第 3 章　模糊控制的理论基础

3.1　概　　述

模糊控制是建立在人工经验基础之上的。对于一个熟练的操作人员，他往往凭借丰富的实践经验，采取适当的对策来巧妙地控制一个复杂过程。若能将这些熟练操作员的实践经验加以总结和描述，并用语言表达出来，就会得到一种定性的、不精确的控制规则。如果用模糊数学将其定量化，就转化为模糊控制算法，从而形成模糊控制理论。

模糊控制尚无统一的定义。从广义上，可将模糊控制定义为："以模糊集合理论、模糊语言变量及模糊推理为基础的一类控制方法"，或定义为"采用模糊集合理论和模糊逻辑，并同传统的控制理论相结合，模拟人的思维方式，对难以建立数学模型的对象实施的一种控制方法"。

模糊控制理论具有一些明显的特点：

① 模糊控制不需要被控对象的数学模型。模糊控制是以人对被控对象的控制经验为依据而设计的控制器，故无须知道被控对象的数学模型。

② 模糊控制是一种反映人类智慧的智能控制方法。模糊控制采用人类思维中的模糊量，如"高"、"中"、"低"、"大"、"小"等，控制量由模糊推理导出。这些模糊量和模糊推理是人类智能活动的体现。

③ 模糊控制易于被人们接受。模糊控制的核心是控制规则，模糊规则是用语言来表示的，如"今天气温高，则今天天气暖和"等，易于被一般人所接受。

④ 构造容易。模糊控制规则易于软件实现。

⑤ 鲁棒性和适应性好。通过专家经验设计的模糊规则可以对复杂的对象进行有效的控制。

3.2　模 糊 集 合

3.2.1　模糊集合的概念

对大多数应用系统而言，其主要且重要的信息来源有两种，即来自传感器的数据信息和来自专家的语言信息。数据信息常用 0.5，2，3，3.5 等数字来表示，而语言信息则用诸如"大"、"小"、"中等"、"非常小"等文字来表示。传统的工程设计方法只能用数据信息而无法使用语言信息，而人类解决问题时所使用的大量知识是经验性的，它们通常是用语言信息来描述的。语言信息通常呈经验性，是模糊的。因此，如何描述模糊语言信息成为解决问题的关键。

模糊集合的概念是由美国加利福尼亚大学著名教授 L. A. Zadeh 于 1965 年首先提出来的。模糊集合的引入，可将人的判断、思维过程用比较简单的数学形式直接表达出来。模糊集合理论为人类提供了能充分利用语言信息的有效工具。模糊集合是模糊控制的数学基础。

1. 特征函数和隶属函数

在数学上经常用到集合的概念。

例如，集合 A 由 4 个离散值 x_1, x_2, x_3, x_4 组成，即

$$A=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

例如,集合 A 由 0 到 1 之间的连续实数值组成,即

$$A = \{x, x \in R, 0 \leqslant x \leqslant 1.0\}$$

以上两个集合是完全不模糊的。对任意元素 x,只有两种可能:属于 A,不属于 A。这种特性可以用特征函数 $\mu_A(x)$ 来描述,即

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \tag{3.1}$$

为了表示模糊概念,需要引入模糊集合和隶属函数及隶属度的概念。隶属函数定义为

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ (0,1) & x \in A \text{ 的程度} \\ 0 & x \notin A \end{cases} \tag{3.2}$$

式中,A 称为模糊集合,由 0,1 及 $\mu_A(x)$ 构成,$\mu_A(x)$ 表示元素 x 属于模糊集合 A 的程度,取值范围为[0,1],称 $\mu_A(x)$ 为 x 属于模糊集合 A 的隶属度。

隶属度将普通集合中特征函数的取值{0,1}扩展到闭区间[0,1],即可用 0 到 1 之间的实数来表达某一元素属于模糊集合的程度。

2. 模糊集合的表示

① 模糊集合 A 由离散元素构成,表示为

$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \cdots + \mu_i/x_i + \cdots \tag{3.3}$$

或

$$A = \{(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2), \cdots, (x_i, \mu_i), \cdots\} \tag{3.4}$$

② 模糊集合 A 由连续函数构成,各元素的隶属度就构成了隶属度函数(Membership Function) $\mu_A(x)$,此时 A 表示为

$$A = \int \mu_A(x)/x \tag{3.5}$$

在模糊集合的表达中,符号"/"、"+"和"$\int$"不代表数学意义上的除号、加号和积分,它们是模糊集合的一种表示方式,表示"构成"或"属于"。

模糊集合是以隶属函数 $\mu_A(x)$ 来描述的,隶属度的概念是模糊集合理论的基石。

【例 3.1】 设论域 $U=$ {张三,李四,王五},评语为"学习好"。设 3 个人学习成绩总评分是张三得 95 分,李四得 90 分,王五得 85 分,3 人都学习好,但又有差异。

若采用普通集合的观点,选取特征函数

$$C_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{学习好} \in A \\ 0 & \text{学习差} \in A \end{cases}$$

此时特征函数分别为 C_A(张三)$=1$,C_A(李四)$=1$,C_A(王五)$=1$。这样就反映不出三者的差异。若采用模糊子集的概念,选取[0,1]区间上的隶属度来表示它们属于"学习好"模糊子集 A 的程度,就能够反映出 3 人的差异。

采用隶属函数 $\frac{x}{100}$,由 3 人的成绩可知 3 人"学习好"的隶属度为 μ_A(张三)$=0.95$,μ_A(李四)$=0.90$,μ_A(王五)$=0.85$。"学习好"这一模糊子集 A 可表示为

$$A = \{0.95, 0.90, 0.85\}$$

其含义为张三、李四、王五属于"学习好"的程度分别是 0.95,0.90,0.85。

【例 3.2】 以年龄为论域,取 $x = [0, 100]$。Zadeh 给出了"年轻"的模糊集 Y,其隶属函数为

$$Y(x)=\begin{cases}1.0 & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<x<100\end{cases}$$

“年轻”的隶属函数仿真程序见本章附录程序 chap3_1.m。隶属函数曲线如图 3-1 所示。

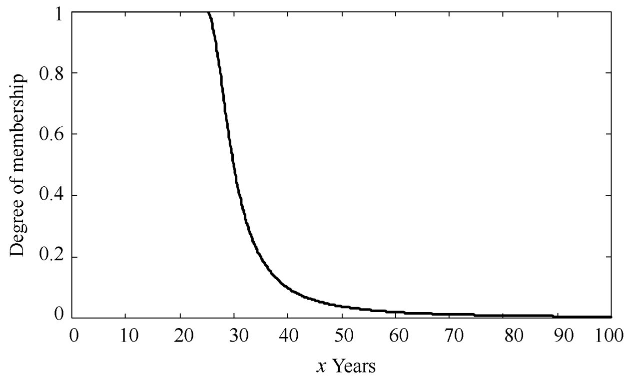

图 3-1 “年轻”的隶属函数曲线

3.2.2 模糊集合的运算

1. 模糊集合的基本运算

由于模糊集合是用隶属函数来表征的，因此两个子集之间的运算实际上就是逐点对隶属度进行相应的运算。

(1) 空集

模糊集合 A 的空集$\varnothing$为普通集，它的隶属度为 0，即

$$A=\varnothing\Leftrightarrow\mu_A(u)=0 \tag{3.6}$$

(2) 全集

模糊集合 A 的全集 E 为普通集，它的隶属度为 1，即

$$A=E\Leftrightarrow\mu_A(u)=1 \tag{3.7}$$

(3) 等集

两个模糊集 A 和 B，若对所有元素 u，它们的隶属函数相等，则 A 和 B 也相等，即

$$A=B\Leftrightarrow\mu_A(u)=\mu_B(u) \tag{3.8}$$

(4) 补集

若 $\overline{A}$ 为 A 的补集，则

$$\overline{A}\Leftrightarrow\mu_{\overline{A}}(u)=1-\mu_A(u) \tag{3.9}$$

例如，设 A 为“成绩好”的模糊集，某学生 u_0 属于“成绩好”的隶属度 $\mu_A(u_0)=0.8$，则 u_0 属于“成绩差”的隶属度 $\mu_{\overline{A}}(u_0)=1-0.8=0.2$。

(5) 子集

若 B 为 A 的子集，则

$$B\subseteq A\Leftrightarrow\mu_B(u)\leqslant\mu_A(u) \tag{3.10}$$

(6) 并集

若 C 为 A 和 B 的并集，则

$$C=A\cup B$$

一般地，有

$$A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u)) = \mu_A(u) \vee \mu_B(u) \tag{3.11}$$

(7) 交集

若 C 为 A 和 B 的交集，则

$$C = A \cap B$$

一般地，有

$$A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)) = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u) \tag{3.12}$$

(8) 模糊运算的基本性质

模糊集合除具有上述基本运算性质外，还具有如表 3-1 所示的运算性质。

表 3-1　模糊运算的基本性质

名　　称	运 算 法 则
1. 幂等律	$A \cup A = A, A \cap A = A$
2. 交换律	$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
3. 结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. 吸收律	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
5. 分配律	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. 复原律	$\overline{\overline{A}} = A$
7. 对偶律	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
8. 两极律	$A \cup E = E, A \cap E = A$ $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$

【例 3.3】　设 $A = \frac{0.9}{u_1} + \frac{0.2}{u_2} + \frac{0.8}{u_3} + \frac{0.5}{u_4}, B = \frac{0.3}{u_1} + \frac{0.1}{u_2} + \frac{0.4}{u_3} + \frac{0.6}{u_4}$，求 $A \cup B, A \cap B$。

解　　$A \cup B = \frac{0.9}{u_1} + \frac{0.2}{u_2} + \frac{0.8}{u_3} + \frac{0.6}{u_4}, A \cap B = \frac{0.3}{u_1} + \frac{0.1}{u_2} + \frac{0.4}{u_3} + \frac{0.5}{u_4}$

【例 3.4】　试证明普通集合中的互补律在模糊集合中不成立，即 $\mu_A(u) \vee \mu_{\overline{A}}(u) \neq 1, \mu_A(u) \wedge \mu_{\overline{A}}(u) \neq 0$。

证明　　设 $\mu_A(u) = 0.4$，则 $\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - 0.4 = 0.6$，则

$$\mu_A(u) \vee \mu_{\overline{A}}(u) = 0.4 \vee 0.6 = 0.6 \neq 1$$

$$\mu_A(u) \wedge \mu_{\overline{A}}(u) = 0.4 \wedge 0.6 = 0.4 \neq 0$$

2. 模糊算子

模糊集合的逻辑运算实质上就是隶属函数的运算过程。采用隶属函数的取大(max)-取小(min)进行模糊集合的并、交逻辑运算是目前最常用的方法。但还有其他公式，这些公式统称为“模糊算子”。

设有模糊集合 A、B 和 C，常用的模糊算子如下：

(1) 交运算算子

设 $C = A \cap B$，有 3 种模糊算子。

① 模糊交算子

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{3.13}$$

② 代数积算子

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{3.14}$$

③ 有界积算子

$$\mu_C(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} \tag{3.15}$$

(2) 并运算算子

设 $C = A \cup B$，有 3 种模糊算子。

① 模糊并算子

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{3.16}$$

② 代数和算子

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{3.17}$$

③ 有界和算子

$$\mu_C(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\} \tag{3.18}$$

(3) 平衡算子

当隶属函数取大、取小运算时，不可避免地要丢失部分信息，采用一种平衡算子，即“γ 算子”，可起到补偿作用。

设 A 和 B 经过平衡运算后得 C，则

$$\mu_C(x) = [\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)]^{1-\gamma} \cdot [1-(1-\mu_A(x)) \cdot (1-\mu_B(x))]^{\gamma} \tag{3.19}$$

式中，γ 取值为[0,1]。当 $\gamma = 0$ 时，$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$，相当于 $A \cap B$ 时的代数积算子；当 $\gamma = 1$ 时，$\mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$，相当于 $A \cup B$ 时的代数和算子。

平衡算子目前已经应用于德国 Inform 公司研制的著名模糊控制软件 Fuzzy-Tech 中。

3.3 隶属函数

1. 隶属函数的特点

普通集合用特征函数来表示，模糊集合用隶属函数来描述。隶属函数很好地描述了事物的模糊性。隶属函数有以下两个特点。

① 隶属函数的值域为[0,1]，它将普通集合只能取 0,1 两个值，推广到[0,1] 闭区间上连续取值。隶属函数的值 $\mu_A(x)$ 越接近于 1，表示元素 x 属于模糊集合 A 的程度越大。反之，$\mu_A(x)$ 越接近于 0，表示元素 x 属于模糊集合 A 的程度越小。

② 隶属函数完全刻画了模糊集合，隶属函数是模糊数学的基本概念，不同的隶属函数所描述的模糊集合也不同。

2. 几种典型的隶属函数及其 Matlab 表示

典型的隶属函数有 11 种，即双 S 形隶属函数、联合高斯型隶属函数、高斯型隶属函数、广义钟形隶属函数、Π 形隶属函数、双 S 形乘积隶属函数、S 状隶属函数、S 形隶属函数、梯形隶属函数、三角形隶属函数、Z 形隶属函数。在模糊控制中应用较多的隶属函数有以下 6 种。

(1) 高斯型隶属函数

高斯型隶属函数由两个参数 σ 和 c 确定，即

$$f(x,\sigma,c) = \mathrm{e}^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.20}$$

式中，参数 σ 通常为正，参数 c 用于确定曲线的中心。Matlab 表示为 gaussmf(x,[σ,c])。

(2) 广义钟形隶属函数

广义钟形隶属函数由 3 个参数 a,b,c 确定，即

$$f(x,a,b,c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}} \tag{3.21}$$

式中，参数 a 和 b 通常为正，参数 c 用于确定曲线的中心。Matlab 表示为 gbellmf(x,[a,b,c])。

(3)S 形隶属函数

S 形函数由参数 a 和 c 确定，即

$$f(x,a,c)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-a(x-c)}} \tag{3.22}$$

式中，参数 a 的正负符号决定了 S 形隶属函数的开口朝左或朝右，用来表示“正大”或“负大”的概念。Matlab 表示为 sigmf(x,[a,c])。

(4) 梯形隶属函数

梯形曲线可由 4 个参数 a,b,c,d 确定，即

$$f(x,a,b,c,d)=\begin{cases}0 & x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b\\ 1 & b\leqslant x\leqslant c\\ \dfrac{d-x}{d-c} & c\leqslant x\leqslant d\\ 0 & x\geqslant d\end{cases} \tag{3.23}$$

式中，参数 a 和 d 确定梯形的“脚”，而参数 b 和 c 确定梯形的“肩膀”。Matlab 表示为 trapmf (x,[a,b,c,d])。

(5) 三角形隶属函数

三角形曲线的形状由 3 个参数 a,b,c 确定，即

$$f(x,a,b,c)=\begin{cases}0 & x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & b\leqslant x\leqslant c\\ 0 & x\geqslant c\end{cases} \tag{3.24}$$

式中，参数 a 和 c 确定三角形的“脚”，而参数 b 确定三角形的“峰”。Matlab 表示为 trimf(x,[a,b,c])。

(6)Z 形隶属函数

这是基于样条函数的曲线，因其呈现 Z 形状而得名。参数 a 和 b 确定了曲线的形状。Matlab 表示为 zmf(x,[a,b])。

在上述隶属函数中，高斯型隶属函数、广义钟形隶属函数、梯形隶属函数和三角形隶属函数可用于描述具有中间模糊状态的模糊概念，如“中等个”、“中年人” 等。S 形隶属函数和 Z 形隶属函数可用于描述一个完整的模糊概念，如水箱液位的高低、人的胖瘦等。

【例 3.5】 隶属函数的仿真：针对上述描述的 6 种隶属函数进行仿真。$x\in[0,10]$，M 为隶属函数的类型，其中 $M=1$ 为高斯型隶属函数，$M=2$ 为广义钟形隶属函数，$M=3$ 为 S 形隶属函数，$M=4$ 为梯形隶属函数，$M=5$ 为三角形隶属函数，$M=6$ 为 Z 形隶属函数。

仿真程序见本章附录程序 chap3_2. m，仿真结果如图 3-2 至图 3-7 所示。

3. 模糊系统的设计

采用隶属函数可设计模糊系统。例如，采用三角形隶属函数，按[−3,3]范围分为 7 个模糊等级，即负大、负中、负小、零、正小、正中、正大，建立一个模糊系统。

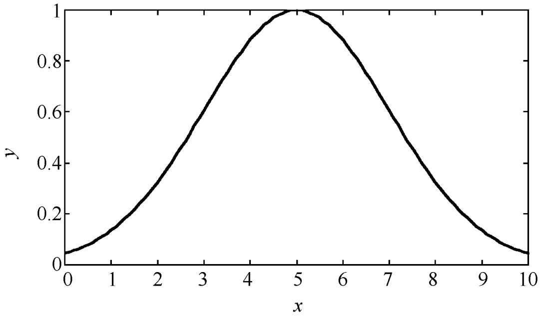

图 3-2　高斯型隶属函数($M = 1$)

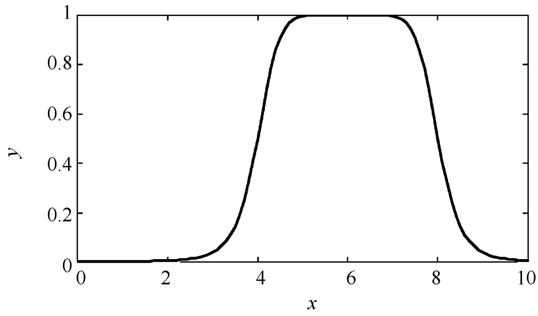

图 3-3　广义钟形隶属函数($M = 2$)

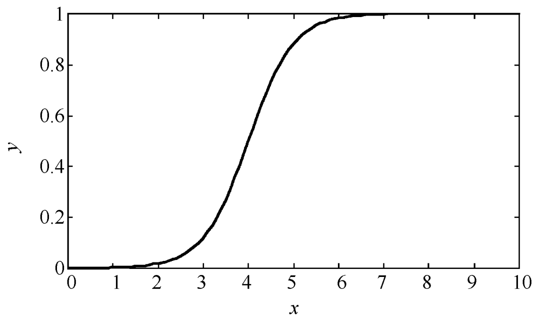

图 3-4　S形隶属函数($M = 3$)

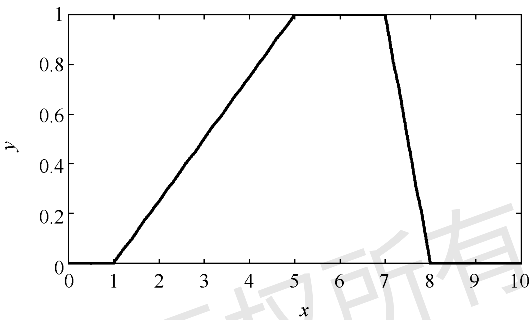

图 3-5　梯形隶属函数($M = 4$)

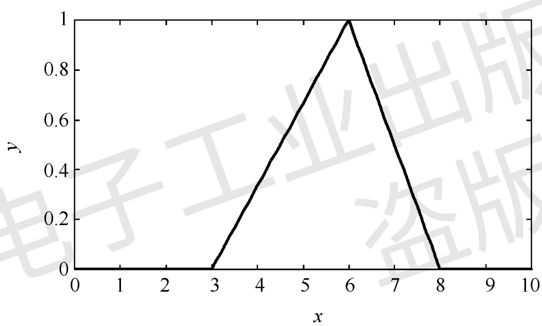

图 3-6　三角形隶属函数($M = 5$)

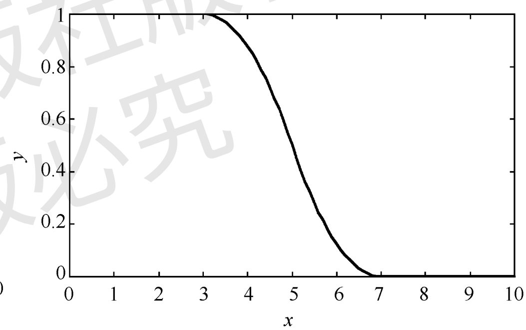

图 3-7　Z形隶属函数($M = 6$)

模糊系统隶属函数设计程序见本章附录程序 chap3_3.m,仿真结果如图 3-8 所示。

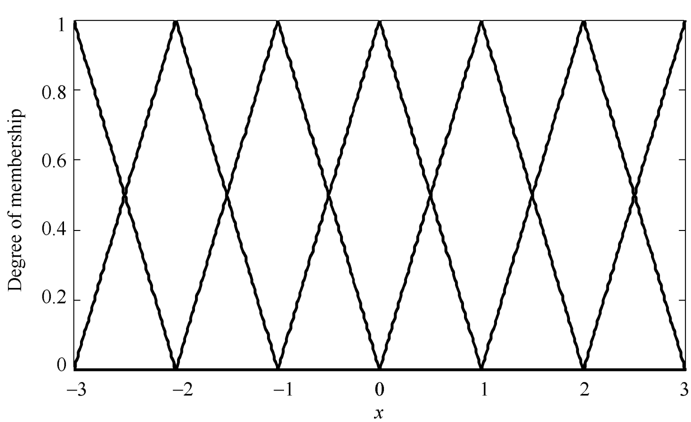

图 3-8　由三角形隶属函数构成的模糊系统

4. 隶属函数的确定方法

隶属函数是模糊控制的应用基础。目前还没有成熟的方法来确定隶属函数，主要还停留在经验和实验的基础上。通常的方法是初步确定粗略的隶属函数，然后通过“学习”和实践来不断地调整和完善。遵照这一原则的隶属函数选择方法有以下几种。

(1) 模糊统计法

根据所提出的模糊概念进行调查统计，提出与之对应的模糊集 A，通过统计实验，确定不同元素隶属于 A 的程度，即

$$u_0 \text{ 对模糊集 } A \text{ 的隶属度} = \frac{u_0 \in A \text{ 的次数}}{\text{试验总次数 } N} \tag{3.25}$$

(2) 主观经验法

当论域为离散论域时，可根据主观认识，结合个人经验，经过分析和推理，直接给出隶属度。这种确定隶属函数的方法已经被广泛应用。

(3) 神经网络法

利用神经网络的学习功能，由神经网络自动生成隶属函数，并通过网络的学习自动调整隶属函数的值。

3.4 模糊关系及其运算

描述客观事物间联系的数学模型称为关系。集合论中的关系精确地描述了元素之间是否相关，而模糊集合论中的模糊关系则描述了元素之间相关的程度。普通二元关系是用简单的“有”或“无”来衡量事物之间的关系，因此无法用来衡量事物之间关系的程度。模糊关系是指多个模糊集合的元素间所具有关系的程度。模糊关系在概念上是普通关系的推广，普通关系则是模糊关系的特例。

3.4.1 模糊矩阵

【例 3.6】 设有一组同学 X，$X=\{$张三，李四，王五$\}$，他们的功课为 Y，$Y=\{$英语，数学，物理，化学$\}$。他们的考试成绩见表 3-2。

取隶属函数 $\mu(u)=\frac{u}{100}$，其中 u 为成绩。如果将他们的成绩转化为隶属度，则构成一个 $x \times y$ 上的一个模糊关系 $\boldsymbol{R}$，见表 3-3。

表 3-2 考试成绩表

姓名 \ 功课	英语	数学	物理	化学
张三	70	90	80	65
李四	90	85	76	70
王五	50	95	85	80

表 3-3 考试成绩表的模糊化

姓名 \ 功课	英语	数学	物理	化学
张三	0.70	0.90	0.80	0.65
李四	0.90	0.85	0.76	0.70
王五	0.50	0.95	0.85	0.80

将表 3-3 写成矩阵形式，得

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 0.70 & 0.90 & 0.80 & 0.65 \\ 0.90 & 0.85 & 0.76 & 0.70 \\ 0.50 & 0.95 & 0.85 & 0.80 \end{bmatrix}$$

该矩阵称为模糊矩阵，其中各个元素必须在$[0,1]$闭环区间内取值。矩阵 $\boldsymbol{R}$ 也可以用关系图

来表示，如图 3-9 所示。

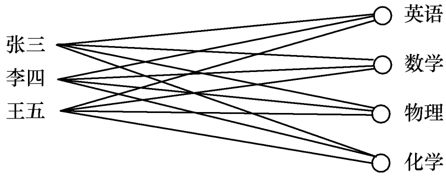

图 3-9　模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的关系图

3.4.2　模糊矩阵的运算与模糊关系

设有 n 阶模糊矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，且 $i,j=1,2,\cdots,n$，则定义如下几种模糊矩阵的运算方式。

(1) 相等

若 $a_{ij}=b_{ij}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

(2) 包含

若 $a_{ij}\leqslant b_{ij}$，则 $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$。

(3) 并运算

若 $c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}$，则 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的并，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$。

(4) 交运算

若 $c_{ij}=a_{ij}\wedge b_{ij}$，则 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的交，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$。

(5) 补运算

若 $c_{ij}=1-a_{ij}$，则 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的补，记为 $\boldsymbol{C}=\overline{\boldsymbol{A}}$。

【例 3.7】　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1\\0.3 & 0.9\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\0.2 & 0.1\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.7\vee 0.4 & 0.1\vee 0.9\\0.3\vee 0.2 & 0.9\vee 0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.9\\0.3 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.7\wedge 0.4 & 0.1\wedge 0.9\\0.3\wedge 0.2 & 0.9\wedge 0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.1\\0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1-0.7 & 1-0.1\\1-0.3 & 1-0.9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.9\\0.7 & 0.1\end{bmatrix}$$

模糊关系的定义为：设 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$ 是两个非空集合，则 $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ 的一个模糊子集称为 $\boldsymbol{X}$ 到 $\boldsymbol{Y}$ 的一个模糊关系。

3.4.3　模糊关系的合成

所谓合成，即由两个或两个以上的关系构成一个新的关系。模糊关系也存在合成运算，是通过模糊矩阵的合成进行的。

$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 分别为 $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}$ 上的模糊关系，而 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的合成是 $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{W}$ 上的模糊关系，记为 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$，其隶属函数为

$$\mu_{R\circ S}(u,w)=\bigvee_{v\in V}\{\mu_R(u,v)\wedge\mu_S(v,w)\},u\in\boldsymbol{U},w\in\boldsymbol{W}\tag{3.26}$$

【例 3.8】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$,其中

$$c_{11}=(a_{11}\wedge b_{11})\vee(a_{12}\wedge b_{21})$$
$$c_{12}=(a_{11}\wedge b_{12})\vee(a_{12}\wedge b_{22})$$
$$c_{21}=(a_{21}\wedge b_{11})\vee(a_{22}\wedge b_{21})$$
$$c_{22}=(a_{21}\wedge b_{12})\vee(a_{22}\wedge b_{22})$$

当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.9\end{bmatrix}$时,有

$$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.6 & 0.6\end{bmatrix}$$

可见,$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}$。

采用 Matlab 可实现模糊矩阵的合成,仿真程序见附录程序 chap3_4.m。

【例 3.9】 某家中子女和父母的长相“相似关系”$\boldsymbol{R}$ 为模糊关系,可表示为

	父	母
子	0.2	0.8
女	0.6	0.1

用模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 表示为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}$$

父母与祖父的“相似关系”$\boldsymbol{S}$ 也是模糊关系,可表示为

	祖父	祖母
父	0.5	0.7
母	0.1	0

用模糊矩阵 $\boldsymbol{S}$ 表示为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

那么在该家中,孙子、孙女与祖父、祖母的相似程度应该如何呢?

模糊关系的合成运算为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}&=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.1 & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}(0.2\wedge 0.5)\vee(0.8\wedge 0.1) & (0.2\wedge 0.7)\vee(0.8\wedge 0)\\ (0.6\wedge 0.5)\vee(0.1\wedge 0.1) & (0.6\wedge 0.7)\vee(0.1\wedge 0)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.5 & 0.6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

该结果表明,孙子与祖父、祖母的相似程度分别为 0.2 和 0.2,而孙女与祖父、祖母的相似程度分别为 0.5 和 0.6。

3.5 模糊推理

3.5.1 模糊语句

将含有模糊概念的语法规则所构成的语句称为模糊语句。根据其语义和构成语法规则的不同,可分为以下几种类型。

① 模糊陈述句:语句本身具有模糊性,又称为模糊命题。如“今天天气很热”。

② 模糊判断句:是模糊逻辑中最基本的语句。语句形式:“x 是 a”,记为(a),且 a 所表示的概念是模糊的。如“张三是好学生”。

③ 模糊推理句:语句形式:若 x 是 a,则 x 是 b,则 $(a) \rightarrow (b)$ 为模糊推理语句。如“今天是晴天,则今天暖和”。

3.5.2 模糊推理

常用的有两种模糊推理语句,即

If A then B else C

If A and B then C

下面以第二种推理语句为例进行探讨,该语句可构成一个简单的模糊控制器,如图 3-10 所示。

图 3-10　两输入单输出模糊控制器

其中,$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 分别为论域 U 上的模糊集合,$\boldsymbol{A}$ 为误差信号上的模糊子集,$\boldsymbol{B}$ 为误差变化率上的模糊子集,$\boldsymbol{C}$ 为控制器输出上的模糊子集。

常用的模糊推理有两种方法:Zadeh 法和 Mamdani 法。Mamdani 推理法是一种模糊控制中普遍使用的方法,其本质是一种合成推理方法。

模糊推理语句“If A and B then C”蕴涵的关系为$(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C})$,根据 Mamdani 模糊推理方法,$\boldsymbol{A} \in U$, $\boldsymbol{B} \in U$, $\boldsymbol{C} \in U$ 是三元模糊关系,其关系矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})^{\mathrm{T1}} \circ \boldsymbol{C} \tag{3.27}$$

式中,$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})^{\mathrm{T1}}$ 为模糊关系矩阵$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_{m \times n}$构成的 $m \times n$ 列向量,T1 为列向量转换,n 和 m 分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 论域元素的个数。

基于 Mamdani 模糊推理方法,根据模糊关系 $\boldsymbol{R}$,可求得给定输入 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_1$ 对应的输出 $\boldsymbol{C}_1$,即

$$\boldsymbol{C}_1 = (\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T2}} \circ \boldsymbol{R} \tag{3.28}$$

式中,$(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T2}}$ 为模糊关系矩阵$(\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{B}_1)_{m \times n}$ 构成的 $m \times n$ 行向量,T2 为行向量转换。

【例 3.10】 设论域 $X = \{a_1, a_2, a_3\}$,$Y = \{b_1, b_2, b_3\}$,$Z = \{c_1, c_2, c_3\}$,已知 $\boldsymbol{A} = \dfrac{0.5}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{0.1}{a_3}$,$\boldsymbol{B} = \dfrac{0.1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{0.6}{a_3}$,$\boldsymbol{C} = \dfrac{0.4}{c_1} + \dfrac{1}{c_2}$。试确定“If A and B then C”所决定的模糊关系 $\boldsymbol{R}$,以及输入为 $\boldsymbol{A}_1 = \dfrac{1.0}{a_1} + \dfrac{0.5}{a_2} + \dfrac{0.1}{a_3}$,$\boldsymbol{B}_1 = \dfrac{0.1}{b_1} + \dfrac{0.5}{b_2} + \dfrac{1}{b_3}$ 时的输出 $\boldsymbol{C}_1$。

解　采用模糊交算子式(3.13)来实现 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的“与”关系,则

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\wedge\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.5\\1\\0.1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0.1 & 1 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 0.5\\0.1 & 1.0 & 0.6\\0.1 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 矩阵扩展成如下列向量

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^{\mathrm{T1}}=[0.1\quad 0.5\quad 0.5\quad 0.1\quad 1.0\quad 0.6\quad 0.1\quad 0.1\quad 0.1]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^{\mathrm{T1}}\circ\boldsymbol{C}=[0.1\quad 0.5\quad 0.5\quad 0.1\quad 1.0\quad 0.6\quad 0.1\quad 0.1\quad 0.1]^{\mathrm{T}}\circ$

$$[0.4\quad 1]=\begin{bmatrix}0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

当输入为 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_1$时，有

$$\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\wedge\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1\\0.5\\0.1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 1\\0.1 & 0.5 & 0.5\\0.1 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{B}_1$矩阵扩展成如下行向量

$$(\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T2}}=[0.1\quad 0.5\quad 1\quad 0.1\quad 0.5\quad 0.5\quad 0.1\quad 0.1\quad 0.1]$$

最后得 $\boldsymbol{C}_1$ 为

$$\boldsymbol{C}_1=(\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T2}}\circ\boldsymbol{R}=[0.1\quad 0.5\quad 1\quad 0.1\quad 0.5\quad 0.5\quad 0.1\quad 0.1\quad 0.1]\circ$$

$$\begin{bmatrix}0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=[0.4\quad 0.5]$$

即 $\boldsymbol{C}_1=\dfrac{0.4}{c_1}+\dfrac{0.5}{c_2}$。

采用 Matlab 实现上述过程的仿真，模糊推理仿真程序见附录程序 chap3_5.m。

3.5.3 模糊关系方程

1. 模糊关系方程概念

将模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 看成一个模糊变换器。当 $\boldsymbol{A}$ 为输入时，$\boldsymbol{B}$ 为输出，如图 3-11 所示。

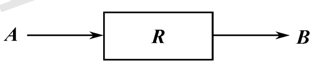

图 3-11 模糊变换器

可分为以下两种情况进行讨论：

① 已知输入 $\boldsymbol{A}$ 和模糊关系 $\boldsymbol{R}$，求输出 $\boldsymbol{B}$，这是综合评判，即模糊变换问题；

② 已知输入 $\boldsymbol{A}$ 和输出 $\boldsymbol{B}$，求模糊关系 $\boldsymbol{R}$，或已知模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 和输出 $\boldsymbol{B}$，求输入 $\boldsymbol{A}$，这是模糊综合评判的逆问题，需要求解模糊关系方程。

2. 模糊关系方程的解

近似试探法是目前实际应用中较为常用的方法之一。

【例 3.11】 解方程$(0.6\quad 0.2\quad 0.4)\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0.4$。

解 由方程得

$$(0.6\wedge x_1)\vee(0.2\wedge x_2)\vee(0.4\wedge x_3)=0.4$$

显然3个括弧内的值都不可能超过0.4。由于$(0.2\wedge x_2)<0.4$是显然的，因此x_2可以取$[0,1]$的任意值，即$(x_2)=[0,1]$。

现在只考虑

$$(0.6 \wedge x_1) \vee (0.4 \wedge x_3) = 0.4$$

这两个括号内的值可以是：其中一个等于 0.4，另一个不超过 0.4。它可以分以下两种情况讨论。

(1) 设 $0.6 \wedge x_1 = 0.4, 0.4 \wedge x_3 \leqslant 0.4$，则

$$(x_1) = 0.4, (x_3) = [0,1]$$

即方程的解为 $(x_1) = 0.4, (x_2) = [0,1], (x_3) = [0,1]$。

(2) 设 $0.6 \wedge x_1 \leqslant 0.4, 0.4 \wedge x_3 = 0.4$，则

$$(x_1) = [0, 0.4], (x_3) = [0.4, 1]$$

即方程的解为 $(x_1) = [0, 0.4], (x_2) = [0,1], (x_3) = [0.4, 1]$。

思考题与习题 3

3-1 已知年龄的论域为[0,200]，且设“年老 O”和“年轻 Y”两个模糊集的隶属函数分别为

$$\mu_O(a) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant a \leqslant 50 \\ \dfrac{a-50}{20} & 50 \leqslant a \leqslant 70 \\ 1.0 & a \geqslant 70 \end{cases}$$

$$\mu_Y(a) = \begin{cases} 1.0 & 0 \leqslant a \leqslant 25 \\ \dfrac{70-a}{45} & 25 \leqslant a \leqslant 70 \\ 0 & a \geqslant 70 \end{cases}$$

试设计“很年轻 W”、“不老也不年轻 V”两个模糊集的隶属函数，并采用 Matlab 实现针对上述 4 个隶属函数的仿真。

3-2 已知模糊矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$。求：

(1) $(\boldsymbol{P} \circ \boldsymbol{Q}) \circ \boldsymbol{R}$ (2) $(\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}) \circ \boldsymbol{S}$ (3) $(\boldsymbol{P} \circ \boldsymbol{S}) \cup (\boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{S})$

3-3 求解模糊关系方程

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

3-4 如果 $\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{0.5}{x_2}$ 且 $\boldsymbol{B} = \dfrac{0.1}{y_1} + \dfrac{0.5}{y_2} + \dfrac{1}{y_3}$，则 $\boldsymbol{C} = \dfrac{0.2}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$。现已知 $\boldsymbol{A}_1 = \dfrac{0.8}{x_1} + \dfrac{0.1}{x_2}$ 且 $\boldsymbol{B}_1 = \dfrac{0.5}{y_1} + \dfrac{0.2}{y_2} + \dfrac{0}{y_3}$，利用模糊推理公式(3.27)和式(3.28)求 $\boldsymbol{C}_1$，并采用 Matlab 进行仿真。

本章附录（程序代码）

"年轻"的隶属函数仿真程序：chap3_1.m

```
% Membership function for Young People
clear all;
close all;

for k=1:1:1001
    x(k)=(k-1)* 0.10;
if x(k)> =0&x(k)< =25
   y(k)=1.0;
else
   y(k)=1/(1+((x(k)-25)/5)^2);
end
end
plot(x,y,'k');
xlabel('x Years');ylabel('Degree of membership');
```

典型隶属函数仿真程序：chap3_2.m

```
% Membership function
clear all;
close all;

M=6;
if M==1            % Guassian membership function
    x=0:0.1:10;
    y=gaussmf(x,[2 5]);
    plot(x,y,'k');
    xlabel('x');ylabel('y');
elseif M==2        % General Bell membership function
    x=0:0.1:10;
    y=gbellmf(x,[2 4 6]);
    plot(x,y,'k');
    xlabel('x');ylabel('y');
elseif M==3        % S membership function
    x=0:0.1:10;
    y=sigmf(x,[2 4]);
    plot(x,y,'k');
    xlabel('x');ylabel('y');
elseif M==4        % Trapezoid membership function
    x=0:0.1:10;
    y=trapmf(x,[1 5 7 8]);
    plot(x,y,'k');
    xlabel('x');ylabel('y');
elseif M==5        % Triangle membership function
    x=0:0.1:10;
    y=trimf(x,[3 6 8]);
    plot(x,y,'k');
    xlabel('x');ylabel('y');
elseif M==6        % Z membership function
    x=0:0.1:10;
```

```
    y=zmf(x,[3 7]);
    plot(x,y,'k');
    xlabel('x');ylabel('y');
end
```

模糊系统隶属函数设计程序:chap3_3.m

```
% Define N+1 triangle membership function
clear all;
close all;
N=6;

x=-3:0.01:3;
for i=1:N+1
    f(i)=-3+6/N*(i-1);
end
u=trimf(x,[f(1),f(1),f(2)]);

figure(1);
plot(x,u);
for j=2:N
    u=trimf(x,[f(j-1),f(j),f(j+1)]);
    hold on;
    plot(x,u);
end
u=trimf(x,[f(N),f(N+1),f(N+1)]);
hold on;
plot(x,u);
xlabel('x');
ylabel('Degree of membership');
```

模糊矩阵合成仿真程序:chap3_4.m

```
clear all;
close all;
A=[0.8,0.7;
   0.5,0.3];
B=[0.2,0.4;
   0.6,0.9];
% Compound of A and B
for i=1:2
   for j=1:2
      AB(i,j)=max(min(A(i,:),B(:,j)'))
    end
end

% Compound of B and A
for i=1:2
   for j=1:2
      BA(i,j)=max(min(B(i,:),A(:,j)'))
    end
end
```

模糊推理仿真程序:chap3_5.m

```
clear all;
close all;

A=[0.5;1;0.1];
B=[0.1,1,0.6];
C=[0.4,1];

% Compound of A and B
for i=1:3
   for j=1:3
      AB(i,j)=min(A(i),B(j));
   end
end
% Transfer to Column
T1=[];
for i=1:3
   T1=[T1;AB(i,:)'];
end
% Get fuzzy R
for i=1:9
   for j=1:2
      R(i,j)=min(T1(i),C(j));
   end
end
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
A1=[1,0.5,0.1];
B1=[0.1,0.5,1];

for i=1:3
   for j=1:3
      AB1(i,j)=min(A1(i),B1(j));
   end
end
% Transfer to Row
T2=[];
for i=1:3
   T2=[T2,AB1(i,:)];
end
% Get output C1
for i=1:9
   for j=1:2
      D(i,j)=min(T2(i),R(i,j));
      C1(j)=max(D(:,j));
   end
end
```