Chapter 1

第 1 章

信号的基本概念

要点

本章介绍了信号的概念、分类以及基本运算，重点强调了冲激信号和阶跃信号这两类在系统分析中占有重要地位的基本信号，以及卷积（包括连续信号的卷积积分和离散信号的卷积和）这一类在系统分析中占有重要地位的基本运算。

1.1 信号的分类及典型的连续时间信号

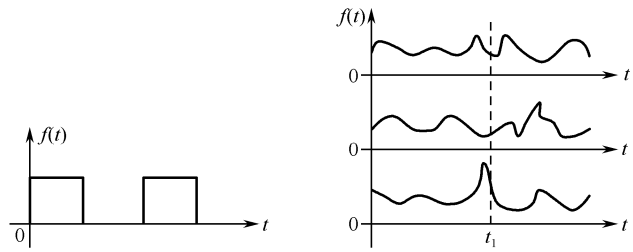
1.1.1 信号的分类

根据信号的属性可分为确定信号与随机信号、连续时间信号与离散时间信号、周期信号和非周期信号、能量信号和功率信号。

1．确定信号与随机信号

按信号随时间变化的规律来分，信号可分为确定信号与随机信号。确定信号是指能够表示为确定的时间函数的信号。当给定某一时间值时，信号有确定的数值，其所含信息量的不同体现在其分布值随时间或空间的变化规律上。电路基础课程中研究的正弦信号、指数信号、各种周期信号等都是确定信号的例子，如图 1.1-1（a）所示。

随机信号不是时间 t 的确定函数，它在每一个确定时刻的分布值是不确定的，只能通过大量试验测出它在某些确定时刻上取某些值的概率分布。空中的噪音、电路元件中的热噪声、电流等都是随机信号的例子。如图 1.1-1（b）所示。



（a）确定信号　　（b）随机信号

图 1.1-1　确定信号与随机信号

实际传输的信号几乎都是随机信号。若传输的是确定信号，则对接收者来说，就不可能由它得知任何新的信息，从而失去了传送信息的本意。但是，在一定条件下，随机信号也会表现出某种确定性，例如，在一个较长的时间内随时间变化的规律比较确定，即可近似地看成是确定信号。

随机信号是统计无线电理论研究的对象。本书中只研究确定信号。

2．连续时间信号与离散时间信号

（1）连续时间信号。

对任意一个信号，如果在定义域内，除有限个间断点外均有定义，则称此信号为连续时间信号。连续时间信号的自变量是连续可变的，而函数值在值域内可以是连续的，也可以是跳变的。如图 1.1-2 中所示的斜坡信号，就是一个连续时间信号。

（2）离散时间信号。

对任意一个信号，如果自变量仅在离散时间点上有定义，称为离散时间信号。离散时间信号相邻离散时间点的间隔可以是相等的，也可以是不相等的。在这些离散时间点之外，信号无定义。

例如，一个离散时间信号，其波形图如图 1.1-3 所示，函数表示为

$$y(n)=\begin{cases} n, & n=0,1,2,3,\cdots \\ 1, & n=-1,-2,\cdots \end{cases} \tag{1.1-1}$$

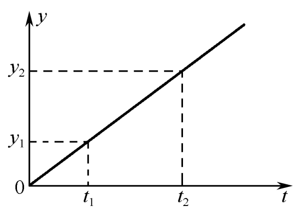


图 1.1-2　连续时间信号

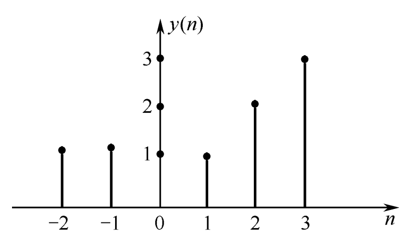


图 1.1-3　离散时间信号

定义在等间隔离散时间点上的离散时间信号称为序列，序列可以表示成函数形式，也可以直接列出序列值或写成序列值的集合。在工程应用中，常常将幅值连续可变的信号称为模拟信

号；将幅值连续的信号在固定时间点上取值得到的信号称为抽样信号；将幅值只能取某些固定的值，而在时间上等间隔的离散时间信号称为数字信号。

3．周期信号与非周期信号

周期信号是定义在（$-\infty$, ∞）区间，每隔一定时间 T（或整数 N），按相同规律重复变化的信号，如图 1.1-4 所示。连续周期信号可以表示为

$$f(t)=f(t\pm nT),\quad (n=0,\pm1,\pm2\cdots) \tag{1.1-2}$$

离散周期信号可表示为

$$f(n)=f(n\pm mN),\quad (m=0,\pm1,\pm2\cdots) \tag{1.1-3}$$

满足此关系式的最小 T（或 N）值称为信号的周期。

对于正弦序列（或余弦序列），如图 1.1-4（b）所示。

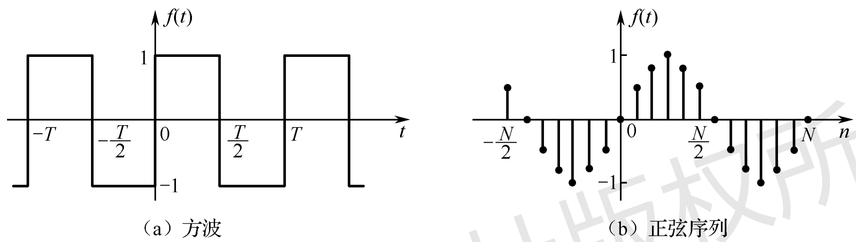


图 1.1-4　周期信号

$$\begin{aligned} f(n)&=\sin(\beta n)=\sin(\beta n+2m\pi) \\ &=\sin\left[\beta\left(n+m\frac{2\pi}{m}\right)\right]=\sin[\beta(n+mN)] \end{aligned}\qquad m=0,\pm1,\pm2\cdots$$

可以看出，当 $\frac{2\pi}{\beta}$ 为整数时，正弦序列具有周期 $N=\frac{2\pi}{m}$。图 1.1-4（b）画出了 $\beta=\frac{\pi}{6}$、周期 $N=12$ 的情形，它每经过 12 个单位循环一次。当 $\frac{2\pi}{\beta}$ 为有理数时（例如：$\frac{2\pi}{\beta}=\frac{N}{M}$，$N$ 与 M 均为无公因子的整数），正弦序列仍具有周期性，其周期为 $N=M\frac{2\pi}{\beta}$。当 $\frac{2\pi}{\beta}$ 为无理数时，该序列不具有周期性，但是其样值的包络线仍为正弦函数。

【例 1.1-1】 判断下列序列是否为周期性的，如果是周期性的，确定其周期。

（1）$f_1(n)=\sin\left(\frac{\pi}{7}n+\frac{\pi}{6}\right)$；　（2）$f_2(n)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}n+\frac{\pi}{12}\right)$；　（3）$f_3(n)=\sin\left(\frac{1}{5}n+\frac{\pi}{3}\right)$。

解：（1）$\beta_1=\frac{\pi}{7}$，$\frac{2\pi}{\beta_1}=14$，故 $f_1(n)$ 是周期序列，其周期 $N_1=14$。

（2）$\beta_2=\frac{5\pi}{6}$，$\frac{2\pi}{\beta_2}=\frac{2\times6\times\pi}{5\pi}=\frac{12}{5}=\frac{N_2}{M}$；$(M=5)$，故 $f_2(n)$ 是周期序列，其周期 $N_2=12$。

（3）$\beta_3=\frac{1}{5}$，$\frac{2\pi}{\beta_3}$ 为无理数，故 $f_3(n)$ 是非周期序列。

4．能量信号与功率信号

（1）能量信号

将一个电压或电流信号 $f(t)$ 加到单位电阻上，则在该电阻上产生的瞬时功率为 $|f(t)|^2$。在一段时间 $\left(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right)$ 内消耗一定的能量，把该能量对时间区域取平均，即得信号在此区间内的平均功率。

定义　若将时间区域无限扩展，信号满足条件

$$E=\lim_{\tau\to\infty}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t<\infty \tag{1.1-4}$$

称为能量信号，即如果一个信号在无限大时间区域内信号的能量为有限值，则称该信号为能量有限信号或能量信号。

能量信号的平均功率为零。

（2）功率信号

定义　将时间区域无限扩展，信号满足条件

$$P=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}E<\infty \tag{1.1-5}$$

称为功率信号，即如果在无限大时间区域内信号的功率为有限值，则称该信号为功率有限信号或功率信号。

功率信号的能量无穷大。

离散信号有时候也要讨论能量和功率，序列 $f(n)$ 的能量定义为

$$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|f(n)|^2 \tag{1.1-6}$$

序列 $f(n)$ 的功率定义为

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|f(n)|^2 \tag{1.1-7}$$

若 $E<\infty$，我们称 $f(n)$ 为能量有限信号，简称为能量信号，此时 $P=0$；若 $P<\infty$，则称 $f(n)$ 为功率有限信号，简称为功率信号，此时 $E=\infty$。

根据能量信号和功率信号的定义，显然可以得出：时限信号（在有限时间区域内存在非零值的信号）是能量信号，周期信号是功率信号；非周期信号可能是能量信号，也可能是功率信号。

1.1.2　典型的连续时间信号

下面给出几个常见信号的函数表达式及其波形图。在后续章节中可以看到，它们在信号与系统分析中有着极其重要的地位和作用。

1．指数信号

指数信号的表达式为

$$f(t)=A\mathrm{e}^{st} \tag{1.1-8}$$

根据 A 和 s 的不同取值，有三种情况：

（1）当 $A=m$ 和 $s=\alpha$ 均为实数时，$f(t)$ 为实指数信号。

当 $\alpha>0$ 时，为指数递增信号；

当 $\alpha<0$ 时，为指数递减信号；

当 $\alpha=0$ 时，$f(t)$ 等于常数。

波形如图 1.1-5 所示。

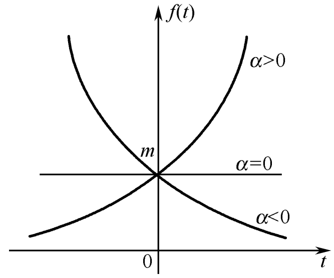


图 1.1-5　实指数信号

（2）当 $A=1$ 和 $s=\mathrm{j}\omega$ 时，$f(t)$ 为虚指数信号，即

$$f(t)=A\mathrm{e}^{st}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t \tag{1.1-9}$$

显然，这是一个周期信号。

（3）当 A 和 s 均为复数时，$f(t)$ 为复指数信号。

设 $A=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$，$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，则 $f(t)$ 可以表示为

$$\begin{aligned}f(t)=A\mathrm{e}^{st}&=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=|A|\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi+\omega t)}\\&=|A|\mathrm{e}^{\sigma t}[\cos(\varphi+\omega t)+\mathrm{j}\sin(\varphi+\omega t)]\end{aligned} \tag{1.1-10}$$

当 $\sigma>0$ 时，$f(t)$ 的实部和虚部为幅度指数递增的正弦振荡信号；

当 $\sigma<0$ 时，$f(t)$ 的实部和虚部为幅度指数递减的正弦振荡信号；

当 $\sigma=0$ 时，$f(t)$ 的实部和虚部为幅度等幅的正弦振荡信号。

$f(t)$ 的实部在 $\sigma>0$、$\sigma<0$ 和 $\sigma=0$ 三种情况下的波形如图 1.1-6（a）、（b）、（c）所示。

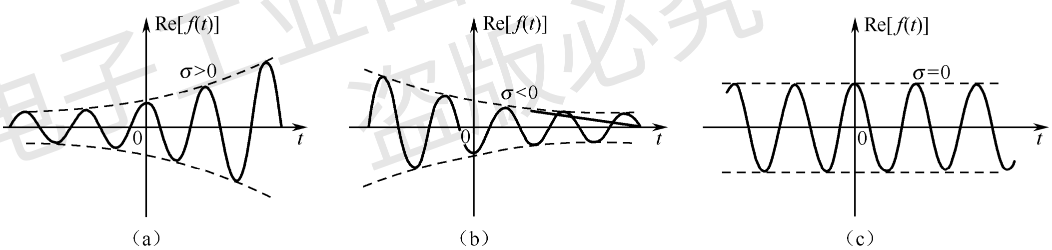


图 1.1-6　复指数信号

2．正弦信号

正弦信号的一般形式为

$$f(t)=A\sin(\omega t+\theta) \tag{1.1-11}$$

其中 A 为振幅，ω 为角频率，θ 为初相位，这三者被称为正弦信号的三要素。由这三个参数就可以唯一地确定一个正弦信号。

3．抽样信号

抽样信号定义为

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t} \tag{1.1-12}$$

显然，当 $t \to 0$ 时，式（1.1-12）右边是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，运用罗必塔法则得

$$\lim_{t \to 0} \mathrm{Sa}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{(\sin t)'}{t'} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos t}{1} = 1 \tag{1.1-13}$$

首先来定性分析一下 $\mathrm{Sa}(t)$ 波形的趋势，当 t 从 0 增大到$+\infty$，$\dfrac{1}{t}$ 的幅度越来越小（衰减的），而 $\sin t$ 是周期振荡的，所以 $\mathrm{Sa}(t)$ 总的趋势是衰减振荡的。显然 $\mathrm{Sa}(t)$ 是偶函数，所以在负半轴的趋势是一样的。$\mathrm{Sa}(t)$ 的波形如图 1.1-7 所示。

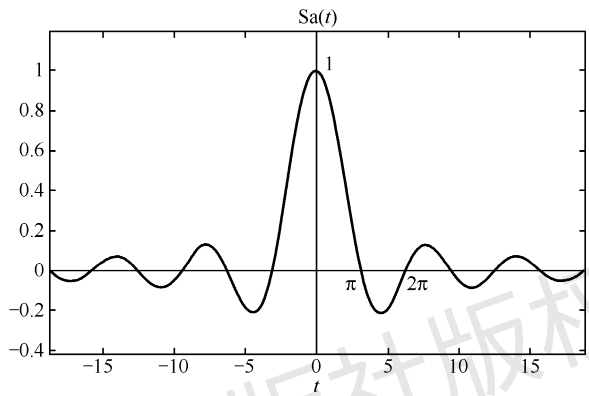


图 1.1-7 抽样信号

显然，$t = n\pi (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 是函数的零点，在任意零点两侧函数取值正负交替。此外有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(t) \mathrm{d}t = \pi \text{ 。}$$

类似地，定义辛格函数为

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \tag{1.1-14}$$

【例 1.1-2】 求 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t) \mathrm{d}t$ 。

解：

$$\mathrm{sinc}(t) = \mathrm{Sa}(\pi t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(\pi t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(t) \frac{\mathrm{d}t}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(t) \mathrm{d}t$$

由 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(t) \mathrm{d}t = \pi$

得 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t) \mathrm{d}t = 1$

显然 $\mathrm{Sa}(t)$ 和 $\mathrm{sinc}(t)$ 的关系为

$$\mathrm{sinc}(t) = \mathrm{Sa}(\pi t) \tag{1.1-15}$$

1.2 连续时间信号的基本运算

在信号的传输与处理过程中往往需要进行信号的运算，它包括信号的反褶、时移、展缩、微分、积分和两信号相加或相乘等。

1.2.1　反褶

信号的时域反褶又称为折叠，就是将信号 $f(t)$ 的波形以纵轴为轴翻转 180°。

设信号 $f(t)$ 的波形如图 1.2-1（a）所示。现将 $f(t)$ 以纵轴为轴反褶，即得反褶信号 $f(-t)$。折叠信号 $f(-t)$ 的波形如图 1.2-1（b）所示。可见，若欲求得 $f(t)$ 的反褶信号 $f(-t)$，则必须将 $f(t)$ 中的 t 换为 $-t$，同时 $f(t)$ 定义域中的 t 也必须换为 $-t$。

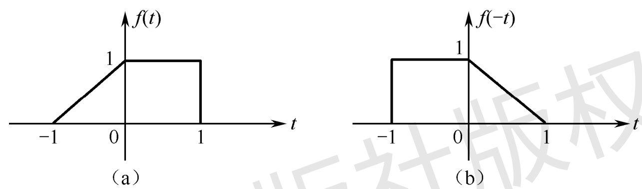


图 1.2-1　信号的反褶

信号的反褶变换，就是将“未来”与“过去”互换，这显然是不能用硬件实现的，没有可实现此功能的实际器件，所以并无实际意义。但它具有理论意义，数字信号处理中可以实现此概念，例如，堆栈中的“后进先出”。

1.2.2　时移

信号的时移就是将信号 $f(t)$ 的波形沿时间轴左、右平行移动，但波形的形状不变。

设信号 $f(t)$ 的波形如图 1.2-2（a）所示。现将 $f(t)$ 沿 t 轴平移 t_0，即得时移信号 $f(t-t_0)$，t_0 为实常数。当 $t_0>0$ 时，为沿 t 轴的正方向移动（右移）；当 $t_0<0$ 时，为沿 t 轴的负方向移动（左移）。时移信号 $f(t \pm t_0)$ 的波形如图 1.2-2（b）、（c）所示。可见，欲求得 $f(t)$ 的时移信号 $f(t-t_0)$，则必须将 $f(t)$ 的 t 换为 $t-t_0$，同时 $f(t)$ 定义域中的 t 也必须换为 $t-t_0$。

信号的时移变换用时移器（也称延时器）实现，需要指出的是，当 $t_0>0$ 时，延时器为因果系统，是可以用硬件实现的；当 $t_0<0$ 时，延时器是非因果系统，此时不能用硬件实现。

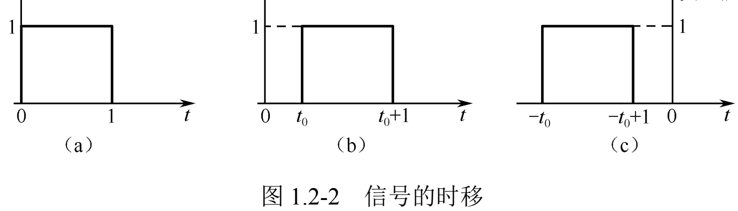


图 1.2-2　信号的时移

1.2.3 展缩

信号的时域展缩就是将信号 $f(t)$ 在时间 t 轴上展宽或压缩，但纵轴上的值不变。

设信号 $f(t)$ 的波形如图 1.2-3（a）所示。现以变量 at 置换 $f(t)$ 中的 t，所得信号 $f(at)$ 即为信号 $f(t)$ 的展缩信号，其中 a 为正实常数。若 $a>1$，则表示将 $f(t)$ 的波形在时间 t 轴上压缩 $1/a$ 倍（纵轴上的值不变），如图 1.2-3（b）所示（图中取 $a=2$）；若 $0<a<1$，则表示将 $f(t)$ 的波形在时间 t 轴上展宽 $1/a$ 倍（纵轴上的值不变），如图 1.2-3（c）所示（图中取 $a=0.5$）。

需要注意的是，在用 at 置换 $f(t)$ 中的 t 时，必须同时将 $f(t)$ 定义域中的 t 也换为 at。

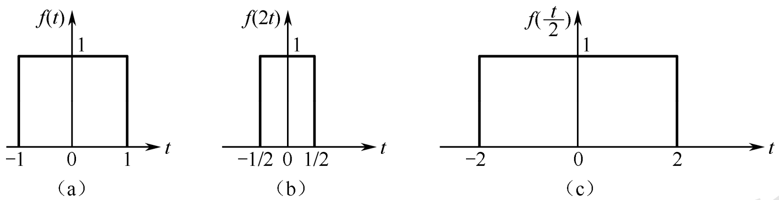


图 1.2-3 信号的展缩

【例 1.2-1】 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 1.2-4（a）所示。试画出 $f(-2t+4)$ 的波形。

解：信号 $f(-2t+4)$ 很显然是将信号 $f(t)$ 经过折叠、时移、展缩三种变换后而得到的，但这三种变换的次序则可以是任意的，结果都相同，推荐按照“平移–折叠–展缩”的顺序进行信号的复合运算，其波形依次如图 1.2-4（b）、（c）、（d）所示。

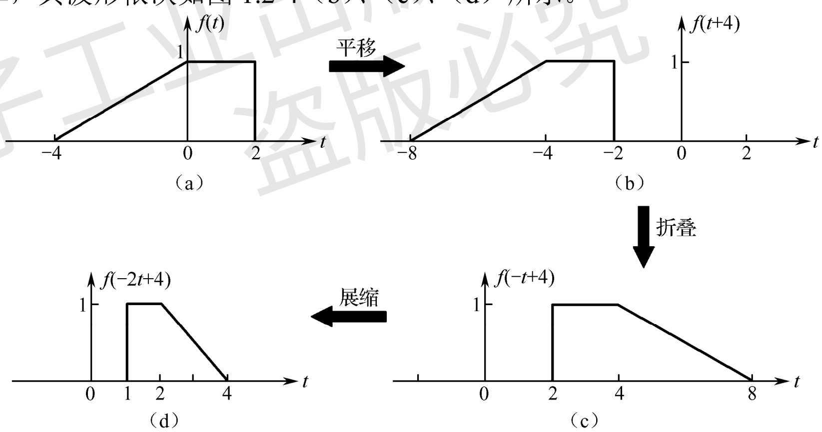


图 1.2-4 信号的复合运算

1.2.4 倒相

设信号 $f(t)$ 的波形如 1.2-5（a）所示。今将 $f(t)$ 的波形以横轴（时间 t 轴）为轴翻转 180°，即得倒相信号 $-f(t)$。倒相信号 $-f(t)$ 的波形如图 1.2-5（b）所示。可见，信号进行倒相时，横轴（时间 t 轴）上的值不变，仅是纵轴上的值改变了正负号，正值变成了负值，负值变成了正值。倒相也称反相。

信号的倒相用倒相器（反相器）实现。

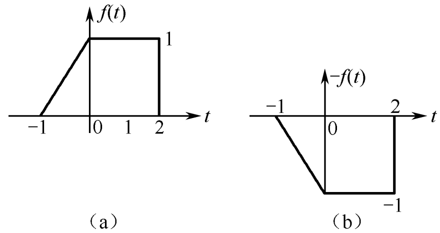


图 1.2-5　信号的倒相

1.2.5　相加

将 n 个信号 $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \cdots, f_n(t)$ 相加，即得相加信号 $y(t)$ 为

$$y(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \cdots + f_n(t)$$

信号的时域相加运算可用加法器实现，如图 1.2-6 所示。信号在时域中相加时，横轴（时间 t 轴）的值不变，仅是与时间 t 轴的值相对应的纵坐标值相加。

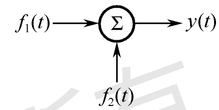


图 1.2-6　信号的相加

1.2.6　相乘

将两个信号 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 相乘，即得相乘信号 $y(t)$ 为

$$y(t) = f_1(t) f_2(t)$$

信号的时域相乘运算用乘法器实现，如图 1.2-7 所示。信号在时域中相乘时，横轴（时间 t 轴）的值不变，仅是与时间 t 轴的值相对应的纵坐标值相乘。

信号处理系统中的抽样器和调制器，都是实现信号相乘运算功能的系统。乘法器也称调制器。

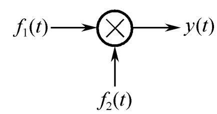


图 1.2-7　信号的相乘

1.2.7　微分

将信号 $f(t)$ 求一阶导数，称为对信号 $f(t)$ 进行微分运算，所得信号称为信号 $f(t)$ 的微分信号，即

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = f'(t)$$

信号的时域微分运算可用微分器实现，如图 1.2-8 所示。

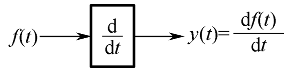


图 1.2-8　信号的微分

1.2.8 积分

将信号 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, t)$ 内求一次积分，称为对信号 $f(t)$ 进行积分运算，所得信号称为信号 $f(t)$ 的积分信号，即

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = f^{-1}(t)$$

信号的时域积分运算可用积分器实现，如图 1.2-9 所示。

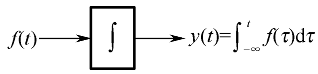


图 1.2-9　信号的积分

1.3 阶跃信号和冲激信号

1.3.1 单位阶跃信号

单位阶跃信号一般用 $u(t)$ 表示，有些版本中也用 $\varepsilon(t)$ 表示。其函数定义式为

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\0, & t<0\end{cases} \tag{1.3-1}$$

在 $t=0$ 处，函数不连续，存在跳变。显然左极限 $u(0_-)=0$；右极限 $u(0_+)=1$。$t=0$ 处的函数值定义为左右极限的均值。有些教材定义为 1，也有些教材认为没有定义，为简便起见，$t=0$ 处的函数值不做讨论。单位阶跃信号波形如图 1.3-1（a）所示。经时移（移位）后的单位阶跃信号可以表示为

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0\\0, & t<t_0\end{cases} \tag{1.3-2}$$

其图形如图 1.3-1（b）所示。

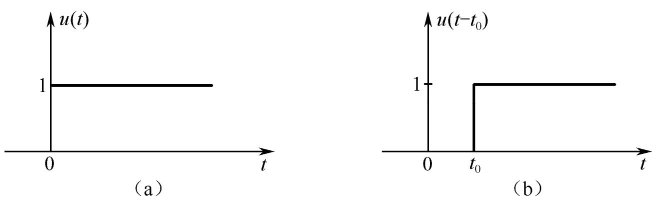


图 1.3-1　单位阶跃信号及移位的阶跃信号

阶跃信号常用来描述有突变的信号或分段函数。用单位阶跃信号可以描述其他信号。

（1）门函数 $g_\tau(t)$，也称窗函数，其定义式为

$$g_\tau(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

其波形如图 1.3-2 所示（图中 $\tau=2$）。

（2）符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$，其定义式为

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

其波形如图 1.3-3 所示。符号函数也可以用单位阶跃函数表示为

$$\mathrm{sgn}(t)=-u(-t)+u(t)=2u(t)-1$$

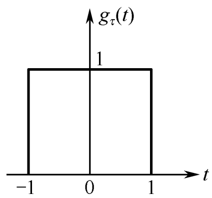


图 1.3-2　门函数 $g_\tau(t)$

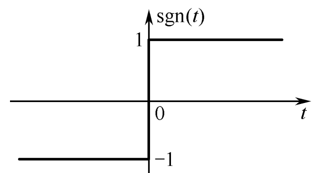


图 1.3-3　符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$

实际应用中，单位阶跃信号是非常有用的信号，下面举例说明。

【例 1.3-1】 阶跃信号可以确定信号的起点和区间，画出下列信号的波形。

（1） $f_1(t)=tu(t)$；　（2） $f_2(t)=tu(t-t_0)$；　（3） $f_3(t)=t[u(t-1)-u(t-2)]$。

解：（1）确定信号的起点从 $t=0$ 开始，波形图如图 1.3-4（a）所示。

（2）确定信号的起点从 $t=t_0$ 开始，波形图如图 1.3-4（b）所示。

（3）确定信号的起点从 $t=1$ 到 $t=2$，波形图如图 1.3-4（c）所示。

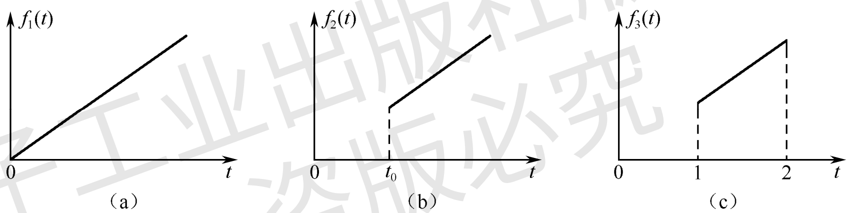


图 1.3-4　阶跃信号确定信号的起点和区间

【例 1.3-2】 阶跃信号可以将分段函数表达式写成封闭式函数表达式。画出下列信号 $f(t)$ 的波形，并写出封闭式表达式：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(t+2), & -2\leqslant t\leqslant 1\\ -\dfrac{1}{2}(t-1), & 1\leqslant t\leqslant 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解：信号的波形图如图 1.3-5 所示。其封闭表达式为

$$f(t)=\frac{1}{3}(t+2)[u(t+2)-u(t-1)]-\frac{1}{2}(t-1)[u(t-1)-u(t-3)]$$

【例 1.3-3】 写出图 1.3-6 所示的表达式。

解：其表达式为

$$\begin{aligned}f(t)&=2[u(t+1)-u(t-1)]+[u(t-1)-u(t-3)]\\&=2u(t+1)-u(t-1)-u(t-3)\end{aligned}$$

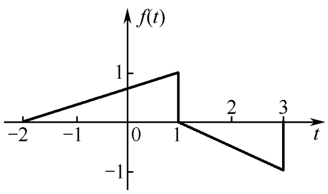


图 1.3-5　例 1.3-2 结果图形

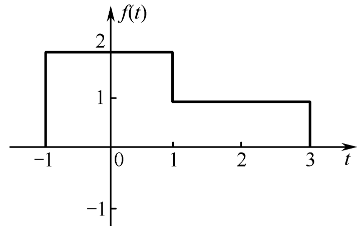


图 1.3-6　例 1.3-3 图

1.3.2　单位冲激信号

1．单位冲激信号的定义

单位冲激信号 $\delta(t)$ 是持续时间无穷小，瞬间幅度无穷大，涵盖面积恒为 1 的一种理想信号，其函数定义式为

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0-}^{0+}\delta(t)\mathrm{d}t=1\\ \delta(t)=0, \qquad t\neq 0\end{cases} \tag{1.3-3}$$

按照这个定义式，也可以理解为

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

在用图形描述单位冲激信号时，往往用 1 来描述冲激信号涵盖的面积，如图 1.3-7（a）所示，移位的单位冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 波形如图 1.3-7（b）所示。

冲激信号是一类脉冲函数的极限情况，如三角形脉冲、钟形脉冲等。当这些脉冲函数的宽度无限趋小而脉冲面积保持不变时，它们均以冲激信号为极限。冲激信号是描述强度大、作用时间短的物理量的理想模型。

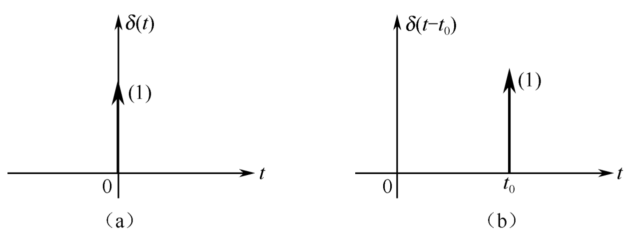


图 1.3-7　单位冲激信号和移位的单位冲激信号

2．冲激信号的性质

（1）抽样性

设 $f(t)$ 为任意有界函数，且在 $t=0$ 和 $t=t_0$ 时刻连续，其函数值分别是 $f(0)$ 和 $f(t_0)$，则有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \tag{1.3-4}$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1.3-5}$$

即时间函数 $f(t)$ 与单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 相乘，就等于单位冲激函数出现时刻 $f(t)$ 的函数值

$f(t_0)$ 与单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 相乘。也就是使冲激函数的强度变为 $f(t_0)$，冲激函数可以把冲激所在位置处 $f(t)$ 的函数值抽取（筛选）出来。扩展到积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0) \tag{1.3-6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{1.3-7}$$

即任意的有界时间函数 $f(t)$ 与单位冲激函数 $\delta(t)$ 或 $\delta(t-t_0)$ 相乘后在无穷区间 $(t\in R)$ 的积分值，等于单位冲激函数出现时刻 $f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$。这就是冲激函数的抽样性，也称为筛选性。$f(0)$ 和 $f(t_0)$ 即为 $f(t)$ 在抽样时刻的抽样值，$f(t)$ 为被抽样函数。

证明： $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{0-}^{0+} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{0-}^{0+}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

（2）奇偶对称性

$\delta(t)$ 为偶函数，即有

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{1.3-8}$$

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t)\mathrm{d}t = -\int_{\infty}^{-\infty} f(-t)\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t$$

因此 $$\delta(-t) = \delta(t)$$

推广 $$\delta(t-t_0) = \delta\left[-(t-t_0)\right] \tag{1.3-9}$$

（3）冲激偶函数

冲激偶函数定义为冲激函数的一阶导数，即

$$\delta'(t) = \frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.3-10}$$

为便于理解冲激偶函数的含义，可以利用三角形脉冲函数逼近冲激函数的过程理解冲激偶函数的含义，如图 1.3-8 所示。

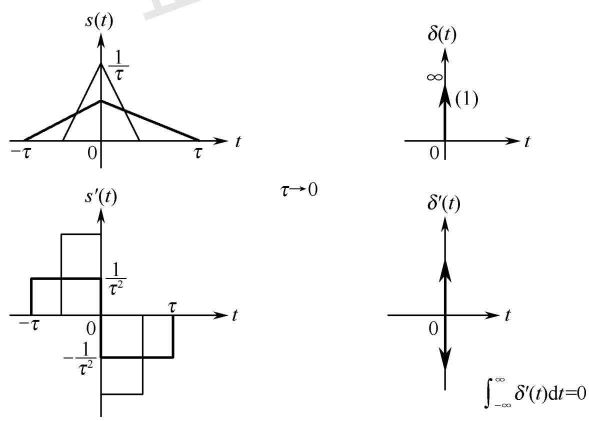


图 1.3-8　冲激偶函数的图解

从图 1.3-8 可以看出，三角形脉冲函数 $s(t)$ 在脉冲宽度 $\tau\to 0$ 时，$s(t)\to\delta(t)$；那么 $s'(t)$ 在脉冲宽度 $\tau\to 0$ 时，$s'(t)\to\delta'(t)$。

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t = \int_{0-}^{0+}\delta'(t)\mathrm{d}t = 0 \\ \delta'(t) = 0 \qquad\qquad t\neq 0\end{cases} \tag{1.3-11}$$

普通函数与冲激偶函数乘积有以下重要性质，即

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t) \tag{1.3-12}$$

证明： 因为 $[f(t)\delta(t)]'=f'(t)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$

移项，有 $f(t)\delta'(t)=[f(t)\delta(t)]'-f'(t)\delta(t)$

利用冲激函数的抽样性，可以得到

$$\begin{aligned}f(t)\delta'(t)&=[f(0)\delta(t)]'-f'(0)\delta(t)\\&=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)\end{aligned} \tag{1.3-13}$$

推论：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)\right]\mathrm{d}t\\&=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t-f'(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t\\&=-f'(0)\end{aligned}$$

普通函数 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 的高阶导数乘积的情况与此相类似，这里不再赘述。

（4）尺度变换

尺度变换特性如下：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1.3-14}$$

证明： 当 $a>0$ 时，令 $\tau=at$，则有 $t=\dfrac{\tau}{a}$ 及 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}\tau}{a}$，从而有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(\tau)}{a}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(t)}{a}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a|}\delta(t)\mathrm{d}t$$

当 $a<0$ 时，根据冲激函数的奇偶对称性，同样有 $\delta(at)=\delta(-at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$。性质得证。

【例 1.3-4】 求下列积分。

（1）$\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\delta(-2t)\mathrm{d}t$；（2）$\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\delta(1-2t)\mathrm{d}t$。

解：（1）原式$=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\times\dfrac{1}{2}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}(0^2+2\times0+3)\times\dfrac{1}{2}\delta(t)\mathrm{d}t=1.5$

（2）原式$=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\delta\left[-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\delta\left[2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\times\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+3\right]\times\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{17}{8}$$

【例 1.3-5】 已知 $f(t)=3t^2+2t+1$，求下列积分。

（1）$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t$；（2）$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta'(1-t)\mathrm{d}t$。

解：（1）原式$=-f'(0)=-(3t^2+2t+1)'\,|_{t=0}=-(6t+2)\,|_{t=0}=-2$。

（2）原式$=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-1)\mathrm{d}t=-[-f'(1)]=(3t^2+2t+1)'\,|_{t=1}=(6t+2)\,|_{t=1}=8$

【例 1.3-6】 求下列积分：$\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$。

解：　　原式 $=\int_{-\infty}^{\tau}[\mathrm{e}^{-0}\delta'(\tau)+\mathrm{e}^{-0}\delta(\tau)]\,\mathrm{d}\tau=\delta(t)+u(t)$

【例 1.3-7】 求解下列问题。

（1）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 3t}{t}\delta(t)\mathrm{d}t$；（2）$\int_{-\infty}^{\infty}(3t+1)\delta(t-1)\mathrm{d}t$；（3）$\int_{-1}^{3}\mathrm{e}^{-2t}\delta(t-1.5)\mathrm{d}t$；

（4）$\int_{0}^{\infty}4t^2\delta(t+1)\mathrm{d}t$；（5）化简 $4t^2\delta(2t-4)$；（6）$\int_{-4}^{2}\cos(2\pi t)\delta(2t+1)\mathrm{d}t$。

解：（1）由冲激函数的抽样性得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 3t}{t}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{\sin 3t}{t}\Big|_{t=0}$$

在上式右边运用罗必塔法则得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 3t}{t}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{\sin 3t}{t}\Big|_{t=0}=3\cos 3t\Big|_{t=0}=3$$

（2）$\int_{-\infty}^{\infty}(3t+1)\delta(t-1)\mathrm{d}t=(3t+1)\big|_{t=1}=4$

（3）积分区间包括了 $\delta(t-1.5)$ 的非零点（奇异点）$t=1.5$，所以

$$\int_{-1}^{3}\mathrm{e}^{-2t}\delta(t-1.5)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-2t}\Big|_{t=1.5}=\mathrm{e}^{-3}$$

（4）积分中的冲激出现在 $t=-1$ 处，它位于积分区域之外，所以所求积分值为 0。

（5）由尺度变换特性得

$$\delta(2t-4)=0.5\delta(t-2)$$

再由冲激函数的抽样性得

$$4t^2\delta(2t-4)=4t^2\times 0.5\delta(t-2)=8\delta(t-2)$$

（6）由尺度变换特性得

$$\delta(2t+1)=0.5\delta(t+0.5)$$

从而

$$\int_{-4}^{2}\cos(2\pi t)\delta(2t+1)\mathrm{d}t=\int_{-4}^{2}\cos(2\pi t)\times 0.5\delta(t+0.5)\mathrm{d}t$$

上式右边的积分区间包括了 $\delta(t+0.5)$ 的非零点，所以

$$\int_{-4}^{2}\cos(2\pi t)\delta(2t+1)\mathrm{d}t=0.5\cos(2\pi t)\Big|_{t=-0.5}=-0.5$$

1.3.3　阶跃信号与冲激信号的关系

由阶跃信号及冲激信号的定义式，可以得到它们之间的关系是

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.3-15}$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)\mathrm{d}x \tag{1.3-16}$$

1.4 卷积积分及其性质

对卷积方法最早的研究可追溯到 19 世纪初期的数学家欧拉（Euler）、泊松（Poisson）等人，以后许多科学家对此问题的研究做了大量工作，其中，最值得一提的是杜阿美尔（Duhamel，1833）。近代，随着信号与系统理论研究的深入及计算机技术的发展，不仅卷积方法得到广泛应用，反卷积的问题也越来越受重视。反卷积是卷积的逆运算，在地震勘探、超声诊断、光学成像、系统辨识及其他诸多信号处理领域中卷积和反卷积的应用无处不在，而且许多都是有待深入开发研究的课题。本节将对卷积积分的运算方法进行逐一说明，然后阐述卷积的性质及其应用。

1.4.1 卷积积分的定义

对于任意两个信号 $x(t)$ 和 $y(t)$，两者作卷积运算定义为

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.4-1}$$

对上式右边作变量代换：$\zeta=t-\tau$，则 $\tau=t-\zeta$ 及 $\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}\zeta$，上式变为

$$x(t)*y(t)=-\int_{\infty}^{-\infty}x(t-\zeta)y(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\int_{-\infty}^{\infty}y(\zeta)x(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{1.4-2}$$

依据卷积的定义式可知，上式右边等于 $y(t)*x(t)$，这表明卷积运算满足交换律。综合式（1.4-1）和式（1.4-2）得

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau=y(t)*x(t) \tag{1.4-3}$$

式中，$x(t)*y(t)$ 是两函数作卷积运算的简写符号，也可以写成 $x(t)\otimes y(t)$。这里的积分限取 $-\infty$ 和 ∞，这是由于对 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的作用时间范围没有加以限制。实际上由于系统的因果性或激励信号存在时间的局限性，其积分限会有变化，这一点借助卷积的图形解释可以看得很清楚。可以说卷积积分中积分限的确定是非常关键的，务请在运算中注意。

1.4.2 卷积积分的计算

用图解方法说明卷积运算可以把一些抽象的关系形象化，便于理解卷积的概念及方便运算。

设有函数 $g(t)$ 和 $h(t)$，如图 1.4-1（a）、（b）所示，要计算卷积积分

$$r(t)=g(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.4-4}$$

分析式（1.4-4）可以看出，卷积积分变量是 τ。$h(t-\tau)$ 说明在 τ 的坐标系中 $h(\tau)$ 有反褶和移位的过程，然后两者重叠部分相乘作积分。这样对两信号作卷积积分运算需要五个步骤：

（1）改换图形中的横坐标，由 t 改为 τ，τ 变成函数的自变量；

（2）把其中的一个信号反褶，如图 1.4-1（c）所示；

（3）把反褶后的信号做移位，移位量是 t，这样 t 是一个参变量，在 τ 坐标系中，t>0 图形

右移；$t<0$ 图形左移，如图 1.4-1（d）所示；

（4）两信号重叠部分相乘 $g(\tau)h(t-\tau)$；

（5）完成相乘后图形的积分。

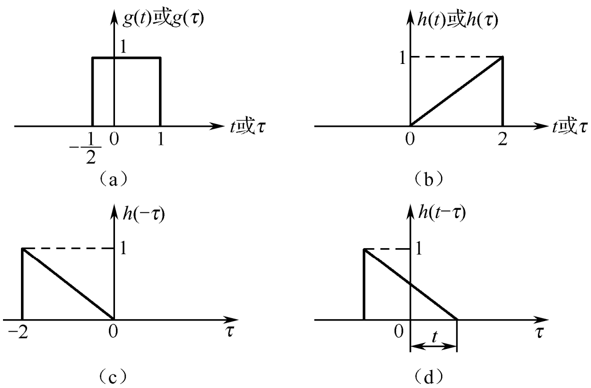


图 1.4-1　卷积的图形解释

按上述步骤完成的卷积积分结果如下：

（1）$-\infty<t\leqslant-\frac{1}{2}$，如图 1.4-2（a）所示，即

$$g(t)*h(t)=0$$

（2）$-\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$，如图 1.4-2（b）所示，即

$$g(t)*h(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{t}1\times\frac{1}{2}(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{t^2}{4}+\frac{t}{4}+\frac{1}{16}$$

（3）$1\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$，如图 1.4-2（c）所示，即

$$g(t)*h(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}1\times\frac{1}{2}(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{3}{4}t-\frac{3}{16}$$

（4）$\frac{3}{2}\leqslant t\leqslant 3$，如图 1.4-2（d）所示，即

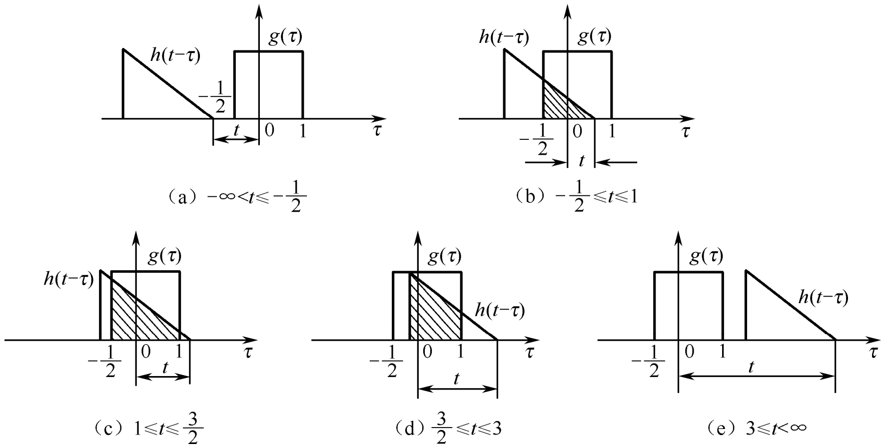
$$g(t)*h(t)=\int_{t-2}^{1}1\times\frac{1}{2}(t-\tau)\mathrm{d}\tau=-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{3}{4}$$

（5）$3\leqslant t<\infty$，如图 1.4-2（e）所示，即

$$g(t)*h(t)=0$$

以上各图中的阴影面积，即为相乘积分的结果。最后，若以 t 为横坐标，将与 t 对应的积分值描成曲线，就是卷积积分 $g(t)*h(t)$ 的函数图像，如图 1.4-3 所示。

从以上图解分析可以看出，卷积中积分限的确定取决于两个图形交叠部分的范围。卷积结果所占有的时宽等于两个函数各自时宽的总和。也可以把 $g(t)$ 反褶位移计算，得到的结果相同，读者可自行完成。



（a）$-\infty<t\leqslant-\frac{1}{2}$　（b）$-\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$　（c）$1\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$　（d）$\frac{3}{2}\leqslant t\leqslant 3$　（e）$3\leqslant t<\infty$

图 1.4-2　卷积积分的求解过程

【例 1.4-1】　已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t+1)$ 和 $y(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t-2)$，求卷积 $x(t)*y(t)$。

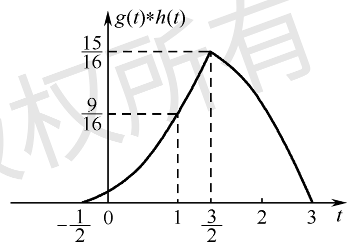


图 1.4-3　卷积积分结果

解：利用卷积积分的定义式得

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\tau}u(\tau+1)\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}u(t-\tau-2)\mathrm{d}\tau$$

整理得

$$x(t)*y(t)=\mathrm{e}^{-3t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\tau}u(\tau+1)u(t-\tau-2)\mathrm{d}\tau$$

观察上式右边积分的被积函数 $\mathrm{e}^{\tau}u(\tau+1)u(t-\tau-2)$，其中的 $u(\tau+1)$ 只在 $\tau\geqslant-1$ 时才不为零，而 $u(t-\tau-2)$ 只在 $\tau\leqslant t-2$ 时才不为零，显然只有这两个条件同时满足时，被积函数才不为零；否则，被积函数恒为零，卷积为零。当 $t-2$ 在-1 左边（即 $t-2<-1$ 或 $t<1$）时，$u(\tau+1)$ 和 $u(t-\tau-2)$ 不存在同时取值不为零的重叠区间，卷积为零；而 $t-2$ 在-1 右边（即 $t-2>-1$ 或 $t>1$）时，$u(\tau+1)$ 和 $u(t-\tau-2)$ 在 $-1\leqslant\tau\leqslant t-2$ 区间内（此即积分区间）同时不为零，此时卷积结果为

$$x(t)*y(t)=\int_{-1}^{t-2}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-3t}(\mathrm{e}^{t-2}-\mathrm{e}^{-1})=\mathrm{e}^{-2t-2}-\mathrm{e}^{-3t-1}$$

考虑到卷积不为零的充要条件为 $t>1$，这显然可以用积分值乘以 $u(t-1)$ 表示，所以最后的结果为

$$x(t)*y(t)=(\mathrm{e}^{-2t-2}-\mathrm{e}^{-3t-1})u(t-1)$$

【例 1.4-2】　求任意函数 $x(t)$ 和常数 1 的卷积：$x(t)*[1]$。

解：初学卷积运算的读者很可能认为任意函数 $x(t)$ 和常数 1 的卷积为这个函数本身，实际上这是不对的。任意函数 $x(t)$ 和常数 1 的乘积当然就是这个函数本身，但是卷积运算和通常的乘法运算有着根本的区别。令 $y(t)=1$，由卷积的定义得

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

显然对任意 τ，$y(t-\tau)=1$，这样上式变为

$$x(t)*[1]=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (1.4\text{-}5)$$

这表明任意函数 $x(t)$ 和常数 1 的卷积等于这个函数在整个时域内的积分。

【例 1.4-3】 证明下式成立：

$$x(t)*y(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(\tau-t)\mathrm{d}\tau \tag{1.4-6}$$

证明：令 $z(t)=y(-t)$，由卷积的定义有

$$x(t)*y(-t)=x(t)*z(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)z(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

由于 $z(t)=y(-t)$，所以有

$$z(t-\tau)=y[-(t-\tau)]=y(\tau-t)$$

所以

$$x(t)*y(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)z(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(\tau-t)\mathrm{d}\tau$$

【例 1.4-4】 证明卷积的面积性质，即若 $x(t)*h(t)=y(t)$，则 $y(t)$ 的面积等于 $x(t)$ 的面积与 $h(t)$ 的面积之积。

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\mathrm{d}t=\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{d}t\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right] \tag{1.4-7}$$

证明：由卷积的定义得

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}t$$

在上式右边中交换对 λ 和对 t 积分的次序得

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\lambda)\mathrm{d}t\right]h(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

考虑到波形的平移不影响函数波形的面积，所以上式右边中括号内积分即为 $x(t)$ 的面积，这样上式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\mathrm{d}t=\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{d}t\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]$$

1.4.3　卷积积分的性质

作为一种数学运算，卷积运算具有某些特殊性质，这些性质在信号与系统分析中有重要作用。这里给出几个卷积积分运算的常用性质，利用这些性质可以简化卷积计算。

1．卷积代数

（1）交换律：

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t) \tag{1.4-8}$$

上式表明两信号在卷积积分中的次序是可以交换的。

（2）分配率：

$$[f_1(t)+f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*f_3(t)+f_2(t)*f_3(t) \tag{1.4-9}$$

（3）结合律：

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)] \tag{1.4-10}$$

上述三式的证明可根据卷积的定义得到（证明略），等学完连续系统的零状态响应后，请思考它们所隐含的物理意义。

2．任意函数与 $\delta(t)$ 、$u(t)$ 的卷积

（1） $f(t)*\delta(t)=f(t)$ （1.4-11）

证明：利用卷积的定义及冲激函数的筛选性质可得

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f\left(t\right)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)$$

式（1.4-11）表明，任意函数与单位冲激函数的卷积就是它本身，$\delta(t)$ 是卷积的单位元。

（2） $f(t)*\delta(t-t_1)=f(t-t_1)$ （1.4-12）

证明同上，略。

式（1.4-12）表明，任意函数与 $\delta(t-t_1)$ 的卷积，相当于该信号通过一个延时器或移位器。

（3） $f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$

（4） $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ （1.4-13）

式（1.4-13）表明，任意函数与 $u(t)$ 的卷积，相当于通过一个积分器。

【例 1.4-5】 已知 $f_1(t)=u(t+1)-u(t-1)$，$f_2(t)=\delta(t+5)+\delta(t-5)$，画出 $y_1(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 的图形。

解：利用性质可得

$$\begin{aligned}y_1(t)&=f_1(t)*f_2(t)=[u(t+1)-u(t-1)]*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]\\&=u(t+6)+u(t-4)-u(t+4)-u(t-6)\end{aligned}$$

波形如图 1.4-4 所示。

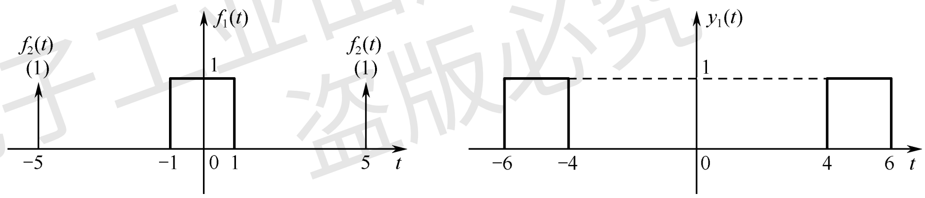


图 1.4-4 例 1.4-5 图形

可见，卷积结果所占的时宽等于两个函数各自时宽的总和。

3．卷积的微分、积分性质

上述卷积代数定律与乘法运算的性质类似，但是卷积的微分或积分却与两函数相乘的微分或积分性质不同。

（1）微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*f_2(t) \tag{1.4-14}$$

式（1.4-14）表明，对两个函数的卷积函数求导，等于其中一个函数的导数与另一个函数的卷积。

证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\frac{\mathrm{d}f_2(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

同理可以证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_2(t)*f_1(t)]=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*f_2(t)$$

显然，$f_2(t)*f_1(t)=f_1(t)*f_2(t)$，故式（1.4-14）成立。

（2）积分

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda=f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda \qquad (1.4\text{-}15)$$

式（1.4-15）表明，对两个函数的卷积函数求积分，等于其中一个函数的积分与另一个函数的卷积。

证明：由卷积的定义式得

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\,\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\lambda$$

对上式右边交换积分次序得

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\,\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)\left[\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda-\tau)\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\tau$$

对上式右边作变量代换：$\eta=\lambda-\tau$，则 $\mathrm{d}\lambda=\mathrm{d}\eta$，积分上限变为 $(t-\tau)$，上式变为

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)\left[\int_{-\infty}^{t-\tau}f_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\tau=f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\eta)\mathrm{d}\eta$$

同理可证：

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

（3）微、积分性质

$$f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (1.4\text{-}16)$$

证明：由积分性质

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

上式两边求导可得

$$f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]\underline{\underline{\text{由微分性质}}}\ \frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

由于卷积满足交换律，显然式（1.4-16）成立。

根据需要利用这些性质，可以简化一些函数的卷积运算。

【例 1.4-6】　$f_1(t)=u(t)$，$f_2(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，利用微积分性质求 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

解：

$$f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\delta(t)*\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\right]u(t)=\frac{1}{a}[1-\mathrm{e}^{-at}]u(t)$$

当被卷积函数的导数出现冲激函数项时，利用微积分性质求解卷积较简单。

【例 1.4-7】　$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的信号如图 1.4-5 所示，利用微积分性质求 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

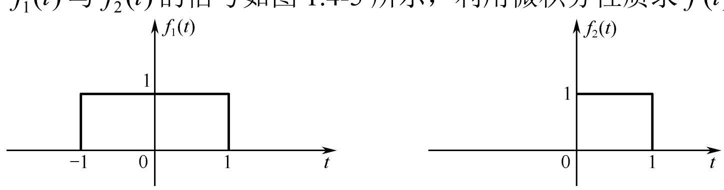


图 1.4-5　例 1.4-7 信号图形

解：$$\int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda = (t+1)[u(t+1)-u(t-1)]+2u(t-1)$$

$$\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)-\delta(t-1)$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= f_1(t)*f_2(t) = \frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t} * \int_{-\infty}^{t} f_1(t)\mathrm{d}\lambda \\
&= [\delta(t)-\delta(t-1)]*\{(t+1)[u(t+1)-u(t-1)]+2u(t-1)\} \\
&= (t+1)u(t+1)-tu(t-1)+u(t-1)-[tu(t)-(t-1)u(t-2)+u(t-2)] \\
&= (t+1)u(t+1)-tu(t-1)+u(t-1)-tu(t)+(t-1)u(t-2)-u(t-2) \\
&= \begin{cases} t+1, & -1<t<0 \\ 1, & 0<t<1 \\ 2-t, & 1<t<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}$$

结果图形如图 1.4-6 所示。

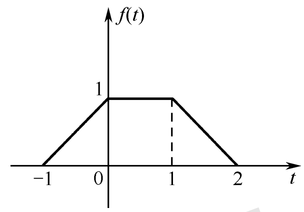


图 1.4-6 例 1.4-7 结果图形

1.5 离散时间信号

1.5.1 离散时间信号的概念

仅在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号。这里“离散”是指信号的定义域——时间是离散的，它只在离散时刻 t_n（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）有定义，在其余的时间不予定义。时刻 t_n 与 t_{n+1} 之间的间隔 $T_s = t_{n+1}-t_n$ 可以是常数，也可以随 n 而变化。本书只讨论 T_s 等于常数的情况。若令相邻时刻 t_{n+1} 与 t_n 之间的间隔为常数 T_s，则离散信号只在均匀离散时刻 $t=\cdots,\ -T_s, 0, T_s,\cdots$ 时有定义，它可以表示成 $x(nT_s)$。为了简便起见，不妨把 $x(nT_s)$ 简记为 $x(n)$。这样离散信号在数学上可以表示为数的序列，故离散信号也常称为序列。

离散信号常可以通过对模拟信号（如语音）进行等间隔采样而得到，如图 1.5-1 所示。例如，对于一个连续时间信号 $x_a(t)$，以每秒 $f_s = 1/T_s$ 的抽样频率采样而产生离散信号，它与 $x_a(t)$ 的关系如下

$$x(n) = x_a(nT_s) \tag{1.5-1}$$

然而，并不是所有的离散信号都是由模拟信号采样获得的。一些信号可以认为是自然产生的离散信号，如每日股票市场价格、人口统计数和仓库存量等。还有一些离散信号是由计算机仿真产生的。

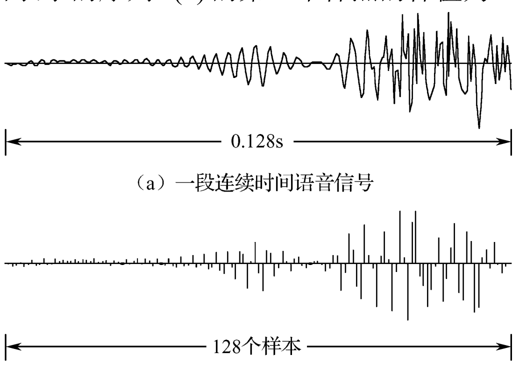
序列 $x(n)$ 可以用图形表示，如图 1.5-2 所示。若序列 $x(n)$ 随 n 的变化规律可以用公式表示，则其数学表达式可以写成闭合形式，如

$$x(n) = A\cos(\beta n+\varphi) \tag{1.5-2}$$

如果 $x(n)$ 是通过观测得到的一组离散数据，也可以逐个列出 $x(n)$ 的值，用集合的形式给出序列的值，例如

$$x(n) = \{ -0.42\quad 0.54\quad \underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1.00}\quad 0.54\quad -0.42\quad -0.99\} \tag{1.5-3}$$

序列 $x(n)$ 中数字 1.00 下面箭头↑表示与序号 $n=0$ 对应，左右两侧依次是 n 取负整数和 n 取正整数时相对应的 $x(n)$ 的值。通常把对应某序号 m 的序列值称为第 m 个样点的样值，如上述用集合表示的序列 $x(n)$ 的第 3 个样点的样值为–0.99。



（b）用 T=1ms 从图（a）获得的样本序列

图 1.5-1　模拟信号的离散化

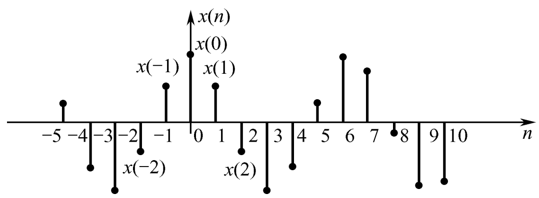


图 1.5-2　离散时间信号的图形表示

1.5.2　序列的基本运算

1．加法和乘法

信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之和是指同一样点（序号）的样值对应相加所构成的“和信号”，即

$$x(n)=x_1(n)+x_2(n) \tag{1.5-4}$$

调音台是信号相加的一个实际例子，它将音乐和语言混合到一起。

信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之积是指同一样点（序号）的样值对应相乘所构成的“积信号”，即

$$x(n)=x_1(n)\bullet x_2(n) \tag{1.5-5}$$

收音机的调幅信号是信号相乘的一个实际例子，它将音频信号加载到被称为载波的正弦信号上。

加法和乘法都是“点对点”的运算。

【例 1.5-1】　已知序列

$$x_1(n)=\begin{cases}2^n, & n<0\\ n+1, & n\geqslant 0\end{cases};\quad x_2(n)=\begin{cases}0, & n<-2\\ 2^{-n}, & n\geqslant -2\end{cases}$$

求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之和以及 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之积。

解： $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之和为

$$x_1(n)+x_2(n)=\begin{cases}2^n, & n<-2\\ 2^n+2^{-n}, & n=-2,-1\\ n+1+2^{-n}, & n\geqslant 0\end{cases}$$

$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之积为

$$x_1(n)x_2(n)=\begin{cases}2^n\times 0\\ 2^n\times 2^{-n}\\ (n+1)\times 2^{-n}\end{cases}=\begin{cases}0, & n<-2\\ 1, & n=-2,-1\\ (n+1)2^{-n}, & n\geqslant 0\end{cases}$$

$x_1(n)$、$x_2(n)$、$x_1(n)+x_2(n)$ 及 $x_1(n)x_2(n)$ 的波形图如图 1.5-3（a）～（d）所示。

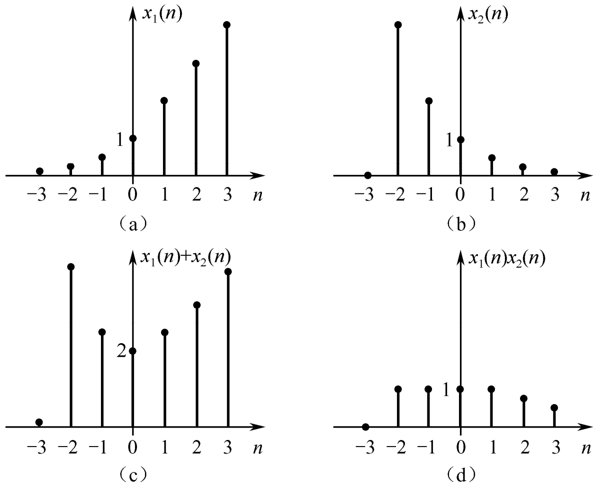


图 1.5-3　序列的加法和乘法

2．移位

给定离散信号 $x(n)$，若有正整数 m，序列 $x(n-m)$ 是将原序列沿 n 轴正方向平移 m 单位，即向右移位（延时序列），而序列 $x(n+m)$ 是将原序列沿 n 轴负方向平移 m 单位，即向左移位（超前序列），如图 1.5-4 所示，图中 $m=2$。在雷达系统中，雷达接收到的目标回波信号就是延时信号。在数字信号处理的硬件设备中，移位实际上是由一系列的移位寄存器来实现的。

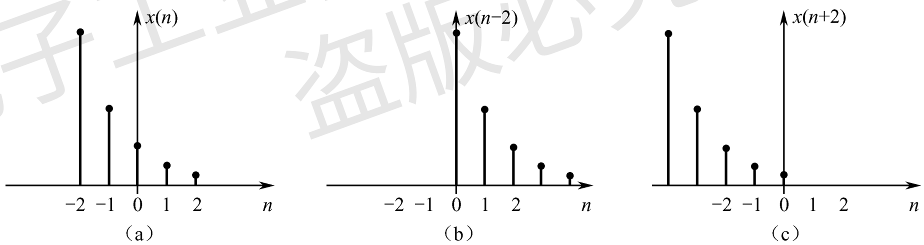


图 1.5-4　序列的移位

3．反褶

给定离散信号 $x(n)$，序列 $x(-n)$ 就是将 $x(n)$ 以 $n=0$ 的纵轴为对称轴进行反褶，如图 1.5-5 所示。

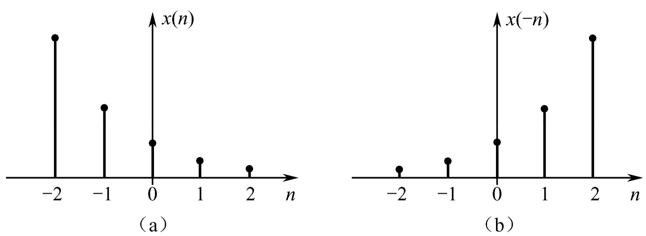


图 1.5-5　序列的反褶

如果将移位和反褶相结合，就可以得到 $x(-n\pm m)$。在画这类信号的波形时，可以先反褶，然后移位，也可以先移位，然后反褶，但是要注意波形的变换始终是针对序号 n 进行的。例如，画信号 $x(-n+m)$，m 取正整数时，可以先将 $x(n)$ 向左移位得到 $x(n+m)$，然后将 $x(n+m)$ 反褶得到 $x(-n+m)$；或可以先将 $x(n)$ 反褶得到 $x(-n)$，然后将 $x(-n)$ 向右移位得到 $x[-(n-m)]=x(-n+m)$。注意这时移位的方向与前述相反。移位和反褶相结合的波形如图 1.5-6 所示。

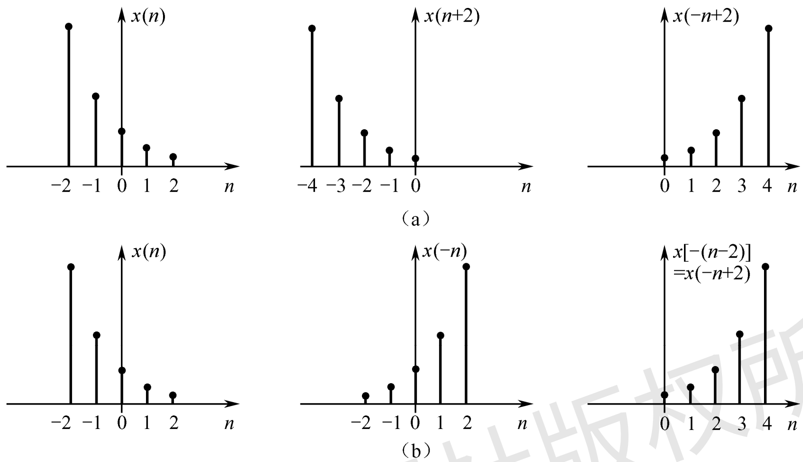


图 1.5-6 移位和反褶相结合

4．累加

设某序列为 $x(n)$，则 $x(n)$ 的累加序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m) \tag{1.5-6}$$

它表示 $y(n)$ 在时刻 n 上的值等于该时刻以及其之前所有时刻的 $x(n)$ 值之和。求和是在虚设的变量 m 下进行的，m 为哑变量，n 为参变量，结果仍为 n 的函数。

累加的概念与连续时间信号中积分的概念是一致的。在积分中，定义信号 $x(t)$ 的积分 $y(t)$ 为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.5-7}$$

可以看到累加运算与积分运算的主要区别是求和与积分符号的不同，它们对信号的作用是一样的。

5．差分运算

序列的差分可以分为前向差分和后向差分。一阶前向差分定义为

$$\Delta x(n)\overset{\text{def}}{=}x(n+1)-x(n) \tag{1.5-8}$$

一阶后向差分定义为

$$\nabla x(n)\overset{\text{def}}{=}x(n)-x(n-1) \tag{1.5-9}$$

式中，Δ 和 ∇ 称为差分算子。由式（1.5-8）和式（1.5-9）可见，前向差分和后向差分的关系为

$$\nabla x(n)=\Delta x(n-1) \tag{1.5-10}$$

两者仅移位不同，没有原则上的差别，因而它们的性质也相同。一般地，为方便起见，前向差分方程多用于状态变量分析；后向差分方程多用于因果系统与数字滤波器的分析。本书主要讨论后向差分，简称差分。

序列的差分运算与连续时间信号的微分运算相对应。在微分中，我们定义

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}\end{aligned}\tag{1.5-11}$$

就离散信号而言，可用两个相邻序列值的差值代替 $\Delta x(t)$，用相应离散时间之差代替 Δt，并称这两个差值之比为离散信号的变化率，就可以由微分运算得到差分运算：

$$\frac{\Delta x(n)}{\Delta n}=\frac{x(n+1)-x(n)}{(n+1)-n}\tag{1.5-12}$$

$$\frac{\nabla x(n)}{\nabla n}=\frac{x(n)-x(n-1)}{n-(n-1)}\tag{1.5-13}$$

二阶差分可以定义为

$$\nabla^2 x(n)=\nabla[\nabla x(n)]=x(n)-2x(n-1)+x(n-2)\tag{1.5-14}$$

类似地，可定义三阶、四阶、…、m阶差分。一般地，m阶差分为

$$\nabla^m x(n)=\nabla[\nabla^{m-1}x(n)]=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\begin{pmatrix}m\\i\end{pmatrix}x(n-i)\tag{1.5-15}$$

式中

$$\begin{pmatrix}m\\i\end{pmatrix}=\frac{m!}{(m-i)!i!},\quad i=0,1,2,\cdots,m\tag{1.5-16}$$

为二项式系数。

6．尺度变换（抽取与插值）

（1）抽取。

给定序列 $x(n)$，令

$$x_{\mathrm{d}}(n)=x(Dn)\text{，}\quad D\text{为正整数}\tag{1.5-17}$$

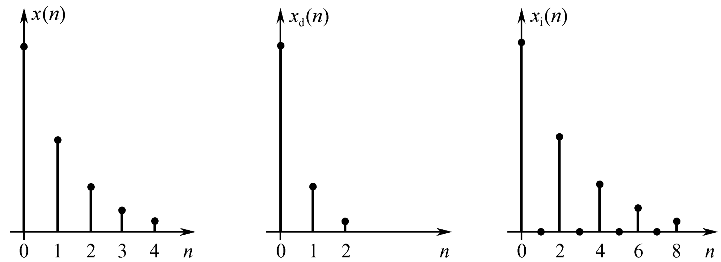
则 $x_{\mathrm{d}}(n)$ 表示从 $x(n)$ 的每连续 D 个样本值中取出一个组成的新序列，这种运算称为抽取。抽取丢失了原信号的部分信息，它不是简单的时间轴的压缩。若序列 $x(n)$ 是由连续信号 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 以 f_{s} 为抽样频率抽样产生的，则可以认为 $x_{\mathrm{d}}(n)$ 是以 $1/D$ 倍的抽样频率 (f_{s}/D) 对 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 抽样产生的，相当于将抽样间隔由 T 变成 DT。当 $D=2$ 时，$x(n)$ 和 $x_{\mathrm{d}}(n)$ 分别如图 1.5-7（a）、（b）所示。

（2）插值。

给定序列 $x(n)$，令

$$x_{\mathrm{i}}(n)=\begin{cases}x(n/I), & n=mI,\quad I\text{为正整数}, m\text{为整数}\\0, & \text{其他}n\end{cases}\tag{1.5-18}$$

则 $x_{\mathrm{i}}(n)$ 表示在原序列 $x(n)$ 的两个相邻样本值之间插入 $(I-1)$ 个零值（I 为正整数），故也称为序列的零值插入。当 $I=2$ 时，$x_{\mathrm{i}}(n)$ 如图 1.5-7（c）所示。



（a）　（b）　（c）

图 1.5-7　序列的抽取与插值

1.5.3　基本序列

下面介绍一些典型的离散信号。

1．单位抽样序列

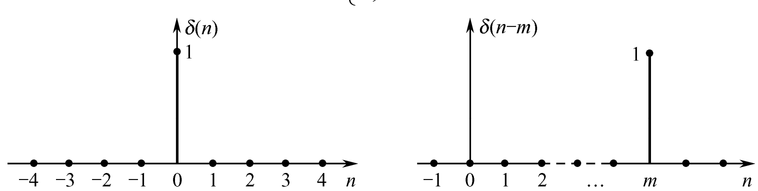
单位抽样序列也称单位冲激序列、单位序列、单位样本序列等，它的定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1.5-19}$$

单位抽样序列只在 $n=0$ 处有一个单位值 1，其余点上皆为 0。单位抽样序列如图 1.5-8（a）所示。它是最常用、最重要的一种序列，它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$。但是，在连续时间系统中，$\delta(t)$ 是 $t=0$ 点脉宽趋于零，幅值趋于无限大，面积为 1 的信号，是极限概念的信号，并非任何现实的信号。而离散时间系统中的 $\delta(n)$，却完全是一个现实的序列，它的样本值是 1，是一个有限值。所以单位抽样序列没有遇到那么多像连续时间冲激所带来的数学处理上的麻烦，它的定义既简单又明确。

若将 $\delta(n)$ 在时间轴上延时 m 个抽样周期，则得到 $\delta(n-m)$，其波形图如图 1.5-8（b）所示，即

$$\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases} \tag{1.5-20}$$



（a）　（b）

图 1.5-8　单位抽样序列 $\delta(n)$ 及其延时 $\delta(n-m)$

和单位冲激信号 $\delta(t)$ 类似，单位抽样序列 $\delta(n)$ 也有抽样性质：

$$x(n)\delta(n-m)=x(m)\delta(n-m)=\begin{cases}x(m), & n=m\\ 0, & 其他n\end{cases} \tag{1.5-21}$$

这表明，单位抽样序列（或其延时）和任意函数相乘，结果是取出该函数在单位抽样序列出现时刻的样本值。

单位抽样序列的一个重要作用就是任何序列都可以用一组幅度加权和延时的单位抽样序列的和来表示。例如，在图 1.5-9 中，序列 $x(n)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} x(n) = & \cdots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) \\ & + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) + \\ & \cdots + x(m)\delta(n-m) + \cdots \end{aligned}$$

一般地，上式简写为

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \tag{1.5-22}$$

根据卷积和的定义

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = x(n) * \delta(n) \tag{1.5-23}$$

该公式可以理解为信号的时域分解公式。也就是说，任何序列都可以以 $\delta(n)$ 为基进行分解，这和连续时间信号在时域分解为 $\delta(t)$ 的积分的意义是一样的。这个分解用数学符号来表示，实际上就是卷积。

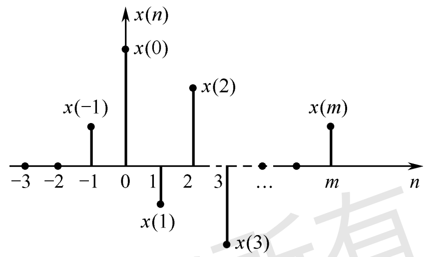


图 1.5-9　用单位抽样序列表示任意序列

2．单位阶跃序列

单位阶跃序列定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{1.5-24}$$

它类似于连续时间信号中的单位阶跃函数 $u(t)$。但 $u(t)$ 在 $t=0$ 时通常不予定义，或者定义为左极限与右极限之和的一半，即 $u(0)=[u(0_-)+u(0_+)]/2=[0+1]/2=1/2$，总之它的定义不甚明确。而 $u(n)$ 在 $n=0$ 时明确定义为 $u(0)=1$，它是一个普通序列。$u(n)$ 以及延时 $u(n-m)$ 如图 1.5-10 所示。

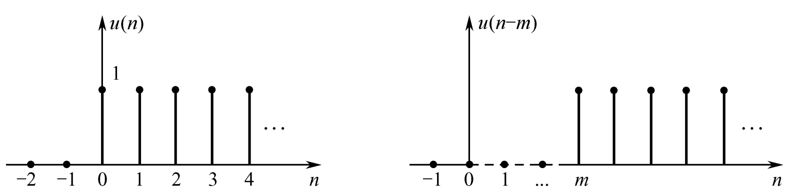


图 1.5-10　单位阶跃序列 $u(n)$ 及其延时 $u(n-m)$

阶跃序列 $u(n)$ 和单位抽样序列 $\delta(n)$ 的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \tag{1.5-25}$$

这就是 $u(n)$ 的后向差分。

将 $u(n)$ 看作一组延时的单位抽样序列之和，这时，非零样本值全都是 1，有

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots \tag{1.5-26}$$

或者

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m) \tag{1.5-27}$$

令 $n-m=k$，有

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k) \tag{1.5-28}$$

这表明，$u(n)$ 为 $\delta(n)$ 的累加。

3．矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & 其他n\end{cases} \tag{1.5-29}$$

矩形序列 $R_N(n)$ 如图 1.5-11 所示。

将 $R_N(n)$ 用 $\delta(n)$ 和 $u(n)$ 表示为

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots+\delta[n-(N-1)] \tag{1.5-30}$$

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{1.5-31}$$

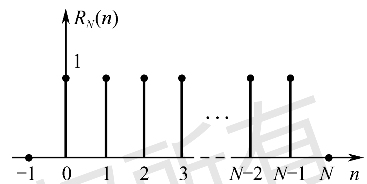


图 1.5-11　矩形序列

4．实指数序列

$$x(n)=Aa^n u(n) \tag{1.5-32}$$

式中，A 和 a 都是实数。当 $|a|<1$ 时，序列是收敛的；而当 $|a|>1$ 时，序列是发散的。a 为负数时，序列是正负交替变化的。单边实指数序列如图 1.5-12 所示。

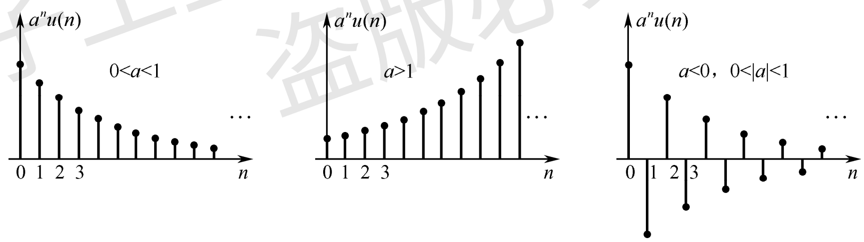


图 1.5-12　单边实指数序列

5．正弦序列

$$x(n)=A\cos(\beta n+\varphi) \tag{1.5-33}$$

式中，A 为幅度；φ 为起始相位；β 为数字域角频率，它反映了序列变化的速率。三个参数均为实数。需要注意的是，n 是一个无量纲的整数，由此 β 的量纲必须是弧度。在连续时间信号中，角频率 ω 的单位是弧度每秒，倘若我们希望与连续时间的情况保持一种更为相近的对照，可以认为 β 的单位为弧度每样本，而 n 的单位就是样本。

$\beta=0.1\pi$ 时，序列 $x(n)$ 如图 1.5-13 所示，该序列值每 20 个重复一次循环。正弦序列的周期性在前述已详细讨论，这里不再赘述。

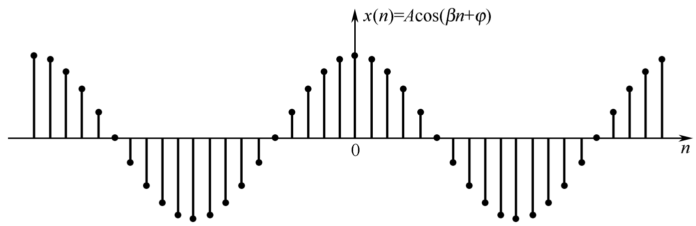


图 1.5-13 当 $A=1$，$\beta=0.1\pi$，$\varphi=0$ 时的正弦序列

6．复指数序列

序列值为复数的序列称为复序列，复序列的每个值具有实部和虚部两部分。

当指数序列 $x(n)=Aa^n$ 中 A 和 a 都是复数时，令 $A=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$，$a=|a|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}$，有

$$x(n)=Aa^n=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\cdot|a|^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta n}=|A||a|^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta n+\varphi)} \tag{1.5-34}$$

式（1.5-34）中，模和相角分别为

$$|x(n)|=|A||a|^n,\quad \arg[x(n)]=\beta n+\varphi \tag{1.5-35}$$

式（1.5-34）还可以表示为实部和虚部

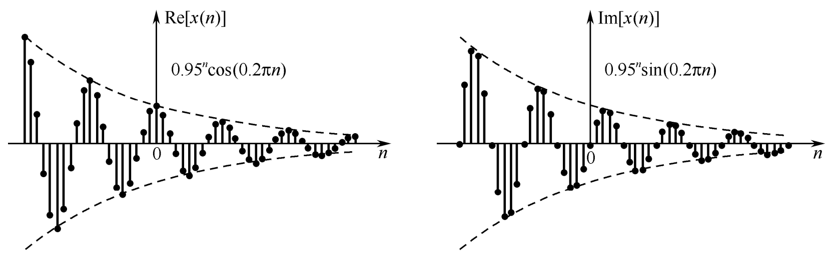
$$\begin{aligned} x(n)&=|A||a|^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta n+\varphi)}\\ &=|A||a|^n\cos(\beta n+\varphi)+\mathrm{j}|A||a|^n\sin(\beta n+\varphi)\end{aligned} \tag{1.5-36}$$

可见，复指数序列 $x(n)=Aa^n$ 是实部和虚部分别指数加权的正弦序列。若 $|a|>1$，该序列振荡的包络按指数增长；若 $|a|<1$，该序列振荡的包络按指数衰减。包络衰减的复指数序列如图 1.5-14 所示。

当 $|a|=1$ 时，$x(n)$ 也称为复正弦序列（或称为虚指数序列），其实部和虚部分别是余弦和正弦序列

$$x(n)=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta n+\varphi)}=|A|\cos(\beta n+\varphi)+\mathrm{j}|A|\sin(\beta n+\varphi) \tag{1.5-37}$$

这里 β 也称为复正弦或复指数的频率。



（a）序列的实部 $\mathrm{Re}[x(n)]=0.95^n\cos(0.2\pi n)$　（a）序列的虚部 $\mathrm{Im}[x(n)]=0.95^n\sin(0.2\pi n)$

图 1.5-14 复指数序列 $x(n)=0.95^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.2\pi n}$

1.6 离散时间信号的卷积和

1.6.1 卷积和的定义及计算

若两个序列为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，则 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的卷积和定义为

$$x(n)=x_1(n)*x_2(n)\overset{\text{def}}{=}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m) \tag{1.6-1}$$

注意，这里求和是在虚设的变量m下进行的，m为求和变量，也称为哑变量，n为参变量，结果仍为n的函数。

【例 1.6-1】 已知序列

$$x_1(n)=\begin{cases}0, & n<0\\ a^n, & n\geqslant 0\end{cases}；\quad x_2(n)=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n\geqslant 0\end{cases}$$

求$x(n)=x_1(n)*x_2(n)$。

解： 由卷积和的定义式，有

$$x_1(n)*x_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)$$

对于$x_1(m)$，考虑仅当$m\geqslant 0$时，序列有非零表达式$x_1(m)=a^m$，因此求和下限可以改为$m=0$；对于$x_2(n-m)$，当$n-m\geqslant 0$时，即$m\leqslant n$时，序列有非零表达式$x_2(n-m)=1$，因此求和上限可以改为n，故上式可写为

$$\begin{aligned}x_1(n)*x_2(n)&=\sum_{m=0}^{n}a^m\times 1=\sum_{m=0}^{n}a^m\\&=\begin{cases}\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a\neq 1\\ n+1, & a=1\end{cases}\end{aligned}$$

显然，上式中$n\geqslant 0$，因为若求和上限小于求和下限，则求和区间不存在。故最后结果为

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a\neq 1，n\geqslant 0\\ n+1, & a=1，n\geqslant 0\end{cases}$$

由上例可知，计算卷积和时，正确地选择参变量n的适用区域以及确定相应的求和上下限是十分关键的步骤，这可以借助作图的方法辅助解决。图解法能直观地表明卷积的含义，有助于对卷积概念的理解，同时，图解法也是求解序列卷积和的有效方法。

图解法计算序列$x_1(n)$与$x_2(n)$的卷积和的步骤如下：

（1）换元：将序列$x_1(n)$与$x_2(n)$的自变量n用m代替；

（2）反转平移：将序列$x_2(m)$以纵坐标为轴进行翻转，得到序列$x_2(-m)$，然后将序列$x_2(-m)$沿m轴正方向平移n个单位，成为$x_2(n-m)$；

（3）乘积：求乘积$x_1(m)x_2(n-m)$；

（4）求和：m从$-\infty$到∞对乘积项求和，得到某一特定点$x(n)$的值。

依次取$n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$，重复步骤（3）、（4），即得到全部$x(n)$的值。下面举例说明。

【例 1.6-2】 已知序列$x_1(n)=\{\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{1},2,3\}$，$x_2(n)=\{\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{1},1,1,1\}$，求$x(n)=x_1(n)*x_2(n)$。

解： 将序列$x_1(n)$与$x_2(n)$的自变量换为m，得到序列$x_1(m)$和$x_2(m)$如图 1.6-1（a）和（b）所示。

将$x_2(m)$反转后，得到$x_2(-m)$如图 1.6-1（c）所示。

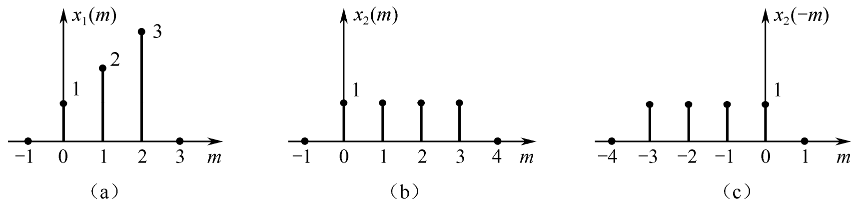


图 1.6-1　例 1.6-2 图

逐次令 $n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$，计算乘积并求和，其图示如图 1.6-2 所示。

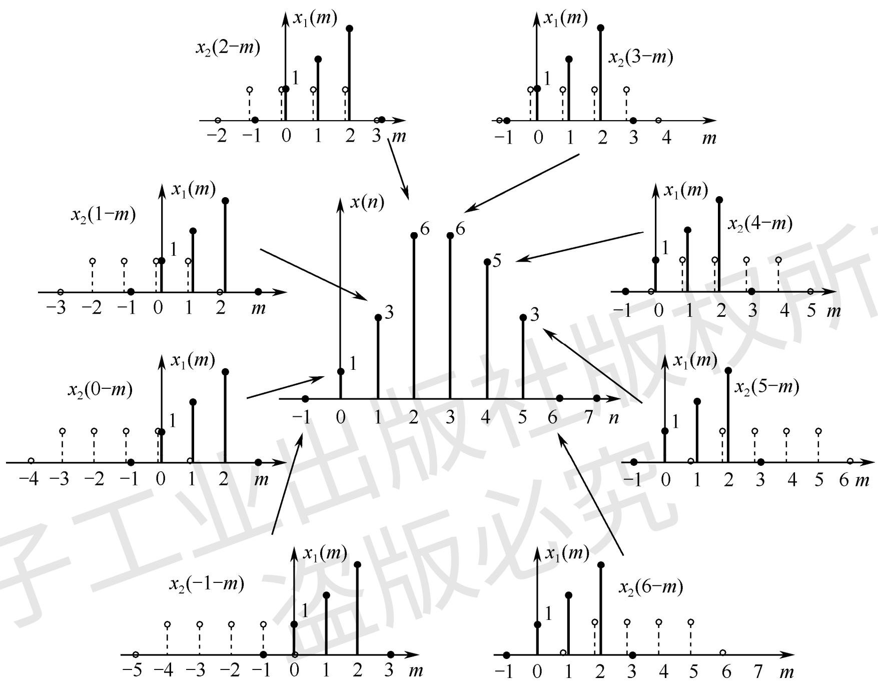


图 1.6-2　例 1.6-2 图卷积和的计算过程

（1）当 $n<0$ 时，$x_1(m)$ 和 $x_2(n-m)$ 没有交叠部分，乘积处为零，故 $x(n)=0$。

（2）当 $n=0$ 时，有

$$x(0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(0-m)=x_1(0)x_2(0)=1$$

（3）当 $n=1$ 时，有

$$x(1)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(1-m)=x_1(0)x_2(1)+x_1(1)x_2(0)=3$$

（4）当 $n=2$ 时，有

$$\begin{aligned}x(2)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(2-m)\\&=x_1(0)x_2(2)+x_1(1)x_2(1)+x_1(2)x_2(0)=6\end{aligned}$$

（5）当 $n=3$ 时，有

$$x(3)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(3-m)$$
$$=x_1(0)x_2(3)+x_1(1)x_2(2)+x_1(2)x_2(1)=6$$

（6）当 $n=4$ 时，有

$$x(4)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(4-m)=x_1(1)x_2(3)+x_1(2)x_2(2)=5$$

（7）当 $n=5$ 时，有

$$x(5)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(5-m)=x_1(2)x_2(3)=3$$

（8）当 $n\geqslant 6$ 时，$x_1(m)$ 和 $x_2(n-m)$ 没有交叠部分，乘积处为零，故 $x(n)=0$ 。

综上所述，$x(n)=x_1(n)*x_2(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},3,6,6,5,3\}$

上述图解过程较为复杂，考虑到有限长序列可以用序列的形式表示，故也可以把图示的过程用序列阵表的形式表示，从而简化求解过程。卷积和的列表法见表 1.6-1，可见计算结果同前。

表 1.6-1　卷积和的序列阵表

↓ n=0

$x_1(m)$ / $x_2(n\text{-}m)$ / n				1	2	3					$x(n)$
0	1	1	1	1							1
1		1	1	1	1						3
2			1	1	1	1					6
3				1	1	1	1				6
4					1	1	1	1			5
5						1	1	1	1		3
6							1	1	1	1	0

观察卷积和

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)$$
$$=\cdots+x_1(-1)x_2(n+1)+x_1(0)x_2(n)+x_1(1)x_2(n-1)+\cdots$$

求和符号内 $x_1(m)$ 的序号 m 和 $x_2(n-m)$ 的序号 $n-m$ 之和恰好等于 n 。从例 1.6-2 的求解过程亦可以看出，$x(n)$ 的某一特定值 $x(n_0)$ 为所有两序列序号之和为 n_0 的那些样本乘积之和。因此，我们将这些序号和相同的乘积排成一列，用竖式乘法来表示。例 1.6-2 中：

$$x_1(n)=\{0,x_1(0),x_1(1),x_1(2),0\}$$
$$x_2(n)=\{0,x_2(0),x_2(1),x_2(2),x_2(3),0\}$$

将它们排成乘法：

$$
\begin{array}{llllll}
 & & & x_1(0) & x_1(1) & x_1(2) \\
\times & & x_2(0) & x_2(1) & x_2(2) & x_2(3) \\
\hline
 & & & x_1(0)x_2(3) & x_1(1)x_2(3) & x_1(2)x_2(3) \\
 & & x_1(0)x_2(2) & x_1(1)x_2(2) & x_1(2)x_2(2) & \\
 & x_1(0)x_2(1) & x_1(1)x_2(1) & x_1(2)x_2(1) & & \\
x_1(0)x_2(0) & x_1(1)x_2(0) & x_1(2)x_2(0) & & & \\
\hline
x_1(0)x_2(0) & & & & & \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1(0)x_2(1)+x_1(1)x_2(0)} \\
 & & \multicolumn{4}{l}{x_1(0)x_2(2)+x_1(1)x_2(1)+x_1(2)x_2(0)} \\
 & & & \multicolumn{3}{l}{x_1(0)x_2(3)+x_1(1)x_2(2)+x_1(1)x_2(2)} \\
 & & & & \multicolumn{2}{l}{x_1(1)x_2(3)+x_1(2)x_2(2)} \\
 & & & & & x_1(2)x_2(3)
\end{array}
$$

由上式可见，将 $x_1(n)$ 作为被乘数，将 $x_2(n)$ 作为乘数，可以简单地列一个竖式乘法求其两序列的卷积和。求卷积和的竖式乘法与乘法的唯一差别是没有进位运算。

从上述竖式乘法中我们还可以简单地看出两序列卷积后得到的新序列序号范围的长度。若有限长序列 $x_1(n)$ 非零区间为 $M_1 \leqslant n \leqslant M_2$，序列长度为 $N_1 = M_2 - M_1 + 1$；有限长序列 $x_2(n)$ 非零区间为 $M_3 \leqslant n \leqslant M_4$，序列长度为 $N_2 = M_4 - M_3 + 1$，则 $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 的非零区间为 $M_1 + M_3 \leqslant n \leqslant M_2 + M_4$，序列长度为 $N = (M_2 + M_4) - (M_1 + M_3) + 1 = N_1 + N_2 - 1$。我们可以先做一个竖式乘法，得到一串样本值，然后根据上述规律得到卷积和序列的某一个样本值（一般是第一个）的序号，从而确定整个序列。例 1.6-2 的竖式乘法如下所示：

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 \\
\times & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 2 & 3 \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
 & 1 & 2 & 3 & & \\
1 & 2 & 3 & & & \\
\hline
\underset{\substack{\uparrow \\ n=0+0}}{1} & 3 & 6 & 6 & 5 & 3
\end{array}
$$

于是，可以得到所求卷积和 $x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, 3, 6, 6, 5, 3\}$，该结果与前面两种方法得到的结果是一致的。

1.6.2 卷积和的性质

卷积和作为与卷积积分对应的运算，其性质也具有相似的形式。

1．代数运算规则

（1）交换律：

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n) \tag{1.6-2}$$

上式表明，卷积和中两个序列的先后次序是无关的。

（2）结合律：

$$x(n)*h_1(n)*h_2(n)=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)] \tag{1.6-3}$$

（3）分配律：

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n) \tag{1.6-4}$$

2．序列 $x(n)$ 与单位抽样序列 $\delta(n)$ 的卷积

序列 $x(n)$ 与单位抽样序列 $\delta(n)$ 的卷积和为序列 $x(n)$ 本身。这个结果式（1.5-23）已经给出了。

$$x(n)*\delta(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=x(n) \tag{1.6-5}$$

上述求和当且仅当 $n-m=0$，也即 $m=n$ 时，$\delta(n-m)=1$，其他 $m\neq n$ 时求和项全为零，故有 $x(n)*\delta(n)=x(n)$。

将该式推广，序列 $x(n)$ 与移位单位抽样序列 $\delta(n-n_0)$ 的卷积为

$$x(n)*\delta(n-n_0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-n_0-m)=x(n-n_0) \tag{1.6-6}$$

进一步

$$\begin{aligned}x(n-n_1)*\delta(n-n_2)&=x(n)*\delta(n-n_1)*\delta(n-n_2)\\&=x(n)*\delta(n-n_1-n_2)\\&=x(n-n_1-n_2)\end{aligned} \tag{1.6-7}$$

3．移位性质

若 $x(n)*h(n)=y(n)$

则

$$x(n-m_1)*h(n-m_2)=x(n-m_2)*h(n-m_1)=y(n-m_1-m_2) \tag{1.6-8}$$

证明同上。

习题 1

1．画出下列信号的波形图。

（1）$f_1(t)=(2-2\mathrm{e}^{-t})u(t)$　（2）$f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$

（3）$f_3(t)=\mathrm{e}^{-t}u(\cos t)$　（4）$f_4(t)=\cos 2(\pi t)[u(t-1)-u(t-3)]$

（5）$f_5(t)=4u(t+2)-u(t)-2u(t-1)+2u(t-3)$　（6）$f_6(t)=\sin(\pi t)[u(5-t)-u(-t)]$

2．判断下列信号是否为周期信号，若是周期信号，确定信号的周期。

（1）$f(t)=A\sin(3t+45^{\circ})$　（2）$f(t)=A\cos(5t+30^{\circ})$

（3）$f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi t-1)}$　（4）$f(t)=5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}t}$

（5） $f(t)=a\sin t+b\sin 2t$　　（6） $f(t)=4\sin 2t+5\cos(\pi t)$

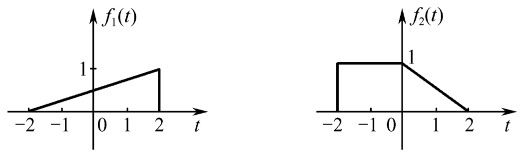
（7） $f(t)=\left[\sin\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^2$

3．信号 $f(t)$ 的波形图如图 1 所示，试画出下列信号的波形。

（1） $f_1(2t-1)$　　（2） $f_2(-2t-2)$　　（3） $f_1(2-t)$

（4） $f_2(t+2)u(-t)$　　（5） $f_1\left(2-\dfrac{1}{2}t\right)$　　（6） $f_2\left(\dfrac{1}{2}t-2\right)$

（7） $f_1(2t)+f_2(t-1)$　　（8） $f_1(2t-1)f_2(t+1)$



（a）　　（b）

图 1

4．已知信号 $f(t+1)$ 的波形图如图 2 所示，试画出 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f\left(\dfrac{1}{2}t+1\right)\right]$ 的波形。

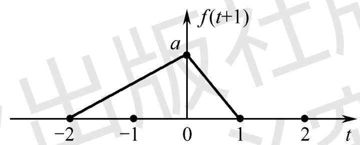
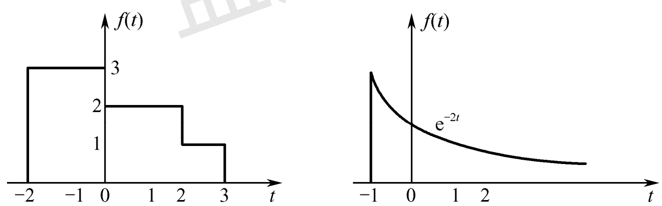


图 2

5．写出图 3 中各信号的解析表达式。



（a）　　（b）

图 3

6．计算下列各题。

（1） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}\delta(t)]$　　（2） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}u(t)]$

（3） $\mathrm{e}^{-4t}\delta(2+2t)$　　（4） $\mathrm{e}^{-5t}\delta(t+2)$

（5） $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]\mathrm{d}t$　　（6） $\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}[\delta(\tau)+\delta'(\tau)]\mathrm{d}\tau$

（7） $\int_{-5}^{5}(2t^2+t-5)\delta(3-t)\mathrm{d}t$　　（8） $\int_{-1}^{5}\left(t^2+t-\sin\dfrac{\pi}{4}t\right)\delta(t+2)\mathrm{d}t$

（9） $\int_{0}^{10}\delta(t-4)\mathrm{d}t$　　（10） $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+t+1)\delta\left(\dfrac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$

7．用图解法计算图 4 中 $f_1(t) * f_2(t)$ 的卷积积分。

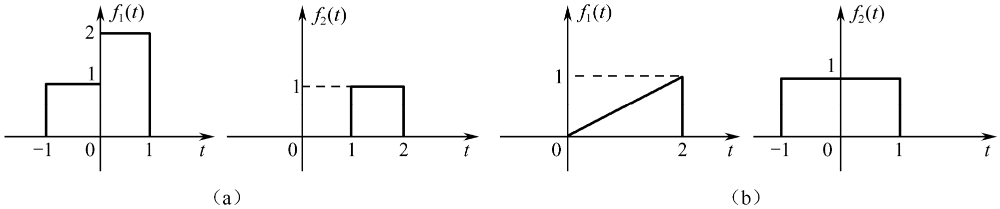


图 4

8．利用卷积的性质，求下列函数的卷积 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$。

（1） $f_1(t) = \cos(\omega t)$， $f_2(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$

（2） $f_1(t) = u(t) - u(t-2)$， $f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$

（3） $f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$ ， $f_2(t) = u(t-1)$

（4） $f_1(t) = \cos 2(\pi t)[u(t) - u(t-1)]$， $f_2(t) = u(t)$

（5） $f_1(t) = tu(t)$， $f_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$

（6） $f_1(t) = u(t) - u(t-4)$， $f_2(t) = \sin(\pi t)u(t)$

（7） $f_1(t) = tu(t)$， $f_2(t) = u(t) - u(t-2)$

（8） $f_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t+1)$， $f_2(t) = u(t-3)$

9．画出下列信号的波形图。

（1） $f_1(n) = n^2[u(n+3) - u(n-3)]$

（2） $f_2(n) = 2^{1-n}u(n-1)$

（3） $f_3(n) = (-1)^n u(n-2)$

（4） $f_4(n) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)[u(n) - u(n-7)]$

（5） $f_5(n) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n \leqslant 0 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n}, & n < 0 \end{cases}$

10．写出图 5 中各信号的解析表达式。

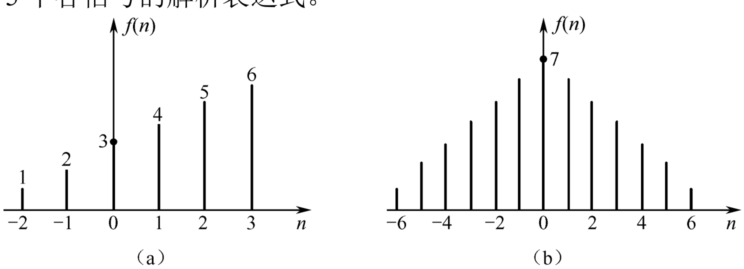


图 5

11．判断下列信号是否为周期信号，若是周期信号，确定信号的周期。

（1） $f(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{2} - \pi\right)}$

（2） $f(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}n - \pi\right)}$

（3） $f(n) = A\cos\left(\dfrac{3\pi}{7}n - \dfrac{\pi}{8}\right)$

（4） $f(n) = A\cos(\omega_0 n)u(n)$

（5） $f(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\{\delta[n-3m]-\delta[n-1-3m]\}$

（6） $f(n)=\cos\left(\dfrac{n}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$

12．已知离散信号 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 的波形图如图 6 所示，试画出下列信号的波形。

（1） $f_1(n-2)$　　（2） $f_2(n-2)u(n+1)$

（3） $f_1(n+2)[u(n+1)-u(n-3)]$　　（4） $f_2(-2n-4)$

（5） $f_1(n+1)+f_2(-2n)$　　（6） $f_1(n)+f_2(2n)$

（7） $f_1(n-2)f_2(n-1)$

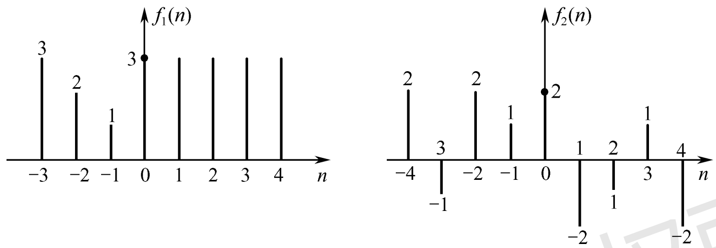


图 6

13．用图解法计算 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)*[u(n)-u(n-2)]$，并画出卷积和的波形。

14．用卷积和定义计算下列各题。

（1） $2^n u(n)*3^n u(n)$　　（2） $u(n)*nu(n)$

（3） $2*\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)$　　（4） $u(n)*3^n u(-n)$

15．用位移性质计算下列各卷积和。

（1） $nu(n)*[\delta(n+1)-\delta(n-2)]$　　（2） $nu(n)*2^n u(n-1)$

（3） $nu(n)*(n-1)u(n-1)$　　（4） $3^{n-1}u(n-2)*2^n u(n-1)$

16．求下列序列的卷积和 $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$ 。

（1） $x_1(n)=2^n u(-n-1)$ ， $x_2(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n-1)$

（2） $x_1(n)=(0.3)^n u(n),\ x_2(n)=(0.5)^n u(n)$

（3） $x_1(n)=\{\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{1},2,0,1\}$， $x_2(n)=\{\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{2},2,3\}$

（4） $x_1(n)=u(n+2),\ x_2(n)=u(n-3)$

17.已知 $f_1(n)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n u(n)$，$f_2(n)=\delta(n)-\dfrac{1}{4}\delta(n-1)$，$f_3(n)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$，计算：

（1） $y_1(n)=[f_1(n)*f_2(n)]*f_3(n)$　　（2） $y_2(n)=[f_2(n)*f_3(n)]*f_1(n)$

（3） $y_3(n)=[f_1(n)*f_3(n)]*f_2(n)$

$y_1(n)$，$y_2(n)$ 和 $y_3(n)$ 相等吗？说明为什么。