  和  $\varepsilon_r$  分别是相对磁导率和相对介电常数, 绝大多数光学介质是非磁性的,  $\mu_r \approx 1$ , 故  $n \approx \sqrt{\varepsilon_r}$ 。

## 2. 两单色波的叠加

上面的讨论都是对单色波而言的。实际上单色波是理想化的波, 不可能严格实现。但根据傅里叶定理, 任何波(假定它满足某些很一般的条件)都可以看成是不同频率的单色波的叠加:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty a_\omega(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g_\omega(\mathbf{r})] d\omega \quad (3.3-5)$$

或采用复数表示

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty a_\omega(\mathbf{r}) e^{-i[\omega t - g_\omega(\mathbf{r})]} d\omega \quad (3.3-6)$$

下面我们讨论包含多种频率的非单色波的一些特点。考虑沿  $z$  方向传播的平面波

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i[\omega t - kz]}$$

当频率  $\omega$  确定后, 波矢  $k$  不再独立, 在理想介质中

$$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c} n \quad (3.3-7)$$

如果介质是非色散的, 即折射率  $n$  与  $\omega$  无关, 则  $k$  与  $\omega$  成线性关系; 如果介质是色散的, 则  $k$  与  $\omega$  不再保持线性关系。  $k$  与  $\omega$  的函数关系记为

$$k = k(\omega) \quad (3.3-8)$$

考虑两个频率不同但十分接近的单色波

$$\Psi_1 = A_1 e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)}, \Psi_2 = A_2 e^{-i(\omega_2 t - k_2 z)}$$

的叠加。记  $\omega_0$  为介于  $\omega_1$  与  $\omega_2$  之间的中心频率,  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ ,  $k_0 = k(\omega_0)$ , 则

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A(z, t) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (3.3-9)$$

式中

$$A(z, t) = A_1 e^{-i(\Delta\omega_1 t - \Delta k_1 z)} + A_2 e^{-i(\Delta\omega_2 t - \Delta k_2 z)} \quad (3.3-10)$$

由于  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  远小于  $\omega_0$ , 所以  $\Delta\omega_1 = \omega_1 - \omega_0$ ,  $\Delta\omega_2 = \omega_2 - \omega_0$  很小, 故  $A(z, t)$  随时间变化很慢。同样  $\Delta k_1 = k(\omega_1) - k_0$ ,  $\Delta k_2 = k(\omega_2) - k_0$  也很小,  $A(z, t)$  随空间变化也很慢。总之, 与因子  $e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)}$  相比,  $A(z, t)$  是一个缓慢变化的函数。所以合成波仍可近似看成频率为  $\omega_0$  的单色波, 但其“振幅因子”在缓慢变化。从图 3.3-1 可看出位相因子确定合成波的“细节(快速振荡线)”, 而振幅因子决定合成波的轮廓(波形包络线)。

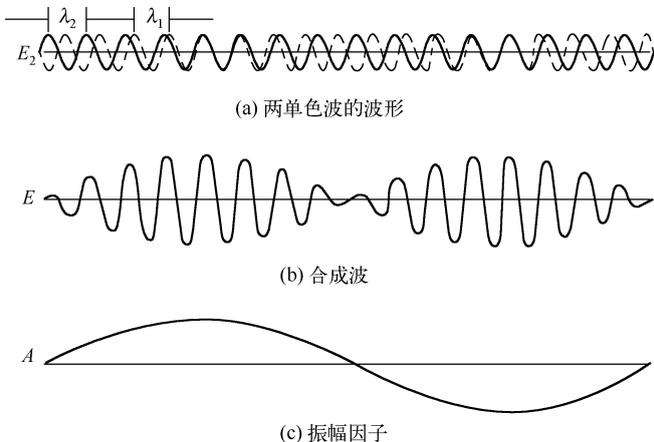


图 3.3-1 两频率相近的单色波的叠加

将函数  $k(\omega)$  在  $\omega_0$  附近展开,得到

$$\Delta k_1 = k(\omega_1) - k_0 = k'(\omega_0) \Delta\omega_1 + \frac{1}{2}k''(\omega_0) \Delta\omega_1^2 + \dots$$

$$\Delta k_2 = k(\omega_2) - k_0 = k'(\omega_0) \Delta\omega_2 + \frac{1}{2}k''(\omega_0) \Delta\omega_2^2 + \dots$$

如果我们只保留一次项,代入式(3.3-10)得

$$A(z, t) = A_1 e^{-i\Delta\omega_1(t - k'(\omega_0)z)} + A_2 e^{-i\Delta\omega_2(t - k'(\omega_0)z)} \quad (3.3-11)$$

容易看出  $A(z, t)$  只是  $t - k'(\omega_0)z$  的函数。如果时间经过  $dt$ , 只要坐标改变  $dz = \frac{1}{k'(\omega_0)} dt$ , 函数数值就保持不变。这就是说函数图形以速度  $v = 1/k'(\omega_0)$  传播, 而其形状保持不变。

### 3. 波包及其群速(度)

对多个频率的单色波的叠加, 可做类似的讨论。设  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_z, \dots$  都十分接近  $\omega_0$ , 则合成波

$$\Psi = \sum_j \Psi_j = A(z, t) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)}$$

而 
$$A(z, t) = \sum_j A_j e^{-i\Delta\omega_j(t - k'(\omega_0)z)} \quad (3.3-12)$$

所以在有限时间  $\Delta t \sim \frac{1}{\Delta\omega}$ , 和有限范围  $\Delta z \sim \frac{1}{\Delta k}$  内, 合成波仍

近似看成单色波。这种情况就是通常所说的波群或波包, 如图 3.3-2 所示。

如果波包中有连续的频谱成分, 则式(3.3-12)的求和应改成积分。

$$A(z, t) = \int A(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)(t - k'(\omega_0)z)} d\omega \quad (3.3-13)$$

考虑窄带情况, 即  $A(\omega)$  只在  $\omega_0$  附近  $\Delta\omega$  范围内不为零, 积分实际上只需在此区域进行。特别地,  $A(\omega)$  在  $\omega_0$  内为常数, 则  $A(\omega)$  写成

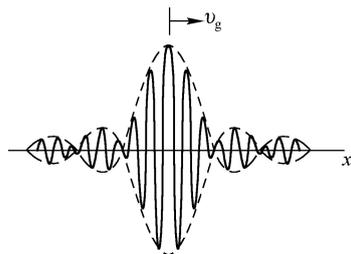


图 3.3-2 波包及其群速度

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0, & |\omega - \omega_0| \leq \frac{1}{2}\Delta\omega \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \frac{1}{2}\Delta\omega \end{cases}$$

所以 
$$A(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} A_0 e^{-i(\omega - \omega_0)(t - k'(\omega_0)z)} d\omega = A_0 \Delta\omega \frac{\sin\varphi}{\varphi} \quad (3.3-14)$$

式中 
$$\varphi = \frac{\Delta\omega}{2} (t - k'(\omega_0)z)$$

振幅  $A(z, t)$  取决于  $\varphi$  值。当  $\varphi$  的绝对值  $|\varphi|$  从零不断增大时,  $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$  经过一系列的极大和极小值, 且极大和极小的值随  $|\varphi|$  的增大而减小, 所以, 这时波形基本上集中在空间的一定范围内, 即在  $\varphi = 0$  附近。

概括起来, 包含多种相近频率成分的波群具有下列特点:

(1) 合成波仍可近似看成单色波。其位相由因子  $e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)}$  决定, 故相速度  $v_p = \omega_0/k_0$ 。而其振幅不再是稳定的分布, 是随时间缓慢变化的。

(2) 振幅因子  $A(z, t)$  构成波形的包络线, 包络线广延的范围与带宽有关,  $\Delta\omega$  越小则广延范围越宽。

(3) 包络线的移动速度为

$$v_g = \frac{1}{k'(\omega_0)} = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.3-15)$$

此值称为群速度, 它决定于介质的色散性质, 以及中心频率的值, 而与合成波所包含的频率成分及其相对强度无关。

(4) 如果介质是非色散的, 或者对  $k(\omega)$  展开时只需保留一次项, 则波包在移动过程中形状不变。如果在  $k(\omega)$  的展开式中需要考虑高次项, 则波包在运动时形状会发生变化。

因相速度  $v_p = \omega/k$ , 故群速度与相速度有下面关系

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_p k) = v_p + k \frac{dv_p}{dk} = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} \quad (3.3-16)$$

严格说来, 相速度只对单色波才有明确的意义。一个单色波信号必须无始无终地持续在无限长的时间范围内(由  $t = -\infty$  到  $t = \infty$ ), 要形成这种信号, 信号源必须在很早以前的某一时刻上(理论上  $t = -\infty$ ) 就已接通。换言之, 这种信号是一种稳态信号, 在我们进行观察时, 信号已完全建立起来了。因此, 相速度与实际信号速度并无直接联系, 它只是表示等相位点的位置随时间的变化情况。

群速度也只是对窄带信号才有明确意义, 当带宽  $\Delta\omega$  增大时, 一方面不能出现一个简单的波包, 另一方面由于色散作用, 波形还要随着信号的向前传播而发生剧烈的变化。尤其是在反常色散区, 折射率随频率变化非常快, 而且伴随着强烈吸收, 这时实际上群速度失去了意义。

总之, 对于真空中或非色散介质中, 相速度、群速度、能速(指能量传播速度)都相等, 统称为波速; 正常色散时群速度等于能速, 但一般不等于相速度。

### \* 3.4 介质色散

所谓色散, 就是光在介质中传播时其折射率(或速度)随频率(或波长)的变化而变化的现

象。介质的折射率取决于介电常数,所以色散与介质的不同极化有关。

介质的极化是由于原子或分子内部的正、负电中心发生位移,形成微观偶极矩(下称分子偶极矩),并沿外电场方向有序排列的结果。由于原子核的质量比电子大得多,通常原子核可以认为是不动的,所以电场对分子体系的作用,主要表现在对电子的作用。电子除受外电场作用外,还有分子内部的作用。设电子云中心(负电中心)相对原子核(正电中心)有一位移 $\mathbf{r}$ ,如果认为电子受内部作用力为准弹性力,则此力可写为 $-\kappa\mathbf{r}$ ( $\kappa$ 为常数)。当光入射到介质时,电子受光波电场的作用,做受迫振动,电场力为 $-e\mathbf{E}$ , $-e$ 为电子电量, $\mathbf{E}$ 为电场强度。由于光波波波长通常比原子半径大得多,所以在原子线度范围内电场变化很小,可将电场写成

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$\mathbf{E}_0$ 为常矢量。于是电子的振动方程为

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \kappa \mathbf{r} = -e \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\text{即} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.4-1)$$

式中, $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$ 称共振频率。方程稳态解形式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.4-2)$$

$$\text{代入式(3.4-1)得} \quad (-\omega^2 + \omega_0^2) \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} = -\frac{e \mathbf{E}_0}{m} e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \quad (3.4-3)$$

因此,每个电子对偶极矩的贡献为

$$\mathbf{p} = -e \mathbf{r} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{E} \quad (3.4-4)$$

$$\text{或写成} \quad \mathbf{p} = \chi_1 \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.4-5)$$

$\chi_1$ 称为微观极化率或分子极化率

$$\chi_1 = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.4-6)$$

若假设一个分子内只有一个有效电子,单位体积内的分子数为 $N$ ,则极化强度为

$$\mathbf{P} = N \mathbf{p} = N \chi_1 \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\text{所以介质极化率为} \quad \chi_e = N \chi_1 \quad (3.4-7)$$

对于非铁磁性介质, $\mu_r \approx 1$ ,按式(3.3-4)得

$$n^2 = \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\text{即} \quad n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.4-8)$$

这就说明了折射率随入射光的频率而变。对于 $\omega < \omega_0$ 的情况, $\omega$ 增大则 $n$ 增大,当 $\omega$ 接近 $\omega_0$ 时即发生共振。当 $\omega > \omega_0$ 时, $n < 1$ ,这时介质中的相速度大于真空光速(折射率定义为真空光速与相速度之比),并随 $\omega$ 的增大而趋近于1。

实际上,当 $\omega \rightarrow \omega_0$ 时,折射率不会像式(3.4-8)那样趋向无穷,这是因为电子在振动时,不可避免地存在阻尼力。另一方面,电子做加速运动时会辐射电磁波,因而它本身的能量必然逐渐减少。另外,由于原子之间的碰撞也可造成能量的损耗,这两种作用使电子的运动好像受到

了阻力,这就是阻尼力。通常阻尼力很小,可以把它看成力学中的摩擦力,大小与速度成正比,可写为  $-\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 。因此,电子振动方程,即(3.4-1)应改写成

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{r} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.4-9)$$

稳态解为 
$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E} \quad (3.4-10)$$

所以介电常数为 
$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \quad (3.4-11)$$

介电常数  $\varepsilon$  为复数,相应的波矢

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon'\mu_0} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'/\varepsilon_0} \quad (3.4-12)$$

也为复数。若光沿  $z$  方向传播,则可设

$$\mathbf{k} = (\beta + i\alpha) \mathbf{e}_z \quad (3.4-13)$$

光波电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-i(\omega t - \beta z)}$$

相速度 
$$v_p = \omega/\beta \quad (3.4-14)$$

若令 
$$n' = \sqrt{\varepsilon'/\varepsilon_0} = n_1 + in_2 \quad (3.4-15)$$

称为复折射率,  $n_1$  和  $n_2$  分别是其实部和虚部,结合式(3.4-12)和式(3.4-13),知

$$\beta = \frac{\omega}{c} n_1, \quad \alpha = \frac{\omega}{c} n_2 \quad (3.4-16)$$

另外,按折射率定义并注意式(3.4-14)

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{c}{\omega} \beta = n_1$$

所以复折射率的实部,即通常意义下的折射率由式(3.4-15)

和式(3.4-11)不难得出

$$n_1^2 - n_2^2 = 1 + \frac{Ne^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{\varepsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]} \quad (3.4-17)$$

$$2n_1 n_2 = \frac{Ne^2 \gamma \omega}{\varepsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]} \quad (3.4-18)$$

从上面两式可以解出  $n_1$  和  $n_2$ 。  $n_2$  正比于  $\alpha$ , 它可表征光衰减的快慢,  $n_2$  越大则衰减越快,即  $n_2$  正比于吸收系数。图 3.4-1

所示为共振频率附近的色散曲线和吸收曲线。可以看出,除了在  $\omega_0$  附近一很窄的范围(曲线  $ab$  段)以外,其他地方折射率都随频率增大而增大,这称为正常色散。而在曲线  $ab$  段,折射率随频率增大而减小,称为反常色散,在反常色散区,吸收都很强,在  $\omega_0$  处,吸收最强。

以上讨论中,我们假定电子的振动只有一个固有频率  $\omega_0$ 。实际上电子可以有若干个不同的固有频率  $\omega_1, \omega_2, \dots$  假设以这些固有频率振动的几率分别为  $f_1, f_2, \dots$ , 则式(3.4-11)应改写为

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega)} \quad (3.4-19)$$

这时的折射率与频率(或波长)的关系如图 3.4-2 所示,在每一个  $\omega = \omega_j$  附近,对应有一个吸收带和反常吸收区。在这些区域外,是正常色散区。

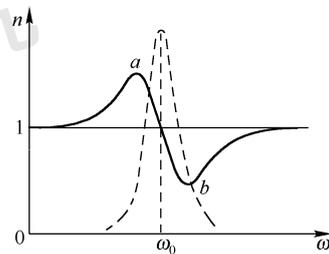


图 3.4-1 共振频率附近的色散曲线和吸收曲线

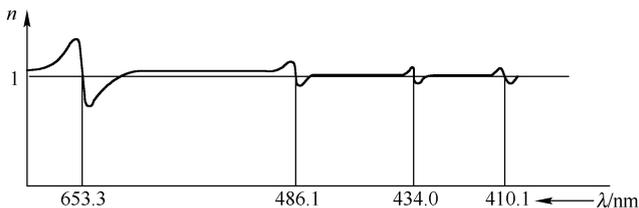


图 3.4-2 氢在可见光区的色散曲线

上述结论对稀薄气体介质符合较好,对于固体、液体或压缩气体,由于原子或分子之间的距离很近,周围分子在光场作用下极化所产生的影响不可忽略。洛伦兹证明了,这时作用在电子上的电场  $E'$  不简单地等于入射光场  $E$ ,它还与介质的极化强度  $P$  有关,即

$$E' = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (3.4-20)$$

如果在前面的计算中把  $E$  换成  $E'$ ,做类似推导,将得到适用于固体、液体和压缩气体的色散公式(略去了阻尼系数  $\gamma$ ,因而公式只适用于正常色散区)

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{1}{3}Ne^2} \quad (3.4-21)$$

上式又可化为

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.4-22)$$

此式称为洛伦兹 - 洛伦茨 (Lorentz-Lorenz) 公式。

### \* 3.5 电磁场的动量

#### 1. 电磁场的动量密度

电磁场不仅有能量也有动量,这是它的物质性的体现,带电体和电磁场之间的相互作用,不仅有能量交换也有动量交换。在交换过程中遵守两条基本守恒定律,即能量守恒定律和动量守恒定律。研究电磁场动量的方法和讨论它的能量的情况类似,即通过一个带电体系受电磁场的作用时,其动量发生变化,再由总体系(带电体系和电磁场)的动量守恒而求出电磁场的动量。

有一带电体在电磁场中运动,它所受的洛伦兹力密度为

$$f = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.5-1)$$

则带电体系的动量  $G$  变化率为

$$\frac{dG}{dt} = \int_V f d\tau = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) d\tau \quad (3.5-2)$$

式中,  $V$  为带电体系的体积,也可以是所研究空间的体积。

通过麦克斯韦方程将式(3.5-2)中的  $\rho$  和  $\mathbf{j}$  用电磁场量表示,当体积  $V$  变为无穷大空间时,可以证明

$$\frac{dG}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\infty} (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV \quad (3.5-3)$$

令

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (3.5-4)$$

式中,  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  为能流密度。于是式(3.5-3)变为