第 1 章　行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念. 随着线性代数理论的发展，行列式已广泛应用于数学、工程技术、经济学等众多领域. 本章在二阶和三阶行列式的基础上，介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算方法，进一步推导利用行列式求解 n 元一次线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶、三阶行列式的概念

行列式的研究源于线性方程组的求解. 本节在二元线性方程组的求解基础上，引入二阶行列式，进一步介绍三阶行列式.

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 和 b_1，b_2 均为常数，x_1，x_2 为未知数. 利用消元法求解方程组(1.1.1)，分别消去未知数 x_1 和 x_2，得同解方程组

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}$$

可知，若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则二元线性方程组(1.1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}，\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.1.2}$$

为了便于记忆，我们引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.3}$$

称为**二阶行列式**. 其中，数 $a_{ij}\ (i, j = 1,2)$ 称为行列式(1.1.3)的**元素**，元素 a_{ij} 的下标 i，j 分别称为该元素的**行标**和**列标**，表示元素 a_{ij} 位于行列式中第 i 行第 j 列. 我们把以 a_{ij} 为元素的行列式简记为 $\det(a_{ij})$.

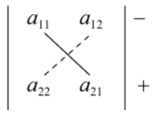

图 1.1.1

在二阶行列式中，称左上角到右下角的连线为主对角线，左下角到右上角的连线为副对角线. 由(1.1.3)可知，二阶行列式的值可以表示为主对角线上的元素乘积减去副对角线上的元素乘积，我们把该表示法称为**对角线法则**. 如图 1.1.1 所示。

利用二阶行列式的定义，式(1.1.2)中分子也可写成二阶行列式的形式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}，\quad \boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

那么式(1.1.2)可写成

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}，\quad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中，分母 $\boldsymbol{D}$ 是由方程组(1.1.1)的系数按原位置排列而成的行列式(称为方程组(1.1.1)的**系数行列式**)，x_1 的分子 $\boldsymbol{D}_1$ 是将系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第1列元素用常数项 b_1, b_2 替换所得，x_2 的分子 $\boldsymbol{D}_2$ 是将系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第2列元素用常数项 b_1, b_2 替换所得.

例 1.1.1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2=-9 \\ -2x_1+3x_2=1 \end{cases}$.

【解】 方程组的系数行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=6-(-2)=8\neq 0$$

因此方程组有唯一解. 又

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-27-1=-28$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=2-18=-16$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=\frac{-28}{8}=-\frac{7}{2}$$

$$x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=\frac{-16}{8}=-2$$

1.1.2 三阶行列式

由九个元素 $a_{ij}\ (i, j=1, 2, 3)$ 排成三行三列组成的**三阶行列式**，仍记为 $\boldsymbol{D}$，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其值定义为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

可见，三阶行列式的值表示为6 项的代数和，其中的每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积并加上正负号；同时，在 $\boldsymbol{D}$ 中任取不同行不同列的三个数的乘积并相应地加上正负号后都是 $\boldsymbol{D}$ 中的某一项. 在第 1.3 节中我们将会看到，对于一般的 n 阶行列式，也有类似的特点.

利用**“对角线法则”**可以帮助我们记忆三阶行列式中的每一项前面的正、负号. 其中，实线相连的三项乘积加正号，虚线相连的三项乘积加负号，如图 1.1.2 所示。

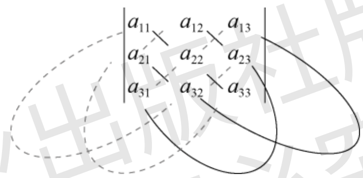

图 1.1.2

例 1.1.2　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

【解】　利用对角线法则可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= 2\times(-4)\times 3 + 0\times 0\times(-1) + 2\times 1\times 8 \\ &\quad - 2\times(-4)\times(-1) - 0\times 1\times 3 - 2\times 0\times 8 \\ &= -24 + 0 + 16 - 8 - 0 - 0 \\ &= -16 \end{aligned}$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

通过类似方程组(1.1.1)所做的消元法讨论，有以下结论：

若方程组(1.1.4)的系数行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1.1.4)有唯一解

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},\ x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}},\ x_3=\frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}$$

其中，$\boldsymbol{D}_j(j=1,2,3)$是将系数行列式$\boldsymbol{D}$的第$j$列元素用方程组(1.1.4)的右端常数项$b_1,b_2,b_3$替换所得，即

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1.1.3 有三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1 \\ x_1-5x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

该方程组是否有唯一解？若有，求出其唯一解.

【解】 方程组的系数行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0$$

因此方程组有唯一解. 又因为行列式

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11,\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9,\quad \boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=6$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}=-\frac{3}{4}$$

由以上讨论可知，利用二阶和三阶行列式表示二元和三元线性方程组的解，形式更简单，使用更方便.

在实际应用中，遇到的线性方程组所含有的未知量个数通常多于三个，因此，有必要考虑将上面二元和三元线性方程组的解法推广到一般的n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的求解. 为此，需要在二阶和三阶行列式的基础上，引入n阶行列式的概念.

习题 1.1

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} a^2 & -1 \\ 3a+1 & a+3 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$；　(8) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 求解方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. 证明：当 $b \neq 0$ 时，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & a_{13}b^{-2} \\ a_{21}b & a_{22} & a_{23}b^{-1} \\ a_{31}b^2 & a_{32}b & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. 计算函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & -1 \\ -x & x & x \\ 3 & 2 & -x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

5. 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

1.2　*n* 阶排列及对换

为定义 n 阶行列式，首先介绍 n 阶排列及其逆序数的概念.

1.2.1　*n* 阶排列及其逆序数

定义 1.2.1　把 n 个不同的元素 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 按照一定的顺序排成一列，称为一个 n 阶排列(简称为排列).

由初中数学中排列组合的相关知识可知，n 个不同的元素的排列种类数有 $n!$ 个.

例如，由 $1,2,3$ 这三个数可以排出 $3!=6$ 种不同的 3 阶排列，分别是

$$1\ 2\ 3\ ,\ 1\ 3\ 2\ ,\ 2\ 1\ 3\ ,\ 2\ 3\ 1\ ,\ 3\ 1\ 2\ ,\ 3\ 2\ 1$$

其中排列 1，2，3，是按照从小数到大数递增的顺序排列起来的，我们称它为**自然排列**. 其他的排列均出现某些大数排在小数之前的情形.

定义 1.2.2 在一个 n 阶排列中，任取两个数(称为一个**数对**)，若其前后位置与大小顺序相反，即大数在前、小数在后，则称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的逆序数，记为 $\tau(p_1, p_2, \cdots, p_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

接下来讨论排列的逆序数的计算方法.

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 n 个自然数的一个排列，对于元素 $p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，如果排在 p_i 前面且比 p_i 大的元素有 τ_i 个，则称元素 p_i 的逆序数是 τ_i. 所有元素的逆序数的总和

$$\begin{aligned}\tau(p_1\, p_2 \cdots p_n) &= \tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n \\ &= \sum_{i=1}^{n}\tau_i\end{aligned}$$

即为这个排列的逆序数.

显然排列 $12\cdots n$ 的逆序数为

$$\tau(12\cdots n)=0$$

因此排列 $12\cdots n$ 是偶排列.

例 1.2.1 计算下列各排列的逆序数，并说明它们的奇偶性.

(1) 42531； (2) 24531； (3) $n\,(n-1)\cdots 21$.

【解】 (1) 在排列 42531 中，4 排在首位，逆序数为 0；2 的前面有一个比它大的数，逆序数为 1；5 的前面有 0 个比它大的数，逆序数为 0；3 的前面有两个比它大的数，逆序数为 2；1 的前面有四个比它大的数，逆序个数为 4. 于是这个排列的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(42531) &= 0+1+0+2+4 \\ &= 7\end{aligned}$$

排列 42531 是奇排列.

(2) 同理可得

$$\begin{aligned}\tau(24531) &= 0+0+0+2+4 \\ &= 6\end{aligned}$$

排列 24531 是偶排列.

(3) 在排列 $n\,(n-1)\cdots 21$ 中的每一个数对都是逆序，所以

$$\begin{aligned}\tau[n\,(n-1)\cdots 21] &= 0+1+2+\cdots+(n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

因此，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，排列 $n\,(n-1)\cdots 21$ 是偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，排列 $n\,(n-1)\cdots 21$ 是奇排列，其中 k 为任意自然数.

1.2.2　对换

在一个 n 阶排列中，仅交换其中某两个元素的位置，其余元素位置保持不变，这样一次交换称为一个**对换**. 相邻两个元素的对换称为**相邻对换**.

例 1.2.1 中的排列(2)是由排列(1)将元素 4 和 2 做一次对换得到的，且排列(1)是奇排列，排列(2)是偶排列，可见对排列做一次对换改变了排列的奇偶性.

定理 1.2.1　做一次对换，改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变为偶排列；偶排列变为奇排列.

证　先证相邻对换的情形.

设排列为

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

对换 a 与 b，变为

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

显然，$i_1 i_2 \cdots i_s$；$j_1 j_2 \cdots j_t$ 这些数在对换前后位置保持不变，因此这些数之间，以及这些数与 a，b 之间是否构成逆序保持不变. 要判定两个排列的逆序数的改变，只要考虑数 a,b 的逆序数的改变即可. 不妨记

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t) = \tau$$

若 $a<b$，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变，即

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t) = \tau + 1$$

若 $a>b$，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1，即

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t) = \tau - 1$$

由此可见，无论哪种情况，排列 $i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t$ 和 $i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t$ 的逆序数总相差 1，所以这两个排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, k_1 k_2 \cdots k_r\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

把它做 r 次相邻对换，变成

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, b\, k_1 k_2 \cdots k_r\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

再做 $r+1$ 次相邻对换，变成

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, k_1 k_2 \cdots k_r\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

总之，排列 $i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, k_1 k_2 \cdots k_r\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t$ 变成排列 $i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, k_1 k_2 \cdots k_r\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t$，经过 $2r+1$ 次相邻对换，所以这两个排列的奇偶性不同.

由定理 1.2.1 可得以下结论.

推论 1.2.1 所有的 n 阶排列中，奇排列与偶排列各占一半，均为 $\frac{n!}{2}$.

证 n 阶排列共有 $n!$ 个. 不妨设有 p 个奇排列，q 个偶排列，则有 $p+q=n!$.

由于一次对换改变排列的奇偶性，我们将 p 个奇排列的任意两个数进行一次对换，所得到 p 个排列都是偶排列. 因此偶排列至少有 p 个，故 $p \leqslant q$；同理可得 $q \leqslant p$. 所以 $p=q$. 因此 $p=q=\frac{n!}{2}$. 即奇排列与偶排列各占一半，均为 $\frac{n!}{2}$.

推论 1.2.2 任一 n 阶排列均可通过有限次对换变为自然排列，并且所做对换次数的奇偶性与排列的奇偶性相同. 即奇排列做奇数次对换变成自然排列，偶排列做偶数次对换变成自然排列.

证 由定理 1.2.1 知，做一次对换，排列的奇偶性改变一次，因此，对排列所做对换的次数就是排列奇偶性变化的次数，而自然排列是偶排列(逆序数是 0)，由此得知推论 1.2.2 成立.

习题 1.2

1. 计算下列各排列的逆序数，并说明它们的奇偶性.

(1) 54321； (2) 14325； (3) 1726354；

(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$； (5) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$.

2. 设 n 阶排列 $p_1\,p_2\cdots p_n$ 的逆序数为 τ，求排列 $p_n\,p_{n-1}\cdots p_1$ 的逆序数.

3. 选择 i 与 k $(1\leqslant i\leqslant 8, 1\leqslant k\leqslant 8)$，使下列排列为偶排列.

(1) $1i256k47$； (2) $21i54k78$.

1.3 *n* 阶行列式的概念

n 阶行列式在二阶、三阶行列式的定义基础上递推得到. 这里，我们以三阶行列式为例，结合排列及逆序的概念，对三阶行列式的结构进行研究.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易看出：

(1) 等号右边的每一项恰好都是三个元素的乘积，且当这三个元素的行标按自然顺序 123 排列时，列标分别是

$$123,\ 231,\ 312,\ 321,\ 213,\ 132$$

123 三个数的排列共 6 种，对应等号右端共 6 项. 且每一项的三个元素在行列式中位于不同的行、不同的列，这样每一项除正负号外都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$.

(2) 列标排列为 123 , 231 , 312 的三项，对应项的符号为“+”，列标排列为偶排列；列标排列为 321 , 213 , 132 的三项，对应项的符号为“−”，列标排列为奇排列. 因此，每一项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 所带的正负号可以表示为列标排列的逆序数 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 $1, 2, 3$ 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

一般的，n 阶行列式定义如下.

定义 1.3.1　设由 n^2 个元素排成 n 行 n 列构成 ***n*** **阶行列式**，表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其值等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和，这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $12\cdots n$ 的一个排列. 每一项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 都按下列规则带有正负号：当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，带有正号；当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，带有负号. 这样 n 阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这里，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

通常用 $\boldsymbol{D}$ 表示 n 阶行列式，简记为 $\det(a_{ij})$，在不引起混淆的情况下，n 阶行列式也可记为 $\boldsymbol{D} = \left|a_{ij}\right|_n$. 特别地，一阶行列式只有 1 个元素，即 $|a_{11}| = a_{11}$，要与绝对值记号区别开.

例 1.3.1　计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

【解】 根据定义，行列式 $\boldsymbol{D}$ 的展开式共 $4! = 24$ 项. 展开式中的每一项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

易知每一项中只要有一个元素为 0，则该项为 0. 因此，考虑如下取法：由于第一行元素除 a_{11} 外全为 0，故只能取 $p_1 = 1$；第二行元素中只有 a_{11}, a_{22} 不为 0，已取 $p_1 = 1$，故必须取 $p_2 = 2$；同理必须取 $p_3 = 3$，$p_4 = 4$. 也就是说行列式展开式中不为 0 的项只有一项：

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

又 $\tau(1234) = 0$，因此行列式 $\boldsymbol{D} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

在 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中，仍然称左上角到右下角的连线(即过元素 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 的直线)为**主对角线**，左下角到右上角的连线(即过元素 $a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}$ 的直线)为**副对角线**. 主对角线以下的元素全为 0，即满足 $a_{ij} = 0$（$i > j$ 时)的行列式称为**上三角行列式**；主对角线以上的元素全为 0，即满足 $a_{ij} = 0$（$i < j$ 时)的行列式称为**上三角行列式**. 特别地，主对角线以下和以上的元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**.

利用例 1.3.1 可求得，n 阶上三角行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{\ n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{\ n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad a \ \ a \quad \cdot\cdot a_{nn} \quad \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

其中“Π”为连乘符号.

n 阶下三角行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad a \ \ a \quad \cdot\cdot a_{nn} \quad \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

n 阶对角行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \\ 0 & a_{22} & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad a \ \ a \quad \cdot\cdot a_{nn} \quad \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

上述结果说明，n 阶上(下)三角行列式和对角行列式的值都等于其主对角线上 n 个元素的连乘积.

例 1.3.2 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【解】 该行列式的副对角线上方的元素都是 0，不同于前面所介绍的下三角行列式. 由行列式定义，$\boldsymbol{D}$ 的展开式中仅有一项

$$(-1)^{\tau[n(n-1)\cdots}\quad a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n}\quad a_{n1}$$

不为 0，因此行列式

$$\boldsymbol{D}=(-1)^{\tau[n(n-1)\cdots}\quad a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n}\quad a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n}\quad a_{n1}$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{\ n} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{\ n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix}\quad {}^{n(n-1)}\quad a_{\ n}a_{\ n}\cdots a_{n}\quad a_{n}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{\ n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix}\quad {}^{n(n-1)}\quad a_{\ n}a_{\ n}\cdots a_{n}\quad a_{n}$$

最后，给出 n 阶行列式的另一等价定义.

由于数的乘法满足交换律，在一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中 n 个元素的次序可以任意排列，我们总可以做适当调换将其变成 $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$. 这一过程中，一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的列标排列由 $p_1\,p_2\cdots p_n$ 经 τ 次对换变成了自然排列 $1\,2\cdots n$，与此同时，行标排列由自然排列 $1\,2\cdots n$ 经 τ 次对换变成了 $q_1\,q_2\cdots q_n$，且 $(-1)^{\tau(p_1 p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(q_1 q_2\cdots q_n)}$.

因此，n 阶行列式的定义又可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \end{vmatrix}\quad \sum\ (-1)^{\tau(q_1 q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

这里，每一项 $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 的列标 $1\,2\cdots n$ 是自然排列，行标 $q_1q_2\cdots q_n$ 是 $1\,2\cdots n$ 的任一个排列，$\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 是行标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和，共 $n!$ 项.

习题 1.3

1. 试确定四阶行列式 $\boldsymbol{D}=\left|a_{ij}\right|_4$ 中下列项的符号.

(1) $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$；　　(2) $a_{13}a_{32}a_{24}a_{41}$.

2. 写出四阶行列式 $\boldsymbol{D}=\left|a_{ij}\right|_4$ 中含元素 $a_{23}a_{41}$ 并带负号的项.

3. 若在一个 n 阶行列式中，至多有 $n-1$ 个元素不为 0，求该行列式的值.

4. 利用行列式的定义，计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.4　n 阶行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可知，当 n 较大时，除了一些特殊的行列式(如三角形的行列式)以外，一般用定义求解行列式的计算过程非常烦琐. 如利用定义求五阶行列式的值，共需计算 $5!=120$ 项的和，其中每项都是五个数的乘积，而且随着 n 的增大，$n!$ 的值迅速增大. 本节介绍的行列式的基本性质，不仅可以简化行列式的计算，而且对于行列式的理论研究也很重要.

记

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

行列式 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 称为行列式 $\boldsymbol{D}$ 的**转置行列式**. 行列式 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 就是将 $\boldsymbol{D}$ 中的行与列互换所得的行列式.

性质 1.4.1　行列式的值等于其转置行列式的值，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$.

证　记行列式 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$，则

$$b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

对 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 按照列标排列为自然排列 $1\,2\cdots n$ 的方式展开得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} &= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{p_1 1} b_{p_2 2} \cdots b_{p_n n} \\
&= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n} \\
&= \boldsymbol{D}
\end{aligned}
$$

由性质 1.4.1 可知，在行列式中行和列处于同等的地位. 所有对于行成立的性质，对于列也同样成立. 接下来的过程中，我们都以行的性质为例进行讨论.

性质 1.4.2　交换行列式中某两行(列)元素，行列式的值变号，即

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

则有 $\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{D}_1$.

证　设行列式 $\boldsymbol{D}_1=\det(b_{ij})$，则当行数 $i\neq s,t$ 时，$b_{ip}=a_{ip}$；当行数 $i=s,t$ 时，$b_{sp}=a_{tp}$，$b_{tp}=a_{sp}$.

将 $\boldsymbol{D}_1$ 按照行标排列为自然排序 $1\,2\cdots n$ 展开得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_1 &= \sum_{p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n)} b_{1p_1}\cdots b_{sp_s}\cdots b_{tp_t}\cdots b_{np_n} \\
&= \sum_{p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{tp_s}\cdots a_{sp_t}\cdots a_{np_n} \\
&= \sum_{p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{sp_t}\cdots a_{tp_s}\cdots a_{np_n}
\end{aligned}
$$

又因为排列 $p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$ 是将排列 $p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n$ 中的元素 p_s 和 p_t 做一次互换所得，则

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n)} = -(-1)^{\tau(p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n)}$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_1 &= -\sum_{p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{sp_t}\cdots a_{tp_s}\cdots a_{np_n}\\ &= -\boldsymbol{D}\end{aligned}$$

通常，我们用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i , j 两行元素记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ，交换 i , j 两列元素记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1.4.1 若行列式中两行（列）对应元素相同，行列式值为零.

证 交换行列式 $\boldsymbol{D}$ 中相同的两行元素，有 $\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{D}$ ，因此 $\boldsymbol{D} = 0$.

性质 1.4.3 行列式 $\boldsymbol{D}$ 的某一行（列）中所有的元素都乘以数 k 所得行列式 $\boldsymbol{D}_1$ ，其值等于 $k\boldsymbol{D}$. 即

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 由行列式的定义得，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_1 &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}\\ &= k\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}\\ &= k\boldsymbol{D}\end{aligned}$$

该性质也可理解为，若行列式中某一行（列）元素都有公因子 k ，可将公因子 k 提到行列式符号外.

行列式第 i 行（列）元素乘数 k ，记作 $r_i \times k$（$c_i \times k$）.

由性质 1.4.3 容易推得以下结论.

推论 1.4.2 行列式 $\boldsymbol{D}$ 中某行（列）的元素都为 0，则 $\boldsymbol{D} = 0$.

性质 1.4.4 行列式 $\boldsymbol{D}$ 中某两行（列）的元素对应成比例，则 $\boldsymbol{D} = 0$.

证 不妨设行列式 $\boldsymbol{D}$ 中 s 行和 t 行元素对应成比例，即

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 1.4.3，可得

$$
\boldsymbol{D}=k\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{\ n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}=0
$$

性质 1.4.5　若行列式 $\boldsymbol{D}$ 中某一行(列)的元素都是两个数的和，则 $\boldsymbol{D}$ 可以拆分为两个行列式的和，且拆分出来的这两个行列式除了这一行(列)外，其余行(列)与 $\boldsymbol{D}$ 完全一致. 例如，第 i 行元素都是两个数的和，则

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{\ n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in} & a_{in}' \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} &
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{\ n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{\ n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

证　由行列式的定义有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}&=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots &
\end{vmatrix}\\
&=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(a_{ip_i}+a_{ip_i}')\cdots a_{np_n}\\
&=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}'\cdots a_{np_n}\\
&=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & & & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & & & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & & & \cdots &
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

注意：一般情况下，行列式 $|a_{ij}+b_{ij}|_n\neq|a_{ij}|_n+|b_{ij}|_n$. 如二阶行列式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}&=\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

由此推得，若 n 阶行列式的每个元素都表示成两数的和，则行列式可表示为 2^n 个行列式的和.

性质 1.4.6 将行列式 $\boldsymbol{D}$ 中某行(列)的元素同乘 k 倍，加到另一行(列)的对应元素上，行列式 $\boldsymbol{D}$ 的值不变.

例如，将行列式 $\boldsymbol{D}$ 第 i 行元素乘以 k 倍加到第 j 行元素上(记作 r_j+kr_i)，当 $i\neq j$ 时，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn} \quad ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

该性质请尝试证明.

这里要注意的是，记号 r_j+kr_i 不能写作 kr_i+r_j. 例如，

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}$$

而

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} a & b \\ c+a & d+b \end{vmatrix}$$

在运算中，常常会用到将几个运算写在一起的省略写法，这时要注意各个运算的次序一般不能颠倒，因为后一次运算是在前一次运算结果基础上的. 例如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-r_1]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{vmatrix}$$

等价于

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{vmatrix}$$

而

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

因此对同一行列式，两次运算的次序不同时，所得结果一般不同.

对一般行列式，利用行列式的定义计算比较麻烦. 而上(下)三角形行列式的值等于主对角线上的元素的乘积，其计算非常简单. 用归纳法可以证明，任何 n 阶行列式总可以运用以下行(列)运算：

$$r_i \leftrightarrow r_j\ (c_i \leftrightarrow c_j),\quad r_i\times k\ (c_i\times k),\quad r_j+kr_i\ (c_j+kc_i)$$

将其化为上(下)三角行列式，从而算得行列式的值.

例 1.4.1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&2&1&0\\1&1&0&-1\\2&1&-1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}.$$

【解】 $D \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} (-1)\begin{vmatrix}1&1&0&-1\\3&2&1&0\\2&1&-1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix} \xlongequal[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+(-3)r_1\\ r_3+(-2)r_1}} (-1)\begin{vmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&1&3\\0&-1&-1&3\\0&0&1&2\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_3+(-1)r_2} (-1)\begin{vmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&1&3\\0&0&-2&0\\0&0&1&2\end{vmatrix} \xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&1&3\\0&0&1&2\\0&0&-2&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+2r_3} \begin{vmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&1&3\\0&0&1&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-4$$

在化上三角形过程中，首先利用运算 $r_1\leftrightarrow r_2$ 把 a_{11} 化为 1(当然也可以做其他的行(列)变换)，目的是借助元素 a_{11} 将第 1 列的其他元素化为零时，可以避免引入分数运算. 而且在化上三角形过程中，常常会做“将某些元素化零”的运算，但须注意，在化零过程中，后面化零的过程应当尽量地不影响前面已经化出的零元素.

例 1.4.2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}.$$

【解】 这个行列式的特点是每行每列的元素之和都是 5. 因此当第 2，3，4 行元素都加到第 1 行时，第 1 行元素相同. 提出公因子后，第 1 行元素都变为 1，然后将行列式化为上三角形.

$$D \xlongequal[r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2\\ r_1+r_3}} \begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix} \xlongequal{r_1\div 5} 5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}} 5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=5$$

例 1.4.3 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}，其中 a_i \neq 0,\ i=1,2,\cdots,n .$$

【解】 观察发现，行列式的形状与三角行列式形式非常接近. 若能将第一列中元素 a_0 以下的 n 个元素都化为零，即得到上三角行列式(当然，我们也可选择将第一行中元素 a_0 右边的 n 个元素化为零). 因为 $a_i \neq 0,\ i=1,2,\cdots,n$ ，从而

$$\boldsymbol{D}\xlongequal{c_1-\frac{1}{a_1}c_2}\begin{vmatrix} a_0-\dfrac{1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-\frac{1}{a_2}c_3}\begin{vmatrix} a_0-\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2} & 1 & 1 & \cdots & \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \end{vmatrix}$$

$$=\cdots\xlongequal{c_1-\frac{1}{a_n}c_{n+1}}\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \end{vmatrix}$$

$$=(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n$$

例 1.4.4 行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r} & c & \cdots & c_{s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & c_{r} & \cdots & c_{rs} \\ 0 & \cdots & & b & \cdots & b_{s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & b_{s} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

称为**准上三角行列式**. 若记

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{\ r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{\ s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sr} \end{vmatrix}$$

证明 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2$.

证明　行列式 $\boldsymbol{D}_1$ 总可经过若干次列变换 c_j+kc_i 化为上三角行列式，记为

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a_{\ r} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a_{\ r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\quad a'\ a'\ \ \cdot\cdot a_{rr}$$

行列式 $\boldsymbol{D}_2$ 总可经过若干次行变换 r_j+kr_i 化为上三角行列式，记为

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \cdots & b_{\ s} \\ 0 & b'_{22} & \cdots & b_{\ s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}\quad b'\ b'\ \ \cdot\cdot b_{ss}$$

现在对 $\boldsymbol{D}$ 的前 r 列做与 $\boldsymbol{D}_1$ 相同的列变换 c_j+kc_i，对 $\boldsymbol{D}$ 的后 s 行做与 $\boldsymbol{D}_2$ 相同的行变换 r_j+kr_i，则有

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a_{\ r} & c & c & \cdots & c_{\ s} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a_{\ r} & c & c & \cdots & c_{\ s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & c_r & c_r & \cdots & c_{rs} \\ 0 & 0 & \cdots & & b & b & \cdots & b_{\ s} \\ 0 & 0 & \cdots & & & b & \cdots & b_{\ s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

因此，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= a'_{11}a'_{22}\cdots \qquad \cdots \\ &= \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 \end{aligned}$$

类似地，行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{\ r} & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & & \cdots & \\ c_{11} & \cdots & c_{\ r} & b & \cdots & b_{\ s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sr} & b_s & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

称为**准下三角行列式**，且

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & & & \cdots & \\ c_{11} & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & & & \cdots & \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & & & \cdots & \end{vmatrix}
$$

例 1.4.5 计算 $2n$ 行列式

$$
\boldsymbol{D}_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}
$$

其中未写出的元素为 0 .

【解】 把 $\boldsymbol{D}_{2n}$ 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行，$\cdots$，第 2 行互换(做 $2n-2$ 次相邻互换)，再把第 $2n$ 列依次与第 $2n-1$ 列，$\cdots$，第 2 列互换，得

$$
\boldsymbol{D}_{2n}=(-1)^{2(2n-2)}\begin{vmatrix} a & b & 0 & & \cdots & & 0 \\ c & d & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & a & & & & b \\ & & & \ddots & & \iddots & \\ \vdots & \vdots & & & a & b & \vdots \\ & & & & c & d & \\ & & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & c & & \cdots & & d \end{vmatrix}
$$

根据例 1.4.4 的结果，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{2n} &= \boldsymbol{D}_2\,\boldsymbol{D}_{2(n-1)} \\
&= (ad-bc)\,\boldsymbol{D}_{2(n-1)}
\end{aligned}
$$

以此作为递推公式，即得

$$
\boldsymbol{D}_{2n}=(ad-bc)^{2}\boldsymbol{D}_{2(n-2)}=\cdots \quad ad \ \cdot bc)^{n-1}\boldsymbol{D}_2=(ad-bc)^{n}
$$

习题 1.4

1. 已知三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k$，求行列式$\begin{vmatrix} 3a_{11} & -a_{13} & a_{12}-2a_{13} \\ 3a_{21} & -a_{23} & a_{22}-2a_{23} \\ 3a_{31} & -a_{33} & a_{32}-2a_{33} \end{vmatrix}$的值.

2. 利用行列式性质证明：

（1）$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$.

3. 求下列方程的所有根.

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}=0$；

（2）$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$；

（3）$\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}=0$.

4. 计算下列行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$；　（4）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；（6）$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & b & -1 & 0 \\ 0 & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix}$；

（7）$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；（8）$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$；

（9）$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$；（10）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & & \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & & \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & n \end{vmatrix}$；

（11）$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \quad x \end{vmatrix}$；

（12）$\boldsymbol{D}_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \unicode{x22F0} & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & d_1 & c_1 & & \\ & \unicode{x22F0} & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$，其中未写出的元素都是 0.

1.5　行列式的展开定理

第 1.1 节中，三阶行列式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \\
&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\
&=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

表示为三个二阶行列式的代数和. 低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简单. 于是，考虑把高阶的行列式化为低阶的行列式进行计算. 为此，先引入余子式及代数余子

式的概念.

定义 1.5.1　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，去掉元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所在的第 i 行和第 j 列后，剩余的元素按照原位置构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}；并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

例 1.5.1　求二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中各元素的代数余子式.

【解】　a_{11} 的代数余子式 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=|a_{22}|=a_{22}$；

a_{12} 的代数余子式 $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-|a_{21}|=-a_{21}$；

a_{21} 的代数余子式 $A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-|a_{12}|=-a_{12}$；

a_{22} 的代数余子式 $A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=|a_{11}|=a_{11}$.

这里 $|a_{ij}|$ 是指以 a_{ij} 为元素的一阶行列式，而非绝对值.

下面利用代数余子式的概念给出 n 阶行列式的展开定理.

定理 1.5.1　n 阶行列式 D 的值等于它的任意一行（列）的各元素与其对应代数余子式乘积之和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

称为行列式 D 的**按第 i 行的展开式**；或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

称为行列式 D 的**按第 j 列的展开式**.

证　在行列式中，行和列具有同样的性质，这里仅给出按行展开的证明，按列展开

的结论同理可证. 我们分两步完成证明.

(1) 首先证明行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的第 i 行元素仅有 $a_{ij}\neq 0$ 的情形，即证明

$$\boldsymbol{D}=\left|\begin{array}{cccccccc} a_{11} & \cdots & a_{\ j} & a_{\ j} & a_{\ j} & \cdots & a_{\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i\ \ j} & a_{i\ \ j} & a_{i\ \ j} & \cdots & a_{i\ \ n} \\ 0 & \cdots & & a_{ij} & & \cdots & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i\ \ j} & a_{i\ \ j} & a_{i\ \ j} & \cdots & a_{i\ \ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j} & a_{nj} & a_{n\ j} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right. \qquad a_{ij}A_{ij}$$

这里 A_{ij} 是行列式 $\boldsymbol{D}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

把行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的第 i 行，依次与第 $i-1$ 行，第 $i-2$ 行，$\cdots$，第1行互换(共交换了 $i-1$ 次)；再把第 j 列，依次与第 $j-1$ 列，第 $j-2$ 列，$\cdots$，第1列互换(共交换了 $j-1$ 次)，然后利用第 1.4 节中准下三角形行列式的结论，结合代数余子式的定义，可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}&=(-1)^{i-1}\left|\begin{array}{cccccc} 0 & \cdots & & & & \cdots \\ a_{11} & \cdots & & & & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & & & & \cdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & & & & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & & & \cdots \end{array}\right. \\
&=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\left|\begin{array}{ccccccc} a_{ij} & 0 & \cdots & & & \cdots & \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & & & \cdots & \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & & & \cdots & \end{array}\right| \\
&=(-1)^{i+j-2}a_{ij}\left|\begin{array}{cccccc} a_{11} & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & & & \cdots & \\ a_{i+1,1} & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & & \cdots & \end{array}\right| \\
&=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}
\end{aligned}$$

(2) 要证明定理 1.5.1 的结论，将行列式 $\boldsymbol{D}$ 按照第 i 行元素拆分为 n 个行列式的和的形式，然后对得到每一个行列式按照上面结论计算，可得

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}+0+\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & 0 & \cdots & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots &
\end{vmatrix}
$$

$$
=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots
$$

类似，若按列证明，可得

$$
\boldsymbol{D}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}
$$

行列式的展开定理提供了一种有效的行列式的计算方法. 计算行列式时，可利用该定理把 n 阶行列式转化为 $n-1$ 阶行列式. 要注意的是，在按行(列)展开的过程中，应当尽可能地选择按零元素较多的行或列展开. 计算行列式时，通常将按行(列)展开法则与上(下)三角形的化简过程相结合.

例 1.5.2　计算行列式

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}
0 & -1 & -1 & 2 \\
1 & -1 & 0 & 2 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}.
$$

【解】 行列式的第 4 列中零元素较多，利用行变换，将第 4 列元素除 a_{14} 外全变为 0，然后按照第 4 列展开.

$$
\boldsymbol{D}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}
0 & -1 & -1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 \\
-1 & 2 & -1 \\
2 & 1 & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{c_3-c_1}-2\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 0 \\
2 & 1 & -1
\end{vmatrix}=-2\times1\times2\times(-1)=4
$$

例 1.5.3　证明 n 阶行列式

$$
\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}
\cos a & 1 & & & & \\
1 & 2\cos a & 1 & & & \\
 & 1 & 2\cos a & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & 2\cos a & 1 \\
 & & & & & 2\cos a
\end{vmatrix}=\cos na
$$

其中未写出的元素都是 0.

证 按第 n 行展开得

$$
\boldsymbol{D}_n=1\cdot(-1)^{n+(n-1)}\begin{vmatrix}
\cos a & 1 & & & \\
1 & 2\cos a & \ddots & & \\
 & \ddots & \ddots & & \\
 & & 1 & 2\cos a & 0 \\
 & & & 1 & 1
\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}
\cos a & 1 & & & \\
1 & 2\cos a & 1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & 1 & 2\cos a & 1 \\
 & & & 1 & 2\cos a
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)\cdot\boldsymbol{D}_{n-2}+2\cos a\boldsymbol{D}_{n-1}
$$

下面用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{D}_1=\cos a$，结论成立；

假设 $n\leqslant k$ 时，结论也成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{k+1}&=(-1)\cdot\boldsymbol{D}_{k-1}+2\cos a\,\boldsymbol{D}_k\\
&=-\cos(k-1)a+2\cos a\,\cos ka\\
&=-(\cos ka\cos a+\sin ka\sin a)+2\cos a\,\cos ka\\
&=\cos ka\cos a-\sin ka\sin a\\
&=\cos(k+1)a
\end{aligned}
$$

故由归纳假设知：$\boldsymbol{D}_n=\cos na$.

例 1.5.4 证明 $n(n\geqslant 2)$ 阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^n
\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)
$$

其中记号“$\prod$”表示所有同类因子的乘积.

【解】 利用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_2&=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1\\
&=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 2}(x_j-x_i)
\end{aligned}
$$

结论成立.

假设结论对于 $n-1$ 阶行列式成立，即

$$\boldsymbol{D}_{n-1}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j-x_i)$$

对 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}_n$，从第 n 行开始，依次做变换，后一行减去前一行的 x_1 倍，然后按第 1 列展开，并提出每列的公因子 (x_i-x_1)，有

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & -x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & {}_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \\ x_2 & x_3 & \cdots & \\ & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式，由归纳假设

$$\boldsymbol{D}_{n-1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{\leqslant i\ \ j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_n&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots\qquad)\boldsymbol{D}_{n-1}\\&=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\end{aligned}$$

即结论对 n 阶范德蒙行列式成立.

由例 1.5.4 的结论可知，范德蒙行列式 $\boldsymbol{D}_n=0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{D}_n$ 中至少有两个 x_i 是相等的，即 $\boldsymbol{D}_n$ 中至少有两行元素是相同的.

例如，方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$$

当 a,b,c 互不相同时，方程有三个解，分别是 $x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=c$.

计算 n 阶行列式，尤其是当阶数 n 较大时，应充分考虑行列式的特点，选择恰当的化简方法，有时须要借助递推公式法与数学归纳法. 在求解过程中，往往要与行列式的

按行(列)的展开法则相结合.

根据定理 1.5.1，n 阶行列式 $\boldsymbol{D}=\det(a_{ij})$ 按照第 j 行元素的展开式

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots\quad a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{\;n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中，$A_{j1},A_{j2},\cdots\ A_{jn}$ 分别表示第 j 行元素 $a_{j1},a_{j2},\cdots\ a_{jn}$ 的代数余子式.

当 $i\neq j$ 时，把上式中等号两边的第 j 行元素 $a_{j1},a_{j2},\cdots\ a_{jn}$，分别换成对应的第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots\ a_{in}$，而保持其余元素都不变，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots\quad a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{\;n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots\quad a_{in}A_{jn}=0，\ i\neq j$$

因此得以下推论.

推论 1.5.1 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots\quad a_{in}A_{jn}=0，\ i\neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=0，\ i\neq j$$

综合上述，对 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 可将定理 1.5.1 和推论 1.5.1 合并表示为

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots\quad a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}\boldsymbol{D}\ ,\ i=j\\ 0\ ,\ i\neq j\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}\boldsymbol{D}\ ,\ i=j\\ 0\ ,\ i\neq j\end{cases}$$

例 1.5.5 已知四阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

M_{ij}, A_{ij} 分别是 $\boldsymbol{D}$ 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式. 试求

(1) 求 $A_{41}-5A_{42}+3A_{43}-3A_{44}$；(2) $M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}$.

【解】 (1) $A_{41}-5A_{42}+3A_{43}-3A_{44}$ 的值等于把行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第四行元素分别用 $1,-5,3,-3$ 代替所得的行列式 $\boldsymbol{D}_1$ 的值，即

$$A_{41}-5A_{42}+3A_{43}-3A_{44}=\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4\leftrightarrow r_3]{r_4\div(-5)}5\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&2&-3\\0&0&8&-10\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-4r_3}5\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&2&-3\\0&0&0&2\end{vmatrix}$$

$$=40$$

(2) 由余子式与代数余子式之间关系可得

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}=-A_{21}+A_{22}-A_{23}+A_{24}$$

而 $-A_{21}+A_{22}-A_{23}+A_{24}$ 的值等于把行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第二行元素分别用 $-1,1,-1,1$ 代替所得的行列式 $\boldsymbol{D}_2$ 的值，即

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}=\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-1&1&-1&1\\2&0&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

行列式 $\boldsymbol{D}_2$ 的第二行元素和第四行元素成比例，利用行列式性质可得 $\boldsymbol{D}_2=0$. 因此

$$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}=0$$

习题 1.5

1. 已知三阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 第二行元素为 $-1,3,0$，其对应的代数余子式分别为 $1,5,-2$，

试求行列式 $\boldsymbol{D}$ 的值.

2. 已知四阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 第三列元素为 $-1,2,0,1$，其对应的余子式分别为 $5,3,-7,4$，试求行列式 $\boldsymbol{D}$ 的值.

3. 计算下列行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & -9 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$；　（4）$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & & \\ 0 & x & y & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & & x \end{vmatrix}$；

（5）$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & a & 0 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & a \end{vmatrix}$；　（6）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & n \end{vmatrix}$；

（7）$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1-a \end{vmatrix}$.

4. 证明下列各等式成立.

（1）$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a & x+a_1 \end{vmatrix} \quad x^n \cdot a_1x^{n-1}+\cdots \quad a_n \quad x+a_n$；

（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$.

5. 已知四阶行列式

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix},
$$

M_{ij}, A_{ij} 分别是 $\boldsymbol{D}$ 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式. 试求

（1）求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$；（2）$4M_{42}+2M_{43}+2M_{44}$.

1.6　克拉默定理

本节利用行列式的知识求解一类 n 元线性方程组. 为此首先介绍一般 n 元线性方程组的有关概念.

含 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots \quad a_{\ n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots \quad a_{\ n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots \quad a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.6.1}
$$

与二元、三元线性方程组类似，在一定的条件下，它的解可以用 n 阶行列式表示，即有

克拉默法则　若 n 元线性方程组(1.6.1)的系数行列式

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \ 0
$$

则方程组(1.6.1)有唯一解，且解可以表示为

$$
x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},\quad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{\boldsymbol{D}_n}{\boldsymbol{D}} \tag{1.6.2}
$$

其中，

$$
\boldsymbol{D}_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{\ j} & b & a_{\ j} & \cdots & a_{\ n} \\ a_{21} & \cdots & a_{\ j} & b & a_{\ j} & \cdots & a_{\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j} & b_n & a_{n\ j} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,2,\cdots\ n
$$

是将系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的第 j 列元素 $a_{j1}, a_{j2}, \cdots\ a_{jn}$ 用方程组右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 代入得到的行列式.

证　首先证明式(1.6.2)是方程组(1.6.1)的解.

任取第 i $(i=1,2,\cdots\ n$ 个方程，将解 $x_j=\dfrac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}}$，$j=1,2,\cdots\ n$ 代入方程的左端

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots \quad \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{D}} \quad \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{D}} \quad \cdots \quad \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{D}}$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{D}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{D}_j$$

将 $\boldsymbol{D}_j$ 按照第 j 列元素展开，

$$\boldsymbol{D}_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots \quad b_nA_{nj}$$

代入上式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\boldsymbol{D}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{D}_j &= \frac{1}{\boldsymbol{D}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_1A_{1j} + \cdots \qquad \cdots \\
&= \frac{1}{\boldsymbol{D}}(b_1\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{1j} + \cdots \quad \sum_{j=1}^{n} \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^{n} \quad) \\
&= \frac{1}{\boldsymbol{D}}(0 + \cdots \quad \boldsymbol{D} \quad \cdots \\
&= b_i
\end{aligned}$$

因此式(1.6.2)是方程组(1.6.1)的解.

接下来，证明解的唯一性. 假设

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots \ x_n \quad c_n$$

也是方程组(1.6.1)的解，只需证明 $c_j = \dfrac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}}$ ($j = 1, 2, \cdots\ n$ 即可.

把 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots\ x_n \quad c_n$ 代入方程组(1.6.1)，可得

$$\begin{cases}
a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots \quad a_{\ n}c_n = b_1 \\
a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots \quad a_{\ n}c_n = b_2 \\
\qquad\vdots \\
a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots \quad a_{nn}c_n = b_n
\end{cases} \tag{1.6.3}$$

将式(1.6.3)中第 i ($i = 1, 2, \cdots\ n$ 个方程的两端分别乘以系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 中元素 a_{i1} 的代数余子式 A_{i1}，得

$$\begin{cases}
a_{11}A_{11}c_1 + a_{12}A_{11}c_2 + \cdots \quad a_{\ n}A_{\ 1}c_n = b_1A_{11} \\
a_{21}A_{21}c_1 + a_{22}A_{21}c_2 + \cdots \quad a_{\ n}A_{\ 1}c_n = b_2A_{21} \\
\qquad\vdots \\
a_{n1}A_{n1}c_1 + a_{n2}A_{n1}c_2 + \cdots \quad a_{nn}A_{n1}c_n = b_nA_{n1}
\end{cases} \tag{1.6.4}$$

将式(1.6.4)中 n 个方程相加，得

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1})c_1 + (\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1})c_2 + \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1})c_n = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{i1}$$

由

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{i1} = a_{1j}A_{11} + a_{2j}A_{21} + \cdots \quad a_{nj}A_{n1} = \begin{cases} \boldsymbol{D}, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots \quad b_n A_n \ = \boldsymbol{D}_1$$

得 $\boldsymbol{D}c_1 = \boldsymbol{D}_1$. 因为 $\boldsymbol{D} \neq 0$，所以 $c_1 = \dfrac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}$. 同理可得 $c_j = \dfrac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}}$ $(j = 2, 3, \cdots n$.

综上所述，当系数行列式 $\boldsymbol{D} \neq 0$ 时，线性方程组(1.6.1)有唯一解，且解为

$$x_j = \frac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}} \ (j = 1, 2, \cdots n$$

例 1.6.1　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ \ x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - \ x_3 + \ 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - \ x_3 - \ 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + \ x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

【解】　方程组的系数行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_1]{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & -3 & -7 \\ -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -13 & 8 \\ 0 & -5 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -13 & 8 \\ -5 & 14 \end{vmatrix} = -142$$

又

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -284$$

$$\boldsymbol{D}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426$$

$$
\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 2 & -1 & -2\\ 2 & -3 & -1 & -2\\ 3 & 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=142
$$

于是解得

$$
x_1=1，\quad x_2=2，\quad x_3=3，\quad x_4=-1
$$

例 1.6.2 已知三次曲线 $y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 在点 $x=\pm1$, $x=\pm2$ 处的值

$$
f(1)=f(-1)=f(2)=6\,,\ f(-2)=-6
$$

试求其系数 a_0,a_1,a_2,a_3 .

【解】 把四个点的坐标代入曲线方程，得关于 x 的 a_0,a_1,a_2,a_3 线性方程组

$$
\begin{cases}
a_0+\quad a_1+\quad a_2+\quad a_3=6\\
a_0+(-1)a_1+(-1)^2a_2+(-1)^3a_3=6\\
a_0+\quad 2a_1+\quad 2^2a_2+\quad 2^3a_3=6\\
a_0+(-2)a_1+(-2)^2a_2+(-2)^3a_3=-6
\end{cases}
$$

其系数行列式为

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3\\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3\\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -2\\ 1 & (-1)^2 & 2^2 & (-2)^2\\ 1 & (-1)^3 & 2^3 & (-2)^3\end{vmatrix}
$$

利用范德蒙行列式的结果可得

$$
\boldsymbol{D}=(-2-2)(-2+1)(-2-1)(2+1)(2-1)(-1-1)=72
$$

又

$$
\boldsymbol{D}_0=\begin{vmatrix}6 & 1 & 1 & 1\\ 6 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3\\ 6 & 2 & 2^2 & 2^3\\ -6 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3\end{vmatrix}=576
$$

$$
\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}1 & 6 & 1 & 1\\ 1 & 6 & (-1)^2 & (-1)^3\\ 1 & 6 & 2^2 & 2^3\\ 1 & -6 & (-2)^2 & (-2)^3\end{vmatrix}=-72
$$

$$
\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 6 & 1\\ 1 & -1 & 6 & (-1)^3\\ 1 & 2 & 6 & 2^3\\ 1 & -2 & -6 & (-2)^3\end{vmatrix}=-144
$$

$$
D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & (-1)^2 & 6 \\ 1 & 2 & 2^2 & 6 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & -6 \end{vmatrix} = 72
$$

解得

$$
a_0 = 8，\ a_1 = -1，\ a_2 = -2，\ a_3 = 1
$$

因此过已知四点确定唯一的三次曲线方程为

$$
y = f(x) = 8 - x - 2x^2 + x^3
$$

克拉默法则的意义在于方程组的解能用系数项和常数项有规律地表示出来，这对理论研究很重要，但有其局限性. 当方程的个数较多时计算过程比较麻烦(需要计算 $n+1$ 个行列式)；当方程组的系数行列式为 0，或者方程组所包含未知数的个数与方程的个数不相等时，该法则不适用，如何求解这类方程组我们在第 3 章中讨论.

撇开求解公式(1.6.2)，克拉默法则可表述为下面的定理.

定理 1.6.1　若线性方程组(1.6.1)的系数行列式 $\boldsymbol{D} \neq 0$，则(1.6.1)一定有解，且解唯一.

定理 1.6.1 的逆否定理为

定理 1.6.2　若线性方程组(1.6.1)无解或至少有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

线性方程组(1.6.1)右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零时，称线性方程组(1.6.1)为**非齐次线性方程组**；当 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零时，称线性方程组(1.6.1)为**齐次线性方程组**.

对于齐次线性方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots & = 0 \\ \qquad\qquad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots & = 0 \end{cases} \tag{1.6.5}
$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都等于零时，方程一定成立，因此，齐次线性方程组(1.6.5)有一组解

$$
x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots\ x_n
$$

称为方程组的**零解**. 若存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零时方程也成立，则称齐次线性方程组(1.6.5)有非零解. 齐次线性方程组(1.6.5)一定有零解，但不一定有非零解.

把定理 1.6.1 应用于齐次线性方程组(1.6.5)，可得

定理 1.6.3　若齐次线性方程组(1.6.5)的系数行列式 $\boldsymbol{D} \neq 0$，则方程组(1.6.5)只有零解.

定理 1.6.4　若齐次线性方程组(1.6.5)有非零解，则其系数行列式 $\boldsymbol{D} = 0$.

例 1.6.3　当 λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ \lambda x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

【解】 由定理 1.6.4，齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix}=-(1+\lambda)(2-\lambda)=0$$

由此得，$\lambda=-1$ 或 $\lambda=2$.

容易验证，当 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=2$ 时，方程组确有非零解.

习题 1.6

1. 求下列方程组的解.

(1) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-5y-3z=10 \\ 4x+8y+2z=4 \end{cases}$；(2) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+2y=1 \\ x-z=4 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$；(4) $\begin{cases} -x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_1-x_2+2x_4=0 \\ -x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$.

2. 求一个二次多项，当 $f(x)=ax^2+bx+c$ 时，满足 $f(-1)=-6, f(1)=-2, f(2)=-3$.

3. 已知下列齐次线性方程组只有零解，试求 λ 应满足的条件.

(1) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} (1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$.

4. 设 a,b,c,d 为不全为零的实数，证明线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0 \\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0 \\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0 \end{cases}$$

只有零解.

5. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + bx_4 = 0 \end{cases}$$

有非零解，则 a,b 应满足什么条件？