引　　言

“高等数学”课程中所研究的一元函数是两个实变量之间的依赖关系.随着数学理论的发展和生产技术的提高,又需要研究两个复变量之间的依赖关系——一元复变函数,它是本书研究的主要对象,也简称为复变函数.

同一元实变函数类似,复变函数中也主要介绍函数的概念、极限、微分、积分和幂级数等内容.其中许多概念与公式是实变函数在复数域内的推广,与实变函数是相似的;可是实变函数也有个别性质不能推广到复数域中,即对复变函数不成立.另外,随着函数定义域与值域的扩大,必然会引出许多新的概念和公式.因此在学习中要善于思考与比较,注意其不同点和共同点,抓住本质,掌握其研究方法.

复变函数理论与方法在数学物理方程、积分变换、物理学、流体力学、电磁学等课程中或工程技术中有广泛的应用.它是学习自动控制、电子工程、信息工程与机电工程等专业课的理论基础,其理论的建立与公式的推导为有关领域的科学技术研究提供了新的方法和途径.

第 1 章　复数和复变函数及其极限

本章主要介绍复数及其基本运算，复平面上的曲线和区域，以及复变函数的极限及其连续性.

1.1　复数及其运算

1.1.1　复数的概念及其表示法

复数在实际中有广泛的应用，如电路分析中复电流和复电压都是用复数表示的. 另外，为了进行开方运算也需要引入复数，如$\sqrt{-1}=\pm \mathrm{i}$，其中 i 称为虚数单位，满足 $\mathrm{i}^2=-1$.

众所周知，任意一个复数 z 可以利用虚数单位 i 来表示. 即

设 x 和 y 为任意实数，则称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数. 其中 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**(real part)和**虚部**(imaginary part)，分别记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z). \tag{1-1-1}$$

又记 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，称它为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**共轭复数**. 如复数 $z=1+2\mathrm{i}$，其共轭复数为 $\bar{z}=1-2\mathrm{i}$，且有 $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\bar{z})=1$，$\mathrm{Im}(\bar{z})=-\mathrm{Im}(z)=-2$.

当 $x=0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 为**纯虚数**；当 $y=0$ 时，有 $z=x+\mathrm{i}0$ 为实数 x，简记为 $z=x$，于是复数是实数概念的推广.

由于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数(x,y)所唯一确定，它与 xOy 平面上的点(x,y)是一一对应的，也与坐标原点到点(x,y)的向量是一一对应的，因此在平面上可用上述点和向量来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$(图 1-1)，并且在几何上称该复数 z 为**点 z** 或**向量 z**，称表示复数的

xOy 平面为**复平面**，当复平面上的点记为 $z=x+\mathrm{i}y$ 时，又简称该复平面为 **z 平面**. 其中 x 轴上的点表示的是实数，称 x 轴为**实轴**；y 轴上的点表示的是纯虚数，称 y 轴为**虚轴**. 显然当 $z=0$ 时，它为零向量；当 $y\neq0$时，点 $\bar{z}$ 和 z 关于实轴对称.

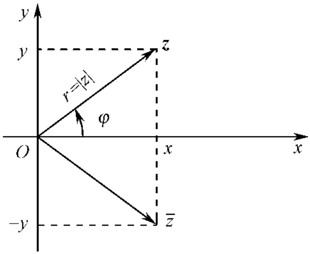

图 1-1

另外，称复向量 z 的模 r 为复数 z 的**模**或**绝对值**记为 $|z|=r$；并且当 $z\neq0$ 时，我们**把以正实轴为始边，以复向量 z 为终边的转动角看作向量 z 与正实轴的夹角 φ**，称为复数 z 的**辐角**(argument)，记为$\mathrm{Arg}(z)=\varphi$[①]，于是有

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi, \tag{1-1-2}$$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad |z|^2=z\bar{z}. \tag{1-1-2a}$$

注意　$z=0$ 的辐角不确定，$\mathrm{Arg}(0)$无意义. 当 $z\neq0$ 时，由于其辐角 φ 增加 2π 的整数倍、其终边不变，因此 $\mathrm{Arg}(z)$**是多值的**. 可是满足条件$-\pi<\mathrm{Arg}(z)\leqslant\pi$ 的辐角值是唯一的，称该值为其**辐角的主值**，记为 $\arg(z)$. 于是有

$$-\pi<\arg(z)\leqslant\pi \tag{1-1-3}$$

$$\mathrm{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1-1-3a}$$

并且当 $z=x+\mathrm{i}y\neq0$ 时有

$$\arg(z)=\begin{cases}\arccos(x/|z|), & y\geqslant0;\\ -\arccos(x/|z|), & y<0.\end{cases} \tag{1-1-3b}$$

① 这里的辐角函数 Arg(·)首字母大写表示多值辐角，其小写表示辐角的主值分支.

又当 $\mathrm{Re}(z)=x>0$ 时有

$$\arg(z) = \operatorname{arctg}(y/x) \tag{1-1-3c}$$

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 是复数的**代数表达式**. 当 $z\neq0$ 时,由式(1-1-2)和 Euler 公式:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$,可分别写出其**三角式**和**指数式**,即

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \quad z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1-1-4}$$

其中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ 的模为 1,称它为**单位复数**.

【例 1-1】 计算 $z=1-\mathrm{i}$ 的模和辐角及其三角式.

解 显然 $|z|=\sqrt{2}$ 且 $\arg(z)=-\pi/4$,于是由式(1-1-3a)得

$$\mathrm{Arg}(z) = -\pi/4 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

其三角式为

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{4}\right).$$

两个复数相等的概念是非常重要的,我们定义为:

定义 设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k\,(k=1,2)$. 若 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$,则称 $z_1=z_2$. 可表示为

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad 且 \quad y_1 = y_2. \tag{1-1-5}$$

显然有

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \tag{1-1-5a}$$

$$z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| 且 \arg(z_1) = \arg(z_2) \tag{1-1-5b}$$

注意 两个不都是实数的复数不能比较其大小. 记号“$\Leftrightarrow$”是“等价于”之意,今后不再重述.

1.1.2$^{\triangle}$ 复数的代数运算

1. 复数的四则运算

复数的四则运算定义可叙述为:

设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k\,(k=1,2)$,则定义

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$z_1/z_2 = (z_1\bar{z}_2)/|z_2|^2 (z_2 \neq 0).$$

另外,复数可以看作是复向量,当 $z_1 \neq 0$ 且 $z_2 \neq 0$ 又二者不平行时,在复平面上,其和与差可以按照平行四边形法则,或三角形法则来表示.即:

复向量 z_1+z_2 是以复向量 z_1 和 z_2 为邻边的平行四边形的对角线向量,它的起点为 $z=0$,**其终点 z_1+z_2 可以看作将点 z_1 沿向量 z_2 的方向平移 $|z_2|$ 的距离所得到的点**[见图 1-2 中(a)].

复向量 z_2-z_1 是从点 z_1 到 z_2 的向量,$|z_1-z_2|$ 为点 z_1 与 z_2 之间的距离[见图 1-2 中(b)].

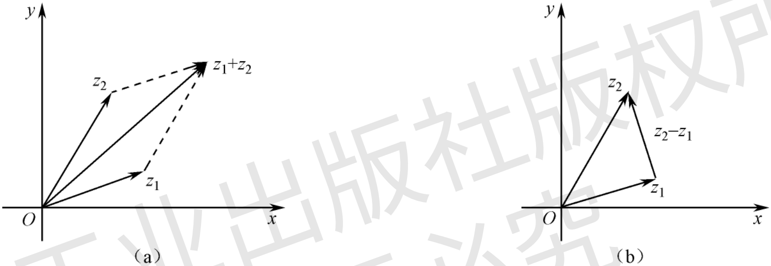

图 1-2

由图 1-2 可以看出,对任意复数 z_1 和 z_2 有

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \quad ||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2| \tag{1-1-6}$$

对于非零复数 $z_k = r_k(\cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k)(k=1,2)$,利用三角函数的和、差角公式,读者自己可以验证 z_1z_2 和 z_1/z_2 的三角式分别为

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

$$z_1/z_2 = (r_1/r_2)[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

并且对 $z_1=z_2=z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ 和任意自然数 n 有

$$z^n = r^n[\cos(n\varphi)+\mathrm{i}\sin(n\varphi)]$$

由此可以看出,对于非零复数有

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2), \tag{1-1-7}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 / z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2), \tag{1-1-7a}$$

$$\mathrm{Arg}(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

对 $z=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$,计算 z^n 可得 De Moivre 公式：

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi) \tag{1-1-8}$$

其中 $n=1,2,3\cdots$.

注意 式(1-1-7)和式(1-1-7a)两边是多值的,它们成立是指等式两边辐角值的集合相等,其中右端辐角的和(差)运算是指 $\mathrm{Arg}(z_1)$的每个值可以加上(减去)$\mathrm{Arg}(z_2)$的任意一个值. 另外,由于两个主值辐角的和或差可能超出主值的范围,因此这两个等式对于辐角的主值而言,不一定成立.

2. 复数的 n 次方根

设有非零复数 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,若存在复数 w 使 $z=w^n$,则称 w 为复数 z 的 n 次方根,记为 $w=\sqrt[n]{z}=z^{1/n}$.

为了求出其方根 w,可设 $w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 于是由定义得

$$(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

它等价于 $\rho^n=r$,且 $n\theta=\varphi+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,即

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = (\varphi + 2k\pi)/n.$$

所求方根可表示为

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{1-1-9}$$

其中 $k=0,1,\cdots,n-1$. 显然 $w_{k+n}=w_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,$w_k$ 只有 n 个不同的值. 由此可以看出：

非零复数 z 的 n 次方根只有 n 个不同值,它们均匀分布在以坐标原点为中心,以 $\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆周上,它们是该圆周的内接正 n 边形的 n 个顶点.

【例 1-2】 计算$(-1+\mathrm{i})^{10}$.

解　由三角式$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$得

$$(-1+\mathrm{i})^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{30\pi}{4}+i\sin\frac{30\pi}{4}\right)$$

$$=32\left(\cos\frac{-\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{2}\right)=-32\mathrm{i}.$$

【例 1-3】　求 $\sqrt[4]{-4}$的 4 个根.

解　由三角式$-4=4(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$,利用求 n 次方根公式(1-1-9)得

$$w_k=\sqrt[4]{-4}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n+2k\pi}{4}\right),$$

取 $k=0,1,2$ 和 3,可得其 4 个根为

$$w_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+\mathrm{i},$$

$$w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-1+\mathrm{i},$$

$$w_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-1-\mathrm{i},$$

$$w_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)=1-\mathrm{i}.$$

1.1.3* 扩充复平面与复球面

为了建立扩充复平面的概念,需要引入复数的另一种几何表示,用球面上的点来表示复数.

作一个中心在点$(0,0,R)$与复平面相切于点 $z=0$ 的球面(图 1-3).其中点 N 和 S 分别称为该球面的**北极**和**南极**.

为了用该球面上的点来表示复数,需要建立复平面的点 z 与该球面上点之间的一一对应关系.于是过点 N 和 z 作直线,它与该球面的另一个交点是唯一的,记为 P.这样就建立了复平面上的有限点 z 与球面上点 $P(P\neq N)$的一一对应.另外,当点 z 在复平面上沿任何方向趋

向无穷远时,即$|z|\to\infty$,对应球面上的点 P 都趋向北极点 N,因此为了使点 N 对应复平面上的唯一一个点,应当**把复平面的各个方向上趋向无穷远的极限点看作一个点.且称这个点为复平面上的无穷远点**,记它和它所对应的复数为∞.显然复数∞的模为$+\infty$,其辐角是不确定的,即无意义.在数学上,**称包含点∞的复平面为扩充复平面**;又称不包含点∞的复平面为有限复平面,或简称为复平面.今后无特殊声明,复平面都指有限复平面,复数 z 都指有限复数.

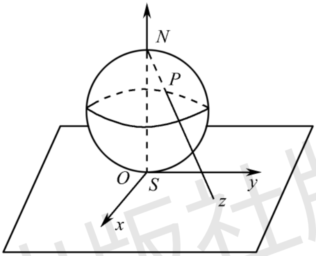

图 1-3

以上我们建立了扩充复平面上的点与球面上点的一一对应关系,不仅可以用球面上的 $P(P\neq N)$来表示它所对应的任一个有限复数 z,而且扩充复平面的无穷远点所对应的复数∞也可用球面的北极点 N 明显地表示了出来.称上述球面为**复球面**或 Riemann 球面.

另外不难看出,作为有限复数 z 的极限复数∞,对应点 $z\to\infty$的方向是任意的,它与有限复数 a 的四则运算应当作如下规定:

(1) 对 $a\neq0$ 有 $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty\cdot\infty=\infty$,

(2) $a/\infty=0,\infty/a=\infty$,

(3) $a\pm\infty=\infty\pm a=\infty$,

(4) $\infty\pm\infty,0\cdot\infty,\infty/\infty$都无意义.

习 题 1.1

1△. 求 $\arg(1-\mathrm{i})$和 $\operatorname{Arg}(1-\sqrt{3}\mathrm{i})$.

2. 计算下列各式的值.

(1) $\sqrt[3]{-8}$，　(2) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$，　(3) $\sqrt[4]{-1}$，　(4) $\sqrt{1+\mathrm{i}}\frac{1}{16}$.

3△. 下列等式在什么条件下成立？

(1) $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$，

(2) $\arg(z_1/z_2)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$，

(3) $\arg(z^n)=n\arg(z)(n=2,3,\cdots)$，

(4) $\arg(1/z)=-\arg(z)$.

4△. 试写出 $\mathrm{Arg}(\mathrm{i}^2)$ 和 $2\mathrm{Arg}(\mathrm{i})$ 的所有值，并且说明多值等式 $\mathrm{Arg}(z^2)=2\mathrm{Arg}(z)$ 是否成立.

5△. 指出下面等式有什么错误，其中 $z\neq0$.

$2k\pi=\mathrm{Arg}(1)=\mathrm{Arg}(z/z)=\mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(z)=0.$

6. 写出下列复数的三角式和指数式.

(1) $1+\mathrm{i}$，　(2) i，　(3) -2，　(4) $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

7. 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，求证：

$z^n+z^{-n}=2\cos n\theta$，$z^n-z^{-n}=\mathrm{i}2\sin n\theta$，其中 $n=1,2,\cdots$.

8△. 设 $z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)(k=1,2)$，$n$ 为自然数. 求证：

$(z_1z_2)^n=z_1^nz_2^n$，$(z_1/z_2)^n=z_1^n/z_2^n$.

9. 设 n 为自然数且 $x_n+\mathrm{i}y_n=(1+i\sqrt{3})^n$.

求证：$x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=4^{n-1}\sqrt{3}$.

10. 设 $(3+6\mathrm{i})x+(5-9\mathrm{i})y=6-7\mathrm{i}$.

求其中实数 x 和 y.

11. 解方程：$z^2-3\mathrm{i}z-(3-\mathrm{i})=0$.

12. 设 $z=0$ 为正 n 边形的中心，其中一个顶点为 $z_0\neq0$. 求证其他 $n-1$ 个顶点可表示为

$$z_k=z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}(k=1,2,\cdots n-1).$$

13. 求证：若点 z_1、z_2 和 z_3 满足条件

$$z_1+z_2+z_3=0\text{ 且 }|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,$$

则该三个点是内接于圆周$|z|=1$的正三角形顶点.

习题 1.1 答案

1. $-\pi/4,(-\pi/3)+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

2. (1) $1+\mathrm{i}\sqrt{3},-2,1-\mathrm{i}\sqrt{3}$;

(2) $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2},\dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2},-\mathrm{i}$;

(3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}(1\pm\mathrm{i}),\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm\mathrm{i})$;

(4) $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

3. 只要其等号右边的计算结果不超出辐角主值的范围,所给等式都成立.

4. $\mathrm{Arg}(\mathrm{i}^2)=\pi+2k\pi,2\mathrm{Arg}(\mathrm{i})=\pi+4k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,式$\mathrm{Arg}(z^2)$和$2\mathrm{Arg}(z)$所表示的实数集合不同.

5. $$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(z)&=[\arg(z)+2k_1\pi]-[\arg(z)+2k_2\pi]\\&=2(k_1-k_2)\pi.\end{aligned}$$

6. (1) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$,

(2) $\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$,

(3) $2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$,

(4) $2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\pi-\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi-\theta}{2}\right)=2\sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-\theta}{2}}$.

10. $x=1/3,y=1$.

11. $z_1=-1+2\mathrm{i},z_2=1+\mathrm{i}$.

13. 提示:设$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}(k=1,2,3)$,可证$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=\dfrac{1}{2}(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)=$

$\cos(\theta_1-\theta_2)=-\dfrac{1}{2}$.

1.2　复平面上曲线和区域

1.2.1△　复平面上曲线方程的各种表示

平面曲线方程有直角坐标方程和参数方程两种形式. 复平面上的曲线方程也可写成相应的两种形式.

1. 曲线直角方程的复数形式

由关系式 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ 和 $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$ 可知，曲线 C 的方程 $F(x,y)=0$，可写成复数形式

$$F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)=0 \text{ 或 } F(\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z))=0 \tag{1-2-1}$$

例如，$\mathrm{Re}(z)=0$ 表示虚轴，$\mathrm{Im}(z)=0$ 表示实轴，方程 $\mathrm{Im}(z)=1$ 和 $z-\bar{z}=2\mathrm{i}$ 都表示直线 $y=1$. 又如圆周 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 可以表示为

$$|z-z_0|=R \tag{1-2-1a}$$

其中 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为圆心，$|z-z_0|$ 为动点 z 到定点 z_0 的距离. 由此可以看出，用复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示曲线上的动点，可以直接写出其轨迹方程. 例如：

动点到定点 z_1 和 z_2 的距离之和为常数 $2a$ 的轨迹为椭圆($|z_1-z_2|<2a$)，其方程为

$$|z-z_2|+|z-z_1|=2a;$$

到点 z_1 和 z_2 等距离的动点轨迹为连接这两点线段的垂直平分线，其方程为 $|z-z_1|=|z-z_2|$.

2. 曲线参数方程的复数形式

设 $z=x+\mathrm{i}y$，$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，则由两个复数相等的定义得

曲线 C 的参数方程：$x=x(t)$ 且 $y=y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，等价于其复数形式

$$z = x(t) + \mathrm{i}y(t) \text{ 或 } z = z(t)(\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \tag{1-2-2}$$

【例 1-4】 指出下列方程表示什么曲线.

(1) $z=(1+i)t+z_0(-\infty<t<\infty)$,

(2) $z=(1+i)t+z_0(t>0)$.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y, z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,则有 $z=(1+\mathrm{i})t+z_0 \Leftrightarrow x=x_0+t$ 且 $y=y_0+t$,因此方程(1)表示过点 z_0 其方向平行于复向量 $1+\mathrm{i}$ 的直线.

同样方程(2)只是(1)中直线的半直线,由于点 z 满足 $\arg(z-z_0)=\arg[(1+\mathrm{i})t]=\dfrac{\pi}{4}(t>0)$,因此它是从点 z_0 出发倾角为 $\arg(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$的射线(不包含点 z_0,见图 1-4). 显然其方程可简写为 $\arg(z-z_0)=\pi/4$.

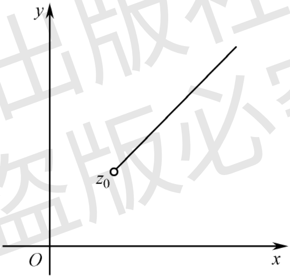

图 1-4

另外,从几何轨迹的观点来看,对任意复常数 a 和 b,动点 $z=at+b$ 是从点 b 沿复向量 at 的方向平移了距离 $|at|$,其动点总位于过点 b 平行于复向量 at 的直线上($a\neq 0$),该直线方程为

$$z = at + b(-\infty < t < \infty) \tag{1-2-2a}$$

对于圆周的参数方程 $x=x_0+R\cos t, y=y_0+R\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,令 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,其等价的复数形式,显然为

$$z = z_0 + R(\cos t + \mathrm{i}\sin t) \quad \text{或} \quad z = z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \tag{1-2-2b}$$

其中 $t\in[0,2\pi]$或 $t\in[-\pi,\pi]$.

1.2.2△ 连续曲线和简单曲线与光滑曲线

设曲线 C 为 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，若 $x(t)$和 $y(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，即 $z(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，则称曲线 C 为连续曲线. 另外当 $\alpha\leqslant t_1<t_2<\beta$时还总有 $z(t_1)\neq z(t_2)$，则该连续曲线在图形上无重点，称它为**简单曲线**或 Jordan 曲线；若其方程还满足 $z(\alpha)=z(\beta)$，则称它为**简单闭曲线**或**简单闭路**. 如一般圆周或多边形的边界都是简单闭曲线.

所谓曲线(1-2-2)是光滑的，在图形上是指它各点处具有连续变动的切线，即**切向量** $z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，又因当 $z'(t)=0$ 时其切向量的方向不确定、无切线，所以其定义如下。

定义 1 若曲线 C 为 $z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，其中 $z'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续且 $z'(t)\neq 0$，则称曲线 C 为**光滑曲线**，由有限条光滑曲线所连接成的一条曲线称为**逐段光滑曲线**.

显然直线、圆周等都是光滑曲线，而折线和多边形边界都是逐段光滑曲线.

1.2.3 平面点集与区域

1. 复平面点集的几个基本概念

若 z_0 为定点，δ 为某个正常数，则称复平面上一切满足$|z-z_0|<\delta$的点集为点 z_0 的一个 δ-**邻域**，记为 $N_\delta(z_0)$；并称满足不等式$0<|z-z_0|<\delta$的点集为 z_0 的一个**去心邻域**.

设 E 为复平面上的点集，若 $z_0\in E$ 且存在 z_0 的一个邻域 $N_\delta(z_0)\subset E$，则称 z_0 为 E 的**内点**.

若 z_0 的任意一个邻域内都有 E 的点也有不属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的**边界点**. E 的所有边界点所组成的集合称为 E 的**边界**，记为 $B(E)$.

若集合 E 的每个点都是它的内点，则称集合 E 为**开集**.

2. 区域

在复平面上所谓“区域”仅指连通的开集，于是有如下定义。

定义 2　复平面上具有下列性质的非空点集 D 称为**区域**(图 1-5)：

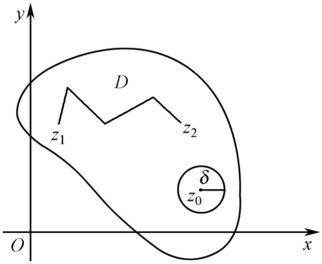

图 1-5

(1) D 是开集；

(2) D 是连通的，就是指 D 中任意两点都可以用一条全属于 D 的折线连接起来.

区域 D 与其边界点集的并集构成闭区域，简称为**闭域**，记为 $\overline{D}=D\cup B(D)$.

另外，若存在一个圆域 G 为 $|z|<R$ 使集合 $E\subset G$，则称 E 是**有界**的，否则称它是无界的，复平面上有界的区域和无界的区域分别简称为**有界域**和**无界域**.

注意　区域不包含任何它的边界点，闭区域不是区域，而**闭区域也不一定有界**.

例如，圆盘 $|z-z_0|<R$ 是区域且是有界的，其边界为 $|z-z_0|=R$；而 $|z-z_0|\leqslant R$ 只是闭区域，不是区域，又如半平面 $\mathrm{Re}(z)\geqslant 1$，它包含其边界直线 $x=\mathrm{Re}(z)=1$，它是无界闭区域而不是区域.

为了认识由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所表示的复数点集，可先将不等号改写成等号求出其边界，再分析其不等式所给出的图形.

例如，点集 $-3\pi/4<\arg(z)<\pi/4$，其边界是由点 $z=0$ 和射线 $\arg(z)=-3\pi/4$，以及射线 $\arg(z)=\pi/4$ 所连成，它是区域，且是始边为 $\arg(z)=-3\pi/4$、顶点为 $z=0$、张角为 π 的角形域，也是由不等式 $\mathrm{Im}(z)<\mathrm{Re}(z)$所给出的半平面区域.

3. 单连域和多连域

简单闭曲线有一个明显的特征，它把整个复平面分成没有公共点的两个区域，一个是有界域称为它的**内部**，另一个是无界域称为它的**外部**，它们都以该曲线为边界，而不包含该曲线上的点. 下面介绍单连域和多连域的概念.

定义 3　若区域 D 内的任意一条简单闭曲线的内部完全属于 D，则称 D 为单连通区域，简称为**单连域**，否则称它为**多连域**①.

任一条简单闭曲线的内部、整个复平面、半个复平面 $\mathrm{Im}(z)>a$ 或 $\mathrm{Re}(z)>b$ 等都是单连域；并且除去原点和负实轴的复平面区域

$$-\pi<\arg(z)<\pi$$

也是单连域(图 1-6).

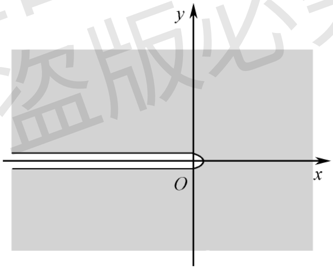

图 1-6

任意一条简单闭曲线的外部，任一个去心邻域或环形域都是多连域.

① 在扩充复平面上该定义有所不同(见本书 6.4 节).

当单连域和多连域再附加上其全部边界时，分别称它们为单连通闭域和多连通闭域. 如不等式 $|z-1|\leqslant|z+1|$ 表示虚轴及其右边的半平面 $\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$，它是单连通闭域.

习 题 1.2

1△. 试说明下列复平面上的点集都是实轴.

(1) $\mathrm{Im}(z)=0$， (2) $z-\bar{z}=0$，

(3) $|z-\alpha\mathrm{i}|=|z+\alpha\mathrm{i}|$（$\alpha$ 为非零实数）.

2△. 试说明下列复平面上点集都是虚轴.

(1) $\mathrm{Re}(z)=0$， (2) $z+\bar{z}=0$，

(3) $|z-\alpha-\beta\mathrm{i}|=|z+\alpha-\beta\mathrm{i}|$（$\alpha\neq 0$，$\beta$ 都为实数）.

3△. 试说明过两个不同点 z_1 和 z_2 的直线方程为 $z=z_1+(z_2-z_1)t$ 或 $z=z_2+(z_2-z_1)t$[其中参数 $t\in(-\infty,\infty)$].

4△. 试说明三个不同点 z_1、z_2 和 z_3 在一条直线上的充要条件是 $(z_2-z_1)/(z_3-z_1)$ 为实常数（不为零）.

5△. 试说明下列点集都是中心为点 z_0 半径为 R 的圆周.

(1) $|z-z_0|=R$， (2) $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=R^2$，

(3) $z=z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

6. 指出下列方程所表示的曲线，并作图.

(1) $|z+2|+|z-2|=6$， (2) $|z+2|-|z-2|=3$，

(3) $\mathrm{Im}(z+\mathrm{i}2)=2$， (4) $\arg(z-\mathrm{i})=\pi/4$，

(5) $\left|\dfrac{z}{z+1}\right|=\sqrt{2}$ $\left(\text{提示：}\dfrac{z\bar{z}}{(z+1)(\bar{z}+1)}=2\right)$.

7. 指出下列参数方程所表示的曲线，其中 $t\in(-\infty,\infty)$.

(1) $z=t+\mathrm{i}t^2$， (2) $z=t^2+\mathrm{i}t$，

(3) $z=t+\mathrm{i}t^3$， (4) $z=t+\mathrm{i}/t\ (t\neq 0)$.

8. 指出下列参数方程表示的曲线，其中 $t\in[0,2\pi]$.

（1）$z=a\cos t+ib\sin t(a\neq b$ 为正实数)，

（2）$z=r(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(r>0)$.

9. 指出下列点集的平面图形，是否是区域或闭区域.

（1）$|z|\leqslant|z-4|$，（2）$0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$ 且 $\mathrm{Re}(z)<3$，

（3）$|z+2|+|z-2|\leqslant 6$，

（4）$\left|\dfrac{z}{z+1}\right|<\sqrt{2}$（提示：用上面 6 题中结果）.

10. 作下列区域的图形，指出是否为单连域和有界域.

（1）$0<|z-1|<1$，（2）$1<|z-\mathrm{i}|<2$，

（3）$|z-1|>2$，（4）$\pi/4<\arg(z)<3\pi/4$，

（5）割去线段 $z=\mathrm{i}t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的复平面.

习题 1.2 答案

1. 点集方程都可化为 $y=0$.

2. 点集方程都可化为 $x=0$.

3. 该直线过点 z_1 和 z_2，方向向量为 z_2-z_1.

4. z_2 在过点 z_1 和 z_3 的直线上，满足该直线的参数方程 $z=z_1+(z_3-z_1)t(-\infty<t<\infty)$.

5. 其方程都可化为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

6.（1）椭圆周 $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\dfrac{y^2}{5}=1$，

（2）双曲线 $\dfrac{x^2}{9/4}-\dfrac{y^2}{7/4}=1$ 的右半支，

（3）实轴，（4）射线 $y=x+1(x>0)$，

（5）中心为 $z_0=-2$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周.

7.（1）$y=x^2$，（2）$x=y^2$，（3）$y=x^3$，

（4）双曲线 $xy=1$.

8. (1) 椭圆周 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$,

(2) 圆周 $|z|=\sqrt{2}r$ 即 $x^2+y^2=2r^2$.

9. (1) 闭区域 $x\leqslant 2$,不是区域;

(2) 顶点为 $z_1=1$、$z_2=3$ 和 $z_3=3+2\mathrm{i}$ 的三角形内部,是区域;

(3) 椭圆周$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的内部及其边界,是闭区域,不是区域;

(4) $|z+2|>\sqrt{2}$,是区域.

10. (1) 多连域, (2) 多连域, (3) 多连域,

(4) 单连域, (5) 多连域.

其中只有(1)和(2)为有界域,其他为无界域.

1.3 复变函数与整线性映射

1.3.1△ 复变函数的概念

复变函数的定义在形式上与一元实函数一样,只是其自变量和函数的取值推广到了复数.

定义 1 设 D 为一个非空复数集. 若对 D 的任意一个复数 z,按照某一法则有确定的一个(多个)复数 w 与之对应,则称在 D 上定义了一个单值(多值)复变函数,简称为**单值**(多值)**函数**,记为 $w=f(z)(z\in D)$. 其中 z 为自变量、w 为因变量、D 为该函数的**定义域**,D 的所有 z 对应的 w 值的集合 D^* 为它的**值域**.

今后无特殊声明,所谓复变函数都是指单值复变函数.

例如,复变函数 $w=z^2=(x+\mathrm{i}y)^2$,其定义域为整个复平面,其实部和虚部都是二元实函数,可分别记为 $u=x^2-y^2$,$v=2xy$.

一般而言,一个复变函数 $w=f(z)(z\in D)$,它的实部 u 和虚部 v 也都是 x 和 y 的二元函数,可分别表示为 $u=u(x,y)$和 $v=v(x,y)$,即

$$w=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\quad((x,y)\in D).\tag{1-3-1}$$

例如函数 $f(z)=x+\mathrm{i}$，其实部和虚部也可看作二元函数 $u(x,y)=x$，$v(x,y)=1$.

另外，当 $z\neq0$ 时，利用关系式 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，还可以将 $w=f(z)$ 写成

$$w=p(r,\varphi)+\mathrm{i}q(r,\varphi). \tag{1-3-1a}$$

其中 $p(r,\varphi)$ 和 $q(r,\varphi)$ 为变量 $r=|z|$、$\varphi=\arg(z)$ 的二元实函数.

1.3.2 复映射——复变函数的几何意义

一元和二元实函数(即自变量和因变量都为实变量)的几何表示分别是平面曲线和空间曲面，从它们的图形可以直观地看出其几何特征. 可是对于复变函数 $w=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其自变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 和因变量 $w=u+\mathrm{i}v$ 都是复数，不便于用一个平面或一个三维空间的点集来给出其几何图形；在几何上，需要把复变函数 $w=f(z)$ 看作两个复平上点集之间的对应关系. 即

分别记其自变量 z 和因变量 w 所在复平面为 z 平面和 w 平面，z 平面上 D 为其定义域，w 平面的 D^* 为其值域. 在几何上，$w=f(z)$ 直观地给出了 D 中点 z 到 D^* 中点 w 之间一个对应关系，称它为点集 D 到 D^* 的一个复**映射**或复**映照**. 其中 w 平面为 Z 平面的象平面，且称集合 D^* 和它的点 w 分别为 D 和 z 的**象**，而 z 和 D 分别为 w 和 D^* 的**原象**.

另外，当上述映射所给 D 中点 z 到 D^* 中点 w 之间的对应是一一对应时，称 $w=f(z)$ 为定义在 D 上的一个**单叶映射**或**单叶映照**，作为函数即**单叶函数**. 这时，对于 D^* 中的每一点 w，在 D 中有唯一的点 z 与之对应使 $w=f(z)$，从而定义了集合 D^* 上的一个函数 $z=\varphi(w)$，称它为函数 $w=f(z)$ 的**反函数**，在几何上称它为 $w=f(z)$ 的**逆映射**或**逆映照**. 若函数 $w=f(z)$ 在 D 上不是单叶的，则它的反函数是多值函数.

另外，同一元实函数的情形一样还可定义复合函数(或复合映射). 如 $w=\zeta^3$，$\zeta=1/(z-1)$ 的复合函数(或复合映射)为 $w=1/(z-1)^3$.

【例 1-5】 求下列曲线在映射 $w=1/z$ 下的象. 其中 $|\beta|^2=(B^2+$

$C^2)/4>AD$，A、B、C 和 D 为实数.

(1) $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$，

(2) $Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+D=0$.

解 曲线在 w 平面的象，一般也是曲线称为象曲线，可表示为 $F(u,v)=0$ 或 $F\left(\dfrac{1}{2}(w+\bar{w}),\dfrac{-\mathrm{i}}{2}(w-\bar{w})\right)=0$，其中 $u=\mathrm{Re}(w)$，$v=\mathrm{Im}(w)$. 求其象曲线，只需利用所给映射和 z 平面的曲线方程写出其在 w 平面的象曲线方程.

(1) 由于 $x+\mathrm{i}y=z=1/w=(u-\mathrm{i}v)/(u^2+v^2)$，因此

$$x=u/(u^2+v^2),\ y=-v/(u^2+v^2).$$

将其代入所给曲线方程中得

$$\frac{A}{u^2+v^2}+\frac{Bu-Cv}{u^2+v^2}+D=0,$$

化简可得所求象曲线为

$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0.$$

显然其象曲线及其原象只可能是圆周或直线，其中直线可看作半径为无穷大(曲率为零)的圆周，因此可以认为该映射具有把 z 平面上的圆周仍然映射为 w 平面上圆周的性质，并且简称这种性质为映射的**保圆性**①.

(2) 令 $\beta=\dfrac{1}{2}(B+\mathrm{i}C)$，$z=x+\mathrm{i}y$ 可以看出，所给曲线 $Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+D=0$ 为题(1)中的圆周或直线. 将 $z=1/w$ 代入本题所给曲线方程中，化简可得其象曲线方程的复数形式为

$$Dw\bar{w}+\beta w+\overline{\beta w}+A=0.$$

【例 1-6】 求下面曲线或区域在映射 $w=z^2$ 下的象.

(1) 半圆周 $z=re^{\mathrm{i}t}(0\leqslant t\leqslant\pi,r>0)$，

(2) 角形域 D：$\alpha<\arg(z)<\beta(-\pi/2\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi/2)$.

---

① 在扩充复平面上，直线可以看作是在点∞闭合的圆周.

解 (1) 将曲线方程 $z=re^{it}$ 代入映射 $w=z^2$ 中,即得其象曲线的参数方程为

$$w=r^2e^{i2t}\quad(0\leqslant t\leqslant\pi),$$

它是 w 平面上的圆周 $|w|=r^2$.

(2) 由于当 $-\pi/2\leqslant\alpha<\arg(z)<\beta\leqslant\pi/2$ 时有

$$\arg(w)=\arg(z^2)=2\arg(z)$$

因此映射 $w=z^2$ 将所给角形域 $\alpha<\arg(z)<\beta$ 映射为角形域 $2\alpha<\arg(w)<2\beta$(见图 1-7,其中 $\alpha<0$).

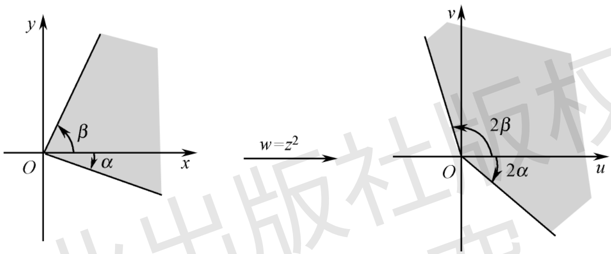

图 1-7

1.3.3 整线性映射及其保圆性

整线性映射是实际中经常用到的复映射,即线性映射

$$w=az+b\quad(a\text{ 和 }b\text{ 为复常数且 }a\neq0).$$

令 $a=|a|e^{i\alpha}$,该映射可分解为

$$w=\eta+b,\quad\eta=e^{i\alpha}\zeta,\quad\zeta=|a|z.$$

下面具体讨论这三个基本映射的作用及其保圆性.

1. 平移 $w=z+b$

由复向量的加法,对复平面上任一点 z,点 $w=z+b$ 是点 z 沿向量 b 的方向平移了 $|b|$ 的距离. 因此它的作用是把复平面上的任何图形沿向量 b 的方向平移了距离 $|b|$,称该映射为**平移**.

2. 旋转 $w=e^{i\alpha}z$(α 为实数)

由于当 $z\neq0$ 时,有 $|w|=|z|$ 且 $\mathrm{Arg}(w)=\mathrm{Arg}(z)+\alpha$,因此对任意

点 $z\neq 0$，其象 w 只是点 z 绕坐标原点旋转了角度 α，其作用是把复平面上的任何图形绕坐标原点旋转角度 α，称该映射为**旋转**.

3. 伸缩 $w=|a|z$

因为 $|w|=|a||z|$，且对 $z\neq 0$ 有 $\arg(w)=\arg(z)$，所以对复平上任一点 z，该映射的作用只是将复向量 z 的模放大或缩小为 $|w|=|a||z|$，其方向不变，称该映射为**伸缩**.

由于平移和旋转映射将直线变为直线，且将圆周变为圆周，而 $w=|a|z$ 的逆映射为 $z=w/|a|$，代入圆周或直线方程

$$Az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+D=0.$$

其象曲线显然还是圆周或直线，因此这三种映射都具有保圆性，它们的**复合映射 $w=az+b$ 也具有保圆性.**

【例 1-7】 求圆盘 $|z|<1$ 在映射 $w=(1+\mathrm{i})z+\mathrm{i}$ 下的象，并且作图.

解 该映射可分解为

$$w_1=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}z,\quad w=w_1+\mathrm{i}.$$

该圆盘在 w_1 平面的象为圆盘 $|w_1|<\sqrt{2}$，经平移 $w=w_1+\mathrm{i}$ 后得到在 w 平面的象为圆盘 $|w-\mathrm{i}|<\sqrt{2}$（图 1-8）.

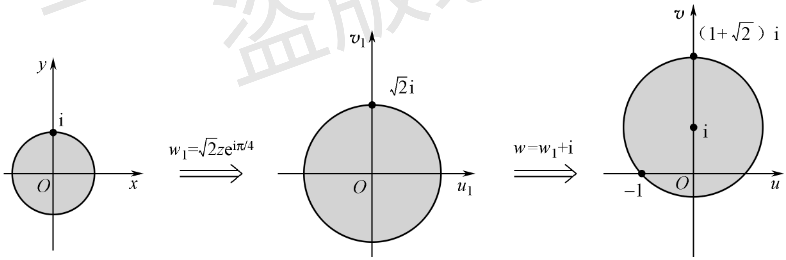

图 1-8

习 题 1.3

1△. 函数 $w=1/[z(z^2+1)]$ 的定义域是什么？

2. 求角形域 $0<\arg(z)<\pi/3$ 经映射 $w=z^2$ 后的象区域,并且作图.

3△. 求下列曲线在映射 $w=z^2$ 下的象曲线,其中 $r>0$ 为常数.

(1) $y^2-x^2=r^2$, (2) $x^2-y^2=r^2$,

(3) $y=-x$, (4) $y=x$,

(5) $x=1$, (6) $y=1$.

4. 求下列曲线在映射 $w=1/z$ 下的象.

(1) $x^2+y^2=4$, (2) $y=-x$,

(3) $y=0$, (4) $x=1$.

5. 求下列区域在指定映射下的象,并且作出其映射过程的图形.

(1) △矩形域 $0<x<1$ 且 $0<y<1$;其映射为 $w=z+2\mathrm{i}$.

(2) 右半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$;其映射为 $w=\mathrm{i}z+\mathrm{i}$.

(3) 上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$;其映射为 $w=(\mathrm{i}+1)z$.

(4) 以 $z_1=0,z_2=1,z_3=\mathrm{i}$ 为顶点的三角形内部;其映射为 $w=(1+\mathrm{i})(1-z)$.

(5) 圆域 $|z-i|<1$;其映射为 $w=2(z-\mathrm{i})$.

6. 求下列区域在映射 $w=\bar{z}$ 下的象.

(1) 圆域 $|z-\mathrm{i}|<1$, (2) 圆域 $|z|<2$,

(3) 角形域 $0<\arg(z)<\pi/3$.

习题 1.3 答案

1. 除去点 $z=0$ 和 $z=\pm\mathrm{i}$ 的复平面.

2. $0<\arg(w)<2\pi/3$.

3. (1) $u=-r^2$,(2) $u=r^2$;

(2) 略

(3) 半直线 $u=0(v\leqslant0)$,

(4) 半直线 $u=0(v\geqslant0)$,

(5) $u=1-v^2/4$,(6) $u=-1+v^2/4$.

4.（1）$|w|=1/2$，（2）$v=u$；（3）$v=0$；

（4）$\left|w-\dfrac{1}{2}\right|=1/2$.

5.（1）矩形 $0<u<1$ 且 $2<v<3$，

（2）$\mathrm{Im}(w)>1$，（3）$\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$，

（3）略

（4）w 平面内以点 $1+\mathrm{i}$，0 和 2 为顶点的三角形内部区域，

（5）圆域 $|w|<2$.

6.（1）圆域 $|w+\mathrm{i}|<1$，（2）圆域 $|w|<2$，

（3）角形域 $-\pi/3<\arg(w)<0$.

1.4 复变函数的极限和连续

1.4.1△ 复变函数的极限

复变函数极限的定义在叙述形式上与一元实函数的极限一致. 即

定义 1 设 A 为复常数，函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义. 若对于任意正数 ε，总可找到对应的正数 $\delta(\delta\leqslant\rho)$，使当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时恒有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $z\to z_0$ 时 $f(z)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \text{ 或 } f(z)\to A(z\to z_0). \qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

注意 由于函数 $f(z)$ 是在点 z_0 的去心邻域内有定义，因此“$f(z)\to A(z\to z_0)$”意味着“当点 z 在该邻域内沿任何路径、从任何方向、以任意方式趋向 z_0 时，函数 $f(z)$ 都趋向极限 A”. 显然 $z\to z_0$ **的路径是无穷无尽的，不可能都列举出来**；可是我们可以用考察函数沿某些特殊路径的

极限来判定其极限不存在①.

思考题 1 若沿某条路径 $z \to z_0$ 函数 $f(z)$无极限,则当 $z \to z_0$ 时 $f(z)$的极限不存在. 为什么?

思考题 2 设 $g(z)=f(z)-A$,则下面三个极限等价,为什么?

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = 0, \lim_{z \to z_0} |g(z)| = 0, \lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

实际上,由定义 1 可直接看出下面定理成立.

定理 1 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)-A|=0.$

由该定理可以推出:

定理 2 设 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0, z=x+\mathrm{i}y, A=a+\mathrm{i}b, f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,则有

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a \text{ 且} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b.$$

证明 由于当 $z \to z_0$ 时有 $x \to x_0$ 且 $y \to y_0$,因此由定理 1,在该趋向下有

$$f(z) \to A \Leftrightarrow |f(z)-A| = \sqrt{(u-a)^2+(v-b)^2} \to 0,$$

即 $u(x,y) \to a$ 且 $v(x,y) \to b$.

同一元实函数的极限一样,可以证明下面运算性质成立.

定理 3 若 $\lim\limits_{z \to z_0} f_k(z)=A_k(k=1,2)$,则有

(1) $\lim\limits_{z \to z_0}[f_1(z) \pm f_2(z)]=A_1 \pm A_2$,

(2) $\lim\limits_{z \to z_0}[f_1(z) f_2(z)]=A_1 A_2$,

(3) 当 $A_2 \neq 0$ 时,$\lim\limits_{z \to z_0}\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}=\dfrac{A_1}{A_2}$.

1.4.2 复变函数的连续性

复变函数 $f(z)$在点 z_0 连续的定义与一元实函数 $f(x)$在点 x_0 连

① 反例见本节后面习题 1.4 中的第 1 题及其答案.

续的定义类似，即

定义 2 设函数 $f(z)$的点 z_0 的某个邻域内有定义. 若在该邻域内当 $z\to z_0$ 时有 $f(z)\to f(z_0)$，则称 $f(z)$在点 z_0 连续，z_0 称为它的连续点.

若 $f(z)$在区域 D(曲线 C)的每一点都连续，则称它在 $D(C)$连续.

由定理 2 可直接得到下面定理.

定理 4 一个复变函数 $f(z)$在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续的充要条件是其实部和虚部的两个二元函数在点(x_0,y_0)都连续.

事实上，设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$f(z_0)=u(x_0,y_0)+\mathrm{i}v(x_0,y_0)$. $f(z)$在点 z_0 连续是指当 $z\to z_0$ 时有 $f(z)\to f(z_0)$，由定理 2 该极限等价于

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0) \text{ 且} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0),$$

即 $u(x,y)$和 $v(x,y)$在点(x_0,y_0)都连续.

同一元实函数一样，由定义 2 可以验证幂函数 $z^n(n=1,2\cdots)$和复常数 c 在整个复平面处处连续. 并且利用定理 3 同样可以推出 .

定理 5 对于在同一个区域内连续的两个函数，其和、差、积和商仍然在该区域内(对于商的情形要除去分母为零的点)连续. 另外连续函数的复合函数也仍然是连续函数.

由该定理可以看出，复多项式函数

$$P(z) = c_0z^n + c_1z^{n-1} + \cdots + c_{n-1}z + c_n$$

在整个复平面连续. 同样两个多项式的商为有理分式函数，它在除去分母为零的点连续.

另外，由定理 4 可以看出，若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在有界闭区域 $\overline{D}$ 连续，则 $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$ 在 $\overline{D}$ 上也连续. 又因二元连续函数 $|f(z)|$在 $\overline{D}$ 上连续必有界，故存在 $M>0$ 使当 $z\in\overline{D}$ 时恒有

$$|f(z)|\leqslant M.$$

显然将上述 $\overline{D}$ 改为闭曲线或包含两个端点的有限长曲线 C，其结

论也成立. 于是有：

定理 6　若函数 $f(z)$ 在有界闭域 $\overline{D}$（包括两个端点的有限长曲线 C 或闭曲线 C）上处处连续，则函数 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}(C)$ 上也处处连续，且存在正数 M 使当 $z\in\overline{D}(z\in C)$ 时恒有 $|f(z)|\leqslant M$.

注意　在一元实函数的情形，若一元实函数在某闭区间上连续，则在它上一定有界；由于闭区间一定是有限区间，因此在复变函数情形，对闭区域还需要增加有界性的限制 .

【例 1-8】　证明：当 z_0 是负实数时，$\lim\limits_{z\to z_0}\arg(z)$ 不存在 .

证明　由 $\arg(z)=\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(y\geqslant 0)\\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(y<0)\end{cases}$ 以及 $\arg z=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，可知

$$v(x,y)=0,\ \lim_{\substack{x=z_0=x_0\\ y\to 0^+}}u(x,y)=\lim_{\substack{x=x_0\\ y\to 0^+}}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\arccos(-1)=\pi,$$

$$\lim_{\substack{x=x_0\\ y\to 0^-}}u(x,y)=\lim_{\substack{x=x_0\\ y\to 0^-}}\left[-\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=-\pi,$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}u(x,y)$ 不存在，故 $\lim\limits_{z=z_0}\arg(z)$ 不存在 .

说明　由此可知 $\arg(z)$ 在负实轴不连续 .

【例 1-9】　试证明函数 $f(z)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg(z)$ 在角形域 D：$-\pi<\arg(z)<\pi$ 内连续.

证明　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$. 显然区域 D 为割去原点和负实轴的复平面，且 $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 在除去坐标原点外的点连续，只需证明 $v(x,y)=\arg(z)$ 在 D 连续.

事实上，当 $x>0$ 时，$v=\operatorname{arctg}(y/x)$ 连续，当 $y>0$ 时，$v=\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})$ 连续，且当 $y<0$ 时，$v=-\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})$ 也连续.

所以$v(x,y)=\arg(z)$在 D 内连续,所证结论成立.

注意 $\arg(z)$对 $z=0$ 无意义,故角形域 $\alpha<\arg(z)<\beta$ 或 $\alpha\leqslant\arg(z)\leqslant\beta$ 都无法包含坐标原点 .

习 题 1.4

1△. 设 $f(z)$在点 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义,且在该邻域内当 z 沿直线趋向 z_0 时总有 $f(z)\to A$. 这时 $f(z)$的极限一定存在吗? 为什么?

2△. 若 $z\to z_0$ 的两条路径使 $f(z)$趋向两个不相等的极限值,则当 $z\to z_0$ 时 $f(z)$无极限. 为什么?

3△. 连续函数 $f(z)$的模也是连续函数,为什么?

4. 试证明函数 $f(z)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg(z)$在原点和负实轴上不连续.

5. 求下列函数的极限,其中 $z\to 0$.

(1) $f_1(z)=z\mathrm{Re}(z)/|z|$,(2) $f_2(z)=\mathrm{Re}(z)/|z|$,

(3) $f_3(z)=\mathrm{Re}(z)/(1+z)$.

6. 设 $f(z)$在点 z_0 连续且 $f(z_0)\neq 0$,试证明存在 z_0 的一个邻域使在该邻域内恒有 $f(z)\neq 0$.

习题 1.4 答案

1. 不一定,如函数 $f(z)=xyz/(x^2+y^4)$在点 $z=0$ 无定义,当 $z\neq 0$ 且 $z=x\to 0$ 时,有 $f(z)=0$,其极限为零. 当 z 沿任意直线 $y=kx$ 趋向零时有 $z=x+\mathrm{i}kx\to 0$,这时有

$$f(z)=\frac{kx^2(x+\mathrm{i}kx)}{x^2(1+k^4x^2)}\to 0;$$

可是当 z 沿抛物线 $x=y^2$ 趋向零时有 $z=y^2+\mathrm{i}y$,

$$f(z)=\frac{y^3(y^2+\mathrm{i}y)}{2y^4}\to\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

故当 $z\to 0$ 时 $f(z)$无极限.

2. 见本节定义 1 及其注意.

3. 由本节定理 4.

4. 对 $z_0=x_0<0$,令 $z=x_0+\mathrm{i}y$,求当 $y\to 0^+$ 或 $y\to 0^-$ 的极限. $f(z)$ 在$z=0$无定义.

5.(1) 0, (2) 不存在, (3) 0.

6. 设函数 $f(z)$在 z_0 点连续且 $f(z_0)\neq 0$,那么可找到 z_0 点的一个邻域,使在这个领域内恒有 $f(z)\neq 0$.

证法(1) 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$. 从 $f(z)$在 z_0 点连续,可知 $u(x,y)$,$v(x,y)$在点(x_0,y_0)处都连续,于是$|f(z)|=[u^2(x,y)+v^2(x,y)]^{\frac{1}{2}}$是 x,y 的连续函数. 再由 $f(z_0)\neq 0$ 可知 $|f(z_0)|=[u^2(x_0,y_0)+v^2(x_0,y_0)]^{\frac{1}{2}}\neq 0$. 由二元连续函数的性质可知存在点 z_0 的一个领域$|z-z_0|=[(x-x_0)+(y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}}<\delta$,使位于这个领域内的一切点$(x,y)$恒有$|f(z)|\neq 0$. 即,位于这个领域内的一切点 z 恒有 $f(z)\neq 0$.

证法(2) 由于 $f(z)$在 z_0 点连续且 $f(z_0)\neq 0$,因此对于正数 $\varepsilon=\frac{1}{2}|f(z_0)|$,一定可以找到 $\delta>0$,使得当$|z-z_0|<\delta$ 时,即 z 位于领域$|z-z_0|<\delta$时,恒有下式成立:

$$||f(z)|-|f(z_0)||\leqslant|f(z_0)-f(z)|<\left|\frac{f(z_0)}{2}\right|,\text{即}$$

$$\frac{-1}{2}|f(z_0)|<|f(z)|-|f(z_0)|<\frac{1}{2}|f(z_0)|,$$

所以
$$|f(z)|>|f(z_0)|-\frac{1}{2}|f(z_0)|=\frac{1}{2}|f(z_0)|\neq 0,$$

由此可知 $f(z)$在上述领域$|z-z_0|<\delta$ 内不为零.