

第3章 电磁场的波动性

本章先简单回顾波与波动方程,了解波这种物质特殊运动形式的共同特性。然后从第2章给出的麦克斯韦方程组出发,推导出电磁场的波动方程,得出时变电磁场能以波动的形式存在。接着讨论单色电磁波的一些特点、相速度与群速度,以及电磁波与物质作用时的介质色散问题。最后介绍电磁波的辐射。



3.1 电磁场的波动方程

1. 波与波动方程

振动在空间传播形成波动。在波场中,描写振动的物理量随时间、空间呈周期性地变化。例如,一个沿 x 方向传播的平面波的函数为

$$u(x, t) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3.1-1)$$

式中, A 是振幅, λ 是波长, T 是周期。也可以用其他一些参数描写波动,如波矢量 \mathbf{k} 、频率 ν 、圆频率 ω 等,它们的关系是

$$\lambda = 2\pi/k, \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi/T \quad (3.1-2)$$

我们知道,力学中描写的波动,如声波、水波、地震波等,都可以看成质点振动在空间的传播。按照牛顿定律,可以导出质点位移满足的微分方程,它是关于时间和空间的偏微分方程。其一维形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-3)$$

式中, v 为波速,即

$$v = \lambda/T = \omega/k \quad (3.1-4)$$

三维情况下,式(3.1-3)改写为

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-5)$$

2. 电磁场波动方程

现在我们假定在真空中的某一区域内存在一种迅速变化的电荷电流分布,而在该区域以外的空间中,电荷及电流密度处处为零,即 $\rho = 0, j = 0$ 。在此情况下,我们来研究此空间(无源空间)内电磁场的运动形式。

在无源空间中(电流源为零,电荷源为零),电场和磁场相互激发,电磁场的运动规律满足下列麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.1-6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.1-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.1-8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1-9)$$

现在我们从这组联立的偏微分方程组中找出电场和磁场各自满足的方程,再看它们的解具有什么样的性质。为此,对式(3.1-7)两边取旋度

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (3.1-10)$$

应用矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

而按式(3.1-9),即 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$,再利用式(3.1-6),式(3.1-10)化为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-11)$$

式中

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (3.1-12)$$

用同样的方法可以导出磁场 \mathbf{H} 所满足的方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1-13)$$

将式(3.1-11)或式(3.1-13)与式(3.1-5)比较发现,它们的形式完全相同,表明这里的电磁场是以波动形式存在的。或者说,一切脱离场源(电流源,电荷源)而单独存在的电磁场,在空间的运动都是以波动的形式进行的。以波动形式运动的电磁场称为电磁波。在真空中传播的一切电磁波(包含各种频率范围的电磁波,如无线电波、光波、X射线、 γ 射线等),无论它们的频率是多少,其传播速度都为 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ 。

3. 光的电磁理论

麦克斯韦用他自己总结出的电磁场基本方程,推导出了电磁场波动方程,预言了电磁波的存在,并得出真空中的电磁波以速度 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ 传播。常数 c 首先由科耳劳什和韦伯于 1856 年从测量电容器的静电单位和电磁单位之比定出。结果发现,它和光在自由空间中的传播速度相同,这使麦克斯韦想到:光就是一种电磁波!

早在 1675 年罗麦由木卫一星蚀观测中实现了光速测定,后来布雷德利于 1728 年又用不同方法(从恒星光行差)做了光速测定。第一个对地面光源光速的测量是由斐索于 1849 年实现的。后来,迈克耳孙用多年时间完善测量系统,根据大约 200 次测量的平均值得到 c 为 299796km/s。梅赛于 1923 年测量了电磁波在导线上的速度,得到 c 为 299782km/s。

从各种不同测量(在一些情况下使用的辐射频率和光学测量中所用的频率要差几十万倍)得到的 c 值如此接近一致,这使麦克斯韦理论得到了有力的证明。现代测量技术的发展,利用激光技术使光计量的准确度达到了新的水平,多种测量方法得到的结果相当一致。1983 年 10 月,第十七届国际计量大会正式通过新的“米”定义:“米(m)是光在真空中于 $1/299792458$ 秒时间间隔内所经过的路径的长度”。在这个新的“米”定义中,光速作为等于 299792458m/s 的定义值确定下来,不再具有不确定度。

光的波动性已为众多的干涉、衍射实验所证实。惠更斯、杨氏、菲涅耳等人都对建立光的波动理论做出过重大贡献。然而,在麦克斯韦以前,光被认为是在一种特殊弹性媒质(称为“以太”)中传播的机械波,为了不与观察测量事实抵触,必须赋予“以太”极其矛盾的属性:密

度极小而弹性模量极大。这不仅在实验上无法得到证实,理论上也显得荒唐。麦克斯韦指出了光的电磁属性,认为光是一种电磁波,这在认识光的本质方面是一个重大的突破。

后面我们还将介绍,在无界空间中传播的电磁波是横波,即振动面与传播方向垂直,这与光的偏振实验得出的结论一致。用电磁场理论说明光的反射、折射与衍射等,也得到满意的结果。除了涉及物质微观结构的光学现象需要用量子理论外,宏观领域的光学现象在应用电磁理论时获得圆满成功,从而进一步确认了光的电磁理论。

然而,麦克斯韦阐述的理论像机械波动理论一样,还需要有以太,只不过是电磁的以太代替了机械的以太,在电磁以太中有位移电流和磁场,麦克斯韦本人长期试图借助机械模型来描述电磁场。随着物理学的发展,人们才逐渐放弃机械模型解释麦克斯韦方程,应当把电磁场看做物质的一种特殊形态,是不能再简化的东西,电磁波不同于一般的弹性波,它不必有其他的传播介质,电磁振动在空间的传播是由于变化的电场和磁场相互激发的缘故。

3.2 单色电磁波

3.1 节导出了电磁场在真空中的波动方程,场量 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 与时间有关,形成时变电磁场。如果激发电磁场的场源(电流源或电荷源)以一定的频率做正弦变化,则它所激发的电磁场也以相同的频率随时间做正弦变化,如无线电广播、通信的载波、激光器发出的激光束等都接近于正弦电磁波。这种以一定的频率做正弦变化的场称为正弦电磁场或时谐电磁场,又称单色场。对于单一频率变化的电磁场在各向同性线性介质中有如下简单关系

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega), \quad \mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\omega) \quad (3.2-1)$$

需要注意的是,对于不同频率的电磁波,介电常数及磁导率是不同的,即 ε 和 μ 是 ω 的函数

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega) \quad (3.2-2)$$

对于一般的电磁波,场量可以是时间的任意函数,但总可以通过傅里叶(Fourier)分析表示成单色波的叠加。

1. 亥姆霍兹(Helmholtz)方程

对于单色波而言,波场中每一点场量都是时间的谐变函数,电场和磁场的一般形式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.2-3)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.2-4)$$

时谐电磁场的空间部分和时间部分可以分离, $e^{-i\omega t}$ 是电磁场的时间部分,表示电磁场以 ω 为圆频率随时间做正弦变化; $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 或 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 是电磁场的空间部分,既描述了振幅在空间的分布特点,又描述了相位在空间的分布特点,同时其矢量特性又包含了电磁波的偏振信息。所以,讨论单色电磁波主要就是分析 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 或 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 。 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 或 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 也称为复振幅。

在无源空间中将式(3.2-3)、式(3.2-4)代入麦克斯韦方程组中,并利用式(3.2-1)进行运算,消去方程两边的时间因子 $e^{-i\omega t}$,可得麦克斯韦方程组的复数形式为

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\mu\omega\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (3.2-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\varepsilon\omega\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.2-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.2-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.2-8)$$

对于均匀介质中的单色波,上面的四个方程并不完全独立,如对式(3.2-5)两边取散度,利

用 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$, 即可得 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, 即式(3.2-7)。同样对式(3.2-6)两边取散度, 也可导出式(3.2-8)。所以我们研究均匀线性介质中的单色波可以只考虑式(3.2-5)和式(3.2-6)两个方程。对式(3.2-5)式两边取旋度, 并利用式(3.2-6)得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\mu\omega \nabla \times \mathbf{H} = \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E}$$

又
则有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.2-9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.2-10)$$

式(3.2-9)称为亥姆霍兹(Helmholtz)方程。亥姆霍兹方程也可以由式(3.2-3)直接代入波动方程而得到, 它是单色波复振幅都需要满足的方程。其中

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (3.2-11)$$

是空间沿传播方向单位长度上完整的波的数目的 2π 倍, 称为电磁波的波矢或圆波数, 它决定于媒质的电磁性质和波的激发频率。

式(3.2-10)是电场需要满足的补充条件, 决定了电磁场的横波性, 称为横波条件。如果能从式(3.2-9)出发解出 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, 则可以由式(3.2-5)解出

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\mu\omega} \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.2-12)$$

用上述同样的计算方法可求出 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 满足的波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (3.2-13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.2-14)$$

解出 \mathbf{H} 后, 电场由式(3.2-6)给出

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{i\varepsilon\omega} \nabla \times \mathbf{H} \quad (3.2-15)$$

场的空间部分一旦求出, 则时谐电磁场的全解就可表示成式(3.2-3)和式(3.2-4)的形式。

2. 能量密度和能流密度的时间平均值

我们知道, 电磁场能量密度 w 和能流密度矢量 \mathbf{S} 在各向同性线性介质中可表示为

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.2-16)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.2-17)$$

由于能量密度和能流密度是场强的二次式, 而二次项中两个因子取实部后的乘积与两个复数相乘后取实部并不相等, 故不能把场强的复数表示直接代入。计算 w 和 \mathbf{S} 瞬时值时, 应把实数表达式代入。但因 w 和 \mathbf{S} 都是随时间迅速脉动的量, 实际上我们往往只需用到它们的时间平均值。为了以后应用, 这里给出二次式求平均值的一般公式。设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的复数形式为

$$f(t) = f_0 e^{-i(\omega t + \varphi_1)}, \quad g(t) = g_0 e^{-i(\omega t + \varphi_2)}$$

则两者的乘积在一个周期的平均值为

$$\begin{aligned} \overline{f_{\text{实}}(t) \cdot g_{\text{实}}(t)} &= \frac{1}{T} \int_0^T f_0 g_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f_0 g_0 \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] dt \\ &= \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

利用复数取复共轭及取实部运算,上式可改写为

$$\overline{f_{\text{实}}(t) \cdot g_{\text{实}}(t)} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ f_{\text{复}}^*(t) \cdot g_{\text{复}}(t) \} \quad (3.2-18)$$

这表明两个同频率变化的物理量乘积的时间平均值可用其复数表达式的相应运算直接算出。所以我们可以算出实际能量密度和能流密度的时间平均值为

$$\bar{w} = \frac{1}{4} \text{Re} \{ \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} \} = \frac{1}{4} \text{Re} \{ \varepsilon \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} + \mu \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} \} \quad (3.2-19)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \} \quad (3.2-20)$$

3. 平面波和球面波

在电磁波的传播过程中,对于任意时刻 t ,空间电磁场中具有相同位相的点构成等相位面,或称波阵面。波阵面为平面的电磁波称为平面电磁波,波阵面为球面的电磁波称为球面波。

由上面讨论可知,对于时谐电磁场,波动方程可简化为亥姆霍兹方程求解。按照激发方式或传播条件的不同,亥姆霍兹方程的解可以有平面波解,球面波解等多种形式。先看最基本的平面波解。

平面波的等相位面为与传播方向垂直的平面。考虑到等相位面上各点场矢量的振幅可以相同或不同,把平面波分为均匀平面波和非均匀平面波。场矢量在等相位面上各点振幅相同的平面波为均匀平面波,否则为非均匀平面波。非均匀平面波在后面研究全反射现象时将会遇到;而在无界均匀线性各向同性无耗介质空间中只存在均匀平面波。

不难证明下式满足亥姆霍兹方程

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.2-21)$$

实际上
$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$= \mathbf{E}_0 [(ik_x)^2 + (ik_y)^2 + (ik_z)^2] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

即
$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

形如式(3.2-21)的解称为平面波解。补上时间因子,则

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.2-22)$$

对于平面波,相位相同的面(等相面)满足 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{常数}$,即与 \mathbf{k} 垂直的平面。

同样可证,下面形式也满足亥姆霍兹方程

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_0}{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.2-23)$$

此式代表一个从原点发出的球面波,当波向外传播时,其振幅不断减小,而球面面积不断扩大。显然,其等相位面为球面。在离开波源足够远的地方,波阵面上的一个小区域和平面波的一部分非常相似,这时球面波可近似看做平面波来处理。

3.3 相速度与群速度

1. 相速(度)

上面所述单色波,无论平面波还是球面波,空间各点的振动位相都是互相关联的。设沿波

传播方向上两点相距 dz , 到达同一相位值的时间差为 dt , 则定义相速(度) $v_p = \left(\frac{dz}{dt} \right)_{d\varphi=0}$ 。 $d\varphi=0$ 表示求相速(度)时须保持相位值不变。相速(度)表征空间位相分布的时序关系。

对于沿 z 轴传播的平面波, 电场为 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$, 相位因子可写为

$$\varphi(z, t) = \omega t - kz \quad (3.3-1)$$

$$v_p = \left(\frac{dz}{dt} \right)_{d\varphi=0} = \frac{\omega}{k} \quad (3.3-2)$$

球面波位相沿径向传播, 相位因子可写为 $\varphi(r, t) = \omega t - kr$, 径向距离即 dr , 所以 $v_p = \left(\frac{dr}{dt} \right)_{d\varphi=0} = \frac{\omega}{k}$ 。所以, 无论平面波还是球面波, 都有

$$v_p = \omega/k \quad (3.3-3)$$

一般折射率定义为真空光速与相速度的比值, 并注意式(3.2-11), 有

$$n = c/v_p = c\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \quad (3.3-4)$$

式中, μ_r 和 ε_r 分别是相对磁导率和相对介电常数, 绝大多数光学介质是非磁性的, $\mu_r \approx 1$, 故 $n \approx \sqrt{\varepsilon_r}$ 。

2. 两单色波的叠加

上面的讨论都是对单色波而言的。实际上单色波是理想化的波, 不可能严格实现。但根据傅里叶定理, 任何波(假定它满足某些很一般的条件)都可以看成是不同频率的单色波的叠加:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty a_\omega(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g_\omega(\mathbf{r})] d\omega \quad (3.3-5)$$

或采用复数表示
$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty a_\omega(\mathbf{r}) e^{-i[\omega t - g_\omega(\mathbf{r})]} d\omega \quad (3.3-6)$$

下面我们讨论包含多种频率的非单色波的一些特点。考虑沿 z 方向传播的平面波

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i[\omega t - kz]}$$

当频率 ω 确定后, 波矢 k 不再独立, 在理想介质中

$$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c} n \quad (3.3-7)$$

如果介质是非色散的, 即折射率 n 与 ω 无关, 则 k 与 ω 成线性关系; 如果介质是色散的, 则 k 与 ω 不再保持线性关系。 k 与 ω 的函数关系记为

$$k = k(\omega) \quad (3.3-8)$$

考虑两个频率不同但十分接近的单色波

$$\Psi_1 = A_1 e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)}, \quad \Psi_2 = A_2 e^{-i(\omega_2 t - k_2 z)}$$

的叠加。记 ω_0 为介于 ω_1 与 ω_2 之间的中心频率, $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$, $k_0 = k(\omega_0)$, 则

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A(z, t) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (3.3-9)$$

式中
$$A(z, t) = A_1 e^{-i(\Delta\omega_1 t - \Delta k_1 z)} + A_2 e^{-i(\Delta\omega_2 t - \Delta k_2 z)} \quad (3.3-10)$$

由于 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ 远小于 ω_0 , 所以 $\Delta\omega_1 = \omega_1 - \omega_0$, $\Delta\omega_2 = \omega_2 - \omega_0$ 很小, 故 $A(z, t)$ 随时间变化很慢。同样 $\Delta k_1 = k(\omega_1) - k_0$, $\Delta k_2 = k(\omega_2) - k_0$ 也很小, $A(z, t)$ 随空间变化也很慢。总之, 与因子 $e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)}$ 相比, $A(z, t)$ 是一个缓慢变化的函数。所以合成波仍可近似看成频率为 ω_0 的单色波, 但其“振幅因子”在缓慢变化。从图 3.3-1 可看出位相因子确定合成波的“细节(快速振荡线)”, 而振幅因子决定合成波的轮廓(波形包络线)。

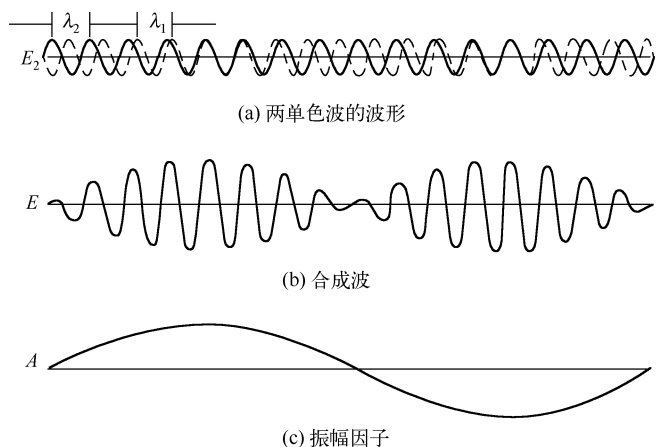


图 3.3-1 两频率相近的单色波的叠加

将函数 $k(\omega)$ 在 ω_0 附近展开, 得到

$$\Delta k_1 = k(\omega_1) - k_0 = k'(\omega_0) \Delta\omega_1 + \frac{1}{2} k''(\omega_0) \Delta\omega_1^2 + \dots$$

$$\Delta k_2 = k(\omega_2) - k_0 = k'(\omega_0) \Delta\omega_2 + \frac{1}{2} k''(\omega_0) \Delta\omega_2^2 + \dots$$

如果我们只保留一次项, 代入式 (3.3-10) 得

$$A(z, t) = A_1 e^{-i\Delta\omega_1(t - k'(\omega_0)z)} + A_2 e^{-i\Delta\omega_2(t - k'(\omega_0)z)} \quad (3.3-11)$$

容易看出 $A(z, t)$ 只是 $t - k'(\omega_0)z$ 的函数。如果时间经过 dt , 只要坐标改变 $dz = \frac{1}{k'(\omega_0)} dt$, 函数值就保持不变。这就是说, 函数图形以速度 $v = 1/k'(\omega_0)$ 传播, 而其形状保持不变。

3. 波包及其群速度

对多个频率的单色波的叠加, 可做类似的讨论。设 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_z, \dots$ 都十分接近 ω_0 , 则合成波

$$\Psi = \sum_j \Psi_j = A(z, t) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)}$$

而
$$A(z, t) = \sum_j A_j e^{-i\Delta\omega_j(t - k'(\omega_0)z)} \quad (3.3-12)$$

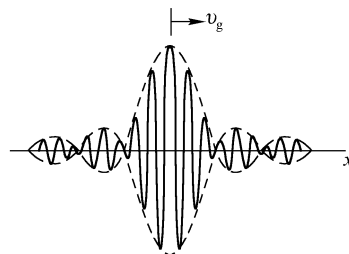


图 3.3-2 波包及其群速度

所以在有限时间 $\Delta t \sim \frac{1}{\Delta\omega}$ 和有限范围 $\Delta z \sim \frac{1}{\Delta k}$ 内, 合成波仍近

似看成单色波。这种情况就是通常所说的波群或波包, 如图 3.3-2 所示。

如果波包中有连续的频谱成分, 则式 (3.3-12) 的求和应改成积分。

$$A(z, t) = \int A(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)(t - k'(\omega_0)z)} d\omega \quad (3.3-13)$$

考虑窄带情况, 即 $A(\omega)$ 只在 ω_0 附近 $\Delta\omega$ 范围内不为零, 积分实际上只需在此区域进行。特别地, $A(\omega)$ 在 ω_0 内为常数, 则 $A(\omega)$ 写成

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0, & |\omega - \omega_0| \leq \frac{1}{2}\Delta\omega \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \frac{1}{2}\Delta\omega \end{cases}$$

所以
$$A(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} A_0 e^{-i(\omega - \omega_0)(t - k'(\omega_0)z)} d\omega = A_0 \Delta\omega \frac{\sin\varphi}{\varphi} \quad (3.3-14)$$

式中
$$\varphi = \frac{\Delta\omega}{2} (t - k'(\omega_0)z)$$

振幅 $A(z, t)$ 取决于 φ 值。当 φ 的绝对值 $|\varphi|$ 从零不断增大时, $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ 经过一系列的极大和极小值, 且极大和极小值随 $|\varphi|$ 的增大而减小, 所以, 这时波形基本上集中在空间的一定范围内, 即在 $\varphi=0$ 附近。

概括起来, 包含多种相近频率成分的波群具有下列特点:

(1) 合成波仍可近似看成单色波。其位相由因子 $e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)}$ 决定, 故相速度 $v_p = \omega_0/k_0$ 。而其振幅不再是稳定的分布, 是随时间缓慢变化的。

(2) 振幅因子 $A(z, t)$ 构成波形的包络线, 包络线广延的范围与带宽有关, $\Delta\omega$ 越小则广延范围越宽。

(3) 包络线的移动速度为

$$v_g = \frac{1}{k'(\omega_0)} = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.3-15)$$

此值称为群速度, 它决定于介质的色散性质, 以及中心频率的值, 而与合成波所包含的频率成分及其相对强度无关。

(4) 如果介质是非色散的, 或者对 $k(\omega)$ 展开时只需保留一次项, 则波包在移动过程中形状不变。如果在 $k(\omega)$ 的展开式中需要考虑高次项, 则波包在运动时形状会发生变化。

因相速度 $v_p = \omega/k$, 故群速度与相速度有下面的关系

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_p k) = v_p + k \frac{dv_p}{dk} = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} \quad (3.3-16)$$

严格说来, 相速度只对单色波才有明确的意义。一个单色波信号必须无始无终地持续在无限长的时间范围内(由 $t=-\infty$ 到 $t=\infty$), 要形成这种信号, 信号源必须在很早以前的某一时刻上(理论上 $t=-\infty$) 就已接通。换言之, 这种信号是一种稳态信号, 在我们进行观察时, 信号已完全建立起来了。因此, 相速度与实际信号速度并无直接联系, 它只是表示等相位点的位置随时间的变化情况。

群速度也只是对窄带信号才有明确意义, 当带宽 $\Delta\omega$ 增大时, 一方面不能出现一个简单的波包, 另一方面由于色散作用, 波形还要随着信号的向前传播而发生剧烈的变化。尤其是在反常色散区, 折射率随频率变化非常快, 而且伴随着强烈吸收, 这时实际上群速度已失去了意义。

总之, 对于真空中或非色散介质中, 相速度、群速度、能速(指能量传播速度)都相等, 统称为波速; 正常色散时群速度等于能速, 但一般不等于相速度。

* 3.4 介质色散

所谓色散, 就是光在介质中传播时其折射率(或速度)随频率(或波长)的变化而变化的现

象。介质的折射率取决于介电常数,所以色散与介质的不同极化有关。

介质的极化是由于原子或分子内部的正、负电中心发生位移,形成微观偶极矩(下称分子偶极矩),并沿外电场方向有序排列的结果。由于原子核的质量比电子大得多,通常原子核可以被认为是不动的,所以电场对分子体系的作用,主要表现在对电子的作用。电子除受外电场作用外,还有分子内部的作用。设电子云中心(负电中心)相对原子核(正电中心)有一位移 \mathbf{r} ,如果认为电子受内部作用力为准弹性力,则此力可写为 $-\kappa\mathbf{r}$ (κ 为常数)。当光入射到介质时,电子受光波电场的作用,做受迫振动,电场力为 $-e\mathbf{E}$, $-e$ 为电子电量, \mathbf{E} 为电场强度。由于光波波长通常比原子半径大得多,所以在原子线度范围内电场变化很小,可将电场写成

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

\mathbf{E}_0 为常矢量。于是电子的振动方程为

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \kappa \mathbf{r} = -e \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

即

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.4-1)$$

式中, $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$,称为共振频率。方程稳态解形式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.4-2)$$

代入式(3.4-1)得

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} = -\frac{e \mathbf{E}_0}{m} e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \quad (3.4-3)$$

因此,每个电子对偶极矩的贡献为

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{E} \quad (3.4-4)$$

或写成

$$\mathbf{p} = \chi_1 \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.4-5)$$

χ_1 称为微观极化率或分子极化率

$$\chi_1 = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.4-6)$$

假设一个分子内只有一个有效电子,单位体积内的分子数为 N ,则极化强度为

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\chi_1 \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

所以介质极化率为

$$\chi_e = N\chi_1 \quad (3.4-7)$$

对于非铁磁性介质, $\mu_r \approx 1$,按式(3.3-4)得

$$n^2 = \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

即

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.4-8)$$

这就说明了折射率随入射光的频率而变。对于 $\omega < \omega_0$ 的情况, ω 增大则 n 增大,当 ω 接近 ω_0 时即发生共振。当 $\omega > \omega_0$ 时, $n < 1$,这时介质中的相速度大于真空光速(折射率定义为真空光速与相速度之比),并随 ω 的增大而趋近于1。

实际上,当 $\omega \rightarrow \omega_0$ 时,折射率不会像式(3.4-8)那样趋于无穷大,这是因为电子在振动时,不可避免地存在阻尼力。另一方面,电子做加速运动时会辐射电磁波,因而它本身的能量必然

逐渐减少。另外,由于原子之间的碰撞也可造成能量的损耗。这两种作用使电子的运动好像受到了阻力,这就是阻尼力。通常阻尼力很小,可以把它看成力学中的摩擦力,大小与速度成正比,可写为 $-\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 。因此,电子振动方程,即(3.4-1)应改写成

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{r} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.4-9)$$

稳态解为
$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E} \quad (3.4-10)$$

介电常数为
$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \quad (3.4-11)$$

介电常数 ε 为复数,相应的波矢

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu_0} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' / \varepsilon_0} \quad (3.4-12)$$

也为复数。若光沿 z 方向传播,则可设

$$k = (\beta + i\alpha) \mathbf{e}_z \quad (3.4-13)$$

光波电场强度为
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-i(\omega t - \beta z)}$$

相速度
$$v_p = \omega / \beta \quad (3.4-14)$$

若令
$$n' = \sqrt{\varepsilon' / \varepsilon_0} = n_1 + in_2 \quad (3.4-15)$$

称为复折射率, n_1 和 n_2 分别是其实部和虚部,结合式(3.4-12)和式(3.4-13),知

$$\beta = \frac{\omega}{c} n_1, \quad \alpha = \frac{\omega}{c} n_2 \quad (3.4-16)$$

另外,按折射率定义并注意式(3.4-14)

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{c}{\omega} \beta = n_1$$

所以复折射率的实部,即通常意义下的折射率由式(3.4-15)和式(3.4-11)不难得出

$$n_1^2 - n_2^2 = 1 + \frac{Ne^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{\varepsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]} \quad (3.4-17)$$

$$2n_1 n_2 = \frac{Ne^2 \gamma \omega}{\varepsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]} \quad (3.4-18)$$

从上面两式可以解出 n_1 和 n_2 。 n_2 正比于 α , 它可表征光衰减

的快慢, n_2 越大则衰减越快,即 n_2 正比于吸收系数。图 3.4-1 所示为共振频率附近的色散曲线和吸收曲线。可以看出,除了在 ω_0 附近一个很窄的范围(曲线 ab 段),其他地方的折射率都随频率增大而增大,这称为正常色散。而在曲线 ab 段,折射率随频率增大而减小,称为反常色散,在反常色散区,吸收都很强,在 ω_0 处吸收最强。

以上讨论中,我们假定电子的振动只有一个固有频率 ω_0 。实际上电子可以有若干个不同的固有频率 $\omega_1, \omega_2, \dots$ 假设以这些固有频率振动的概率分别为 f_1, f_2, \dots 则式(3.4-11)应改写为

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega)} \quad (3.4-19)$$

这时的折射率与频率(或波长)的关系如图 3.4-2 所示,在每一个 $\omega = \omega_j$ 附近,对应有一个吸收

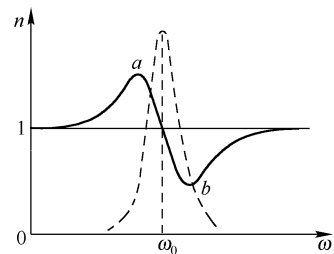


图 3.4-1 共振频率附近的色散曲线和吸收曲线

带和反常吸收区。在这些区域外,是正常色散区。

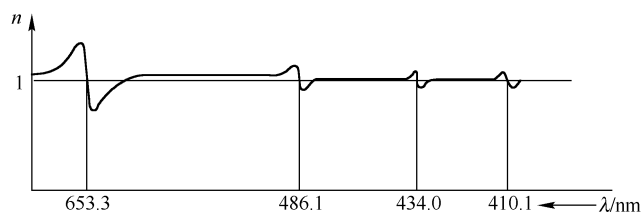


图 3.4-2 氢在可见光区的色散曲线

上述结论对稀薄气体介质符合较好,对于固体、液体或压缩气体,由于原子或分子之间的距离很近,周围分子在光场作用下极化所产生的影响不可忽略。洛伦兹证明了这时作用在电子上的电场 \mathbf{E}' 不简单地等于入射光场 \mathbf{E} , 它还与介质的极化强度 \mathbf{P} 有关,即

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.4-20)$$

如果在前面的计算中把 \mathbf{E} 换成 \mathbf{E}' , 做类似推导, 将得到适用于固体、液体和压缩气体的色散公式(略去了阻尼系数 γ , 因而公式只适用于正常色散区)

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{1}{3} Ne^2} \quad (3.4-21)$$

上式又可化为

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.4-22)$$

此式称为洛伦兹-洛伦茨(Lorentz-Lorenz)公式。

* 3.5 电磁场的动量

1. 电磁场的动量密度

电磁场不仅有能量也有动量,这是它的物质性的体现,带电体和电磁场之间的相互作用,不仅有能量交换也有动量交换。在交换过程中遵守两条基本守恒定律,即能量守恒定律和动量守恒定律。研究电磁场动量的方法和讨论它的能量的情况类似,即当一个带电体系受电磁场的作用时,其动量发生变化,再由总体系(带电体系和电磁场)的动量守恒而求出电磁场的动量。

有一带电体在电磁场中运动,它所受的洛伦兹力密度为

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.5-1)$$

则带电体系的动量 \mathbf{G} 变化率为

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \int_V \mathbf{f} d\tau = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) d\tau \quad (3.5-2)$$

式中, V 为带电体系的体积,也可以是所研究空间的体积。

通过麦克斯韦方程将式(3.5-2)中的 ρ 和 \mathbf{j} 用电磁场量表示,当体积 V 变为无穷大空间时,可以证明

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\infty} (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV \quad (3.5-3)$$

$$\text{令 } \mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (3.5-4)$$

式中, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 为能流密度。于是式(3.5-3)变为

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\infty} \mathbf{g} dV \quad (3.5-5)$$

根据总体系的动量守恒,上式的意义是带电体系的动量变化率应等于电磁场的动量变化率的负值。因此, \mathbf{g} 应是电磁场的动量密度。

对自由空间的平面电磁波,以后将看到 $\bar{\mathbf{S}} = c \bar{w} \mathbf{n}$, w 为能量密度, \mathbf{n} 为电磁波的传播方向。因此

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{\bar{w}}{c} \mathbf{n} \quad (3.5-6)$$

2. 辐射压力

由于电磁波具有动量,它入射到物体上时会对物体施加一定的压力。由电磁波动量密度式(3.5-4)和动量守恒定律可以算出辐射压强。

例如,平面电磁波入射到理想导体表面上而被全部反射,设入射角为 θ ,现在计算导体表面上所受的辐射压强。

把入射波动量分解为垂直表面的分量和与表面相切的分量。电磁波被反射后,动量的切向分量不变,而法向分量变号。由于电磁波速度为 c ,由式(3.5-6),每秒通过单位截面的平面波的动量为

$$\bar{g} c = \bar{w}_i$$

式中, \bar{w}_i 为入射波平均能量密度。上式的法向分量为 $\bar{w}_i \cos \theta$ 。由于这部分动量实际上入射到导体表面 $1/\cos \theta$ 的面积上,因此,每秒入射到导体表面单位面积的动量法向分量为 $\bar{w}_i \cos^2 \theta$ 。在反射过程中,电磁波动量变化率为上式的2倍,即 $2 \bar{w}_i \cos^2 \theta$ 。由动量守恒定律,导体表面所受的辐射压强为

$$P = 2 \bar{w}_i \cos^2 \theta \quad (3.5-7)$$

在导体表面附近总平均能量密度 \bar{w} 等于入射波能量密度 \bar{w}_i 加上反射波能量密度 \bar{w}_r 。在全部反射情形时即有 $\bar{w} = 2 \bar{w}_i$ 。因此由式(3.5-7)可得

$$P = \bar{w} \cos^2 \theta \quad (3.5-8)$$

若电磁波从各方向入射,在立体空间范围对 θ 取平均后得

$$P = \bar{w}/3 \quad (3.5-9)$$

实际上,在表面完全吸收电磁波的情况下,上式仍然是成立的。

在一般光波和无线电波情形中,辐射压强是不大的。例如,太阳辐射在地球表面上的能流密度为 $1.35 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$,算出辐射压强仅为 10^{-6} Pa 。但是近年制成的激光器能产生聚集的强光,可以在小面积上产生巨大的辐射压力。在天文领域,光压起着重要作用。光压在星体内部可以和万有引力相抗衡,从而对星体构造和发展起着重要作用。在微观领域,电磁场的动量也表现得很明显。带有动量 $\hbar \mathbf{k}$ 的光子与电子碰撞时服从能量和动量守恒定律,正如其他离子相互碰撞情形一样。

* 3.6 电磁波的辐射

前面我们讨论了电磁场的波动性质问题,但并没有涉及电磁波同激发源之间的联系。本节我们将研究变化的电荷、电流系统辐射电磁波的规律。随时间变化的电荷或电流激发出的

电磁波可以脱离源向远处传播出去。我们把携带能量的电磁波向远处传播出去而不再返回波源的现象,称为**电磁辐射**。产生电磁波的振荡源一般称为天线。当振荡源的频率提高到使电磁波的波长与天线的尺寸可相比拟时,就会产生显著的辐射。

对于一个实际的辐射系统,我们关心的是它在各方向具有多大的辐射功率,这些都可以通过辐射场计算出来,所以我们着重讨论辐射系统产生的场的计算方法。这类问题的一种简单情况是,作为场源的电荷、电流分布及变化情况是事先给定的,它们虽然也受到周围电磁场的反作用,但这些比起发射装置对电荷、电流的影响要小得多,相当于一种轻微的扰动,一般可以略去。因而,源的变化规律主要由发射装置本身决定。

本节研究电磁波的辐射问题。首先把势的概念推广到一般变化电磁场情况,然后通过势来解决辐射问题。

1. 电磁场的矢势和标势

前面我们得到了麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.6-1)$$

下面我们就来考虑怎样利用方程组求解变化的电荷、电流系统的辐射场。在有源空间中直接从麦克斯韦方程组求解场矢量 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 满足的方程是很困难的,因此,通常引入矢势和标势来代替场矢量,通过求解矢势与标势得到辐射场的解。

在第2章中曾经用矢势 \mathbf{A} 描述稳恒电流的磁场,即

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.6-2)$$

对于时变电磁场, \mathbf{B} 仍然是无散场,即 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 故仍然可以用 \mathbf{A} 描述,只是现在 \mathbf{A} 应当是时间的函数。

另一方面,由于静电场是无旋场,即 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 可设 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, 其中 ϕ 就是电势;但对于时变情况,变化磁场激发的电场是有旋场,这时 \mathbf{E} 不再能写成一个标量函数的梯度。由麦克斯韦方程组和矢势定义可得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

移项即可得
$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.6-3)$$

上式表明, $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 是一个无旋场,于是我们引进一个新的标量函数 ϕ , 使

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (3.6-4)$$

因此,在变化电磁场的情况下,电场可表示为

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.6-5)$$

这里 ϕ 称为电磁场标势,注意不是静电势。显然,当 \mathbf{B} 为稳恒磁场,即 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ 时,式(3.6-5)就变为 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$,即 ϕ 为静电势。

故电磁场场量和势之间的关系如下

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.6-6)$$

2. 规范变换和规范不变性

在电磁场中,有直接物理意义的是场矢量包括。虽然 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ,以及 \mathbf{A} 和 ϕ 是描述电磁场的两种等价的方式,但由于 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{A} 、 ϕ 之间是微分方程的关系,所以它们之间的关系不是一一对应的。这是因为矢势 \mathbf{A} 可以加上一个任意标量函数的梯度,结果不影响 \mathbf{B} ,而这个任意标量函数的梯度在 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 中对 \mathbf{E} 要产生影响,若将 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 中的 ϕ 也做相应的变换,则仍可使 \mathbf{E} 保持不变。

设 Ψ 为空间坐标和时间的任意标量函数,即 $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$,做下述变换

$$\begin{cases} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \\ \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{cases} \quad (3.6-7)$$

于是我们得到了一组新的 \mathbf{A}' 、 ϕ' ,很容易证明

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}' &= \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\Psi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\Psi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ -\nabla\phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} &= -\nabla\left(\phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\Psi) \\ &= -\nabla\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Psi) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Psi) \\ &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.6-8)$$

可见,若 \mathbf{A}' 、 ϕ' 满足式(3.6-7),则描述同一电磁场 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 。我们称式(3.6-7)的变换为规范变换,电磁场在矢势和标势做规范变换下是不变的。这种不变性称为规范不变性。

也就是说, \mathbf{A} 和 ϕ 两个量存在规范变换自由度,具有不确定性。这看上去是个缺点,但我们可以对它们加上一些人为的限制条件,从而简化电磁场的求解过程。

3. 洛伦兹规范条件、达朗贝尔方程

将式(3.6-6)代入式(3.6-1)的第一式和第四式得

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.6-9)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{j} \quad (3.6-10)$$

由于 \mathbf{A} 和 ϕ 存在规范变化自由度条件,故可以选择特定的 \mathbf{A} 和 ϕ ,使得它们满足

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (3.6-11)$$

式(3.6-11)称为洛伦兹规范条件。

值得注意的是,在洛伦兹规范条件下, \mathbf{A} 和 ϕ 仍存在规范变换自由度,还有一定的任意性。若按式(3.6-7)变换,只要其中的 Ψ 满足方程

$$\nabla^2 \Psi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6-12)$$

\mathbf{A}' , ϕ' 仍然可以满足洛伦兹规范条件。

在洛伦兹规范条件下,式(3.6-9)和式(3.6-10)变成

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \end{cases} \quad (3.6-13)$$

上式称为非齐次波动方程或达朗贝尔方程,当等号右边为零时,称为齐次波动方程。从达朗贝尔方程可看到,矢势 \mathbf{A} 仅与电流有关,标势 ϕ 仅与电荷有关,两个方程完全对称,这就为求解场方程带来了极大的方便,这也就是引入 \mathbf{A} 和 ϕ 的意义所在。

4. 达朗贝尔方程的解、推迟势

现在通过求达朗贝尔方程的特解,以对电磁辐射过程有一个物理概念。首先考虑其中的标势方程

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.6-14)$$

这个方程反映了电荷的分布和变化与它激发的电磁场标势的关系。为了求解这个方程,假设电荷分布在区域 V 中,则电磁场的标势可以看做各个小体积元中电荷激发标势的叠加,叠加和仍然是方程式(3.6-14)的解。

设定源点 \mathbf{r}' 处的小体积元 $d\tau$ 内的电荷量为 dQ ,当 $d\tau$ 大小一定时, dQ 是坐标 \mathbf{r}' 和时间 t 的函数。如果 $d\tau$ 很小,可以认为 dQ 是集中在 \mathbf{r}' 点上的点电荷。点电荷密度为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = dQ(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.6-15)$$

这个点电荷元激发的标势满足方程式(3.6-14),即

$$\nabla^2 \phi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -dQ(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / \varepsilon_0 \quad (3.6-16)$$

解此方程分为两步,即首先考虑方程式(3.6-16)在不含源点 \mathbf{r}' 点在内的无源空间区域中的解,然后再由这个解去推测在有源空间中解的可能形式。

(1) 在 $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ 的空间,式(3.6-16)化简为

$$\nabla^2 \phi' - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6-17)$$

由于 ϕ' 是位于 \mathbf{r}' 点的点电荷激发的,它对 \mathbf{r}' 点具有球对称分布。也就是说,在以 \mathbf{r}' 点为坐标原点的球坐标系中, ϕ' 仅是源点 \mathbf{r}' 到场点 \mathbf{r} 距离 R 的函数。显然在这个坐标系下更便于求方程的解。因为在球坐标系下有

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \quad (3.6-18)$$

由于此处电势与方向无关,而上式中的 r 用 R 代替,故式(3.6-17)可以写为

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi'}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6-19)$$

令 $\phi' = u/R$, 则 u 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6-20)$$

这是一维波动方程, 其解为

$$u = f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{R}{c} \right) \quad (3.6-21)$$

式中, f_1 和 f_2 是两个任意函数, 我们可以选择任意一个。如选择 $u = f_1$, 则

$$\phi' = \frac{u}{R} = f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) / R \quad (3.6-22)$$

(2) 确定 f_1 的具体形式。将式(3.6-22)作为试探解代入式(3.6-16), 令 $t' = t - \frac{R}{c}$, 注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'}{\partial t} &= 1, \quad \nabla t' = \nabla \left(t - \frac{R}{c} \right) = -\frac{1}{c} \nabla R = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R} \\ \nabla \phi &= f_1(t') \nabla(1/R) - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R^2} \frac{df_1}{dt'}, \quad \nabla^2 \phi = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_1(t') + \frac{1}{c^2} \frac{1}{R} \frac{d^2 f_1}{dt'^2} \end{aligned}$$

则式(3.6-16)的等号左边化为

$$\nabla^2 \phi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_1(t') \quad (3.6-23)$$

所以

$$4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_1(t') = dQ(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / \varepsilon_0 \quad (3.6-24)$$

在含有 \mathbf{r}' 点的有源区域中对上式积分得

$$4\pi f_1(t) = dQ(\mathbf{r}', t) / \varepsilon_0 \quad (3.6-25)$$

注意: 上述积分过程中, 当 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 时, $R = 0$, 则 $f_1(t')$ 变成 $f_1(t)$ 。

将式(3.6-25)代入式(3.6-22)可得

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 R} dQ \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) \quad (3.6-26)$$

这里 ϕ' 是位于点 \mathbf{r}' 的电荷元激发的标势。通过叠加可得全部电荷激发的标势, 即

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_V \frac{\rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) d\tau'}{R} \quad (3.6-27)$$

这就是辐射电磁场的标势。

下面考虑辐射电磁场矢势的解。将式(3.6-13)中的矢量方程分解成直角坐标系中三个分量方程, 采用以上求标势的方法, 可以求得每个分量方程的特解, 即

$$A_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_i \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right)}{R} d\tau' \quad (3.6-28)$$

其中, $i = x, y, z$ 。再将此三个分量合并, 可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right)}{R} d\tau' \quad (3.6-29)$$

现在我们来讨论上面得到的特解的物理意义。式(3.6-27)和式(3.6-29)表明,场点 \mathbf{r} 处 t 时刻的场是 V 中各个电荷电流元激发场叠加的结果,但每个电荷电流元对该场的贡献不依赖于同一时刻 t 的状态,而取决于一个较早的时刻,即 $t' = t - \frac{R}{c}$ 时刻的电荷电流状态。对不同源点 \mathbf{r}' 处的电荷电流元来说,这个提早的时刻也是不同的。这就是说 \mathbf{r}' 点的电荷电流元在 $t' = t - \frac{R}{c}$ 时刻激发的场,要经过一段时间 $\frac{R}{c}$ 才影响到 \mathbf{r} 点的场。因此,把式(3.6-27)和式(3.6-29)中的势称为推迟势。可见,推迟势的重要物理意义在于,它说明了电磁场是以有限的速度 c 在空间传播的,超距作用的观点是错误的。

如果在式(3.6-21)中用 f_2 取代 f_1 ,则可得达朗贝尔方程的另一组特解为

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t + \frac{R}{c}\right) d\tau'}{R} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t + \frac{R}{c}\right)}{R} d\tau' \end{cases} \quad (3.6-30)$$

式(3.6-30)表示 \mathbf{r} 点在 t 时刻的场是各个电荷电流元在一个较迟时刻 $t + \frac{R}{c}$ 激发的。这就是说,电荷电流还没发生变化,空间已感受到这一变化的影响,因而是“超前势”,这是违背因果律的,故以后只讨论推迟势。

5. 电偶极辐射

上面把计算电荷电流系统的辐射场归结为利用推迟势公式计算 \mathbf{A} 和 ϕ ,辐射系统电荷电流可以是时间 t 的任意函数,但实用中的辐射源电荷电流多是随时间做简谐变化的。对于一般的辐射系统,总可以通过傅里叶分析表示成各种谐变分量的叠加。所以,研究谐变电荷电流系统的辐射问题,不仅具有实际意义,而且也是研究一般辐射系统辐射问题的基础。

振荡的电偶极子(又称电偶极振子)是一种最简单的谐变电荷电流辐射系统,研究它的辐射有着重要的实际意义。在这里我们利用推迟势来讨论电偶极辐射的规律。

设在真空中位于原点处有一对用短导线连接起来的极小金属球,充电之后,它们之间的导线内形成高频电流,这就是一个电偶极振子,如图 3.6-1 所示。

设两点电荷带电量为 $\pm q$,则其振荡电流为

$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-i\omega t} \quad (3.6-31)$$

故电荷为
$$q = \int I_0 e^{-i\omega t} dt = \frac{iI_0}{\omega} e^{-i\omega t} \quad (3.6-32)$$

于是可将电偶极振子体系的电荷及电流密度表示为

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (3.6-33)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (3.6-34)$$

设电偶极振子的线度为 $d\mathbf{e}_z$,则其电偶极矩

$$\mathbf{p} = q d\mathbf{e}_z = \frac{iI_0}{\omega} d\mathbf{e}_z e^{-i\omega t} = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.6-35)$$

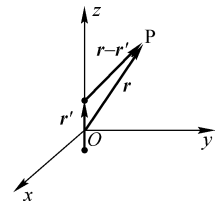


图 3.6-1 电偶极辐射

其中, $\mathbf{p}_0 = \frac{iI_0}{\omega} \mathbf{d}e_z$ 。设电偶极振子的线度 d 比电磁波的波长 λ 小得多, 以致可认为振荡电流是均匀分布在振子导线上的。此外, 假定所讨论的场点到电偶极振子的距离 R 比电偶极振子线度大得多, 可认为场点到电偶极振子上各点的距离都相等, 即 $R=r$ 。于是, 根据推迟势的计算公式, 真空中场点 \mathbf{r} 处电偶极振子的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.6-36)$$

考虑到对于线电流分布, 有 $\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' = I_0 \mathbf{d}e_z$, 并注意 $\mathbf{p}_0 = \frac{iI_0}{\omega} \mathbf{d}e_z$, 所以

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi r} \mathbf{p}_0 e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi r} \mathbf{p}_0 e^{i(kr - \omega t)} \quad (3.6-37)$$

这就是电偶极振子在 $r \gg d$ 的区域所产生的电磁场的矢势。对于这里所讨论的具体问题来说, 仅矢势 \mathbf{A} 就可以完全确定电磁场了。这是因为在谐变情况下, 由描写电荷守恒定律的式(2.4-8)可得

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = i\omega\rho_0(\mathbf{r}) \quad (3.6-38)$$

因此只要知道 \mathbf{j}, ρ 就可以了。故只要求出矢势, 标势也就确定了。实际上我们已经可以容易地求出 \mathbf{r} 处的场了。由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 可直接求出磁矢量, 而由式(3.2-15)又可求出电矢量

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{1}{i\omega\epsilon_0\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B}$$

在球坐标系中, 经计算可得

$$\begin{cases} E_r = \frac{2k^3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2} \right] p_0 \cos\theta e^{i(kr - \omega t)} \\ E_\theta = \frac{k^3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2} - \frac{1}{(kr)} \right] p_0 \sin\theta e^{i(kr - \omega t)} \\ E_\varphi = 0 \end{cases} \quad (3.6-39)$$

$$\begin{cases} B_r = 0 \\ B_\theta = 0 \\ B_\varphi = -\frac{k^3}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{i}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)} \right] p_0 \sin\theta e^{i(kr - \omega t)} \end{cases} \quad (3.6-40)$$

这就是电偶极振子在自由空间所激发的电磁场。下面分别对近场和远场两种情况进行讨论。

(1) 似稳区的场

首先考虑 $d \ll r \ll \lambda$ 的区域, 在这个区域有 $kr \ll 1$, 因而可以只取式(3.6-39)、式(3.6-40)中的最高次项及其实部, 略去低次项, 得

$$\begin{cases} E_r = \frac{2}{4\pi\epsilon_0 r^3} p_0 \cos\theta \cos\omega t \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} p_0 \sin\theta \cos\omega t \\ B_\varphi = -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi r^2} p_0 \sin\theta \sin\omega t \end{cases} \quad (3.6-41)$$

若将电偶极振子任一时刻所产生的场作为静电场来处理,可得

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \\ \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} \Delta V' \end{cases} \quad (3.6-42)$$

式(3.6-42)的第一式就是电偶极振子 \mathbf{p} 的瞬时电场,式(3.6-42)的第二式就是电偶极振子瞬时电流所产生的磁场($\Delta V'$ 为振子所占的小区域)。显然式(3.6-42)与近场区的式(3.6-41)是一致的。这就告诉我们,尽管场是交变的,但每一瞬时都可以作为静电场和静磁场处理,因此把这个区域中的场称为似稳场。

又, $E \propto \cos\omega t$, $H \propto \sin\omega t$, 所以平均能流

$$\bar{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}} \propto \overline{\sin\omega t \cos\omega t} = 0 \quad (3.6-43)$$

从上式中可以看出,尽管任一时刻的能流密度不为零,但在近场中长时间看来是没有能量流出去的。这种近区的电磁场是和电偶极振子紧密相连的,所以称之为束缚的电磁波。

(2) 辐射区的场

下面我们考虑 $r \gg \lambda$ ($kr \gg 1$) 的区域即辐射区的场,这时在式(3.6-39)、式(3.6-40)中高次项可忽略,只要取 $(1/kr)$ 的最低次项,即

$$\begin{cases} E_r = -\frac{2k}{4\pi\epsilon_0} \frac{i}{r^2} p_0 \cos\theta e^{i(kr-\omega t)} \approx 0 \\ E_\theta = -\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 \sin\theta}{r} e^{i(kr-\omega t)} \\ B_\varphi = -\frac{k^2 p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c r} e^{i(kr-\omega t)} \end{cases} \quad (3.6-44)$$

从式(3.6-44)中可以看出,在很远的区域可以忽略 E_r 分量。当忽略 E_r 分量时,电偶极振子所产生的电磁场是沿 r 向外传播的球面波,在辐射区的电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 是与传播方向 \mathbf{r} 垂直的,因此是横波,而且 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{r}$ 构成右手螺旋关系。该区域的平均能流密度为

$$\bar{\mathbf{S}} = \overline{E_\theta H_\varphi} \mathbf{e}_r = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{e}_r \neq 0 \quad (3.6-45)$$

上式表明沿波的传播方向 \mathbf{e}_r 有能量辐射。因子 $\sin^2 \theta$ 反映了振子辐射的角分布,即辐射具有方向性。在 $\theta = \pi/2$ 的平面内辐射最强,而沿振子轴向 ($\theta = 0, \pi$) 没有辐射。

以上我们以电偶极辐射为例说明了电磁波的辐射,此外还有磁偶极辐射、电四极辐射等。在工程上,根据辐射频率的不同以及为了各种特殊的目的,天线可以有多种不同的形式。在长波、中波波带常用铁塔天线,在短波波带常用水平天线,电视广播及微波技术中还采用其他形式的天线。



习题 3

1. 证明 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_0}{r} e^{ikr}$ 满足亥姆霍兹方程: $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$, 并说明其物理意义。
2. 沿 z 方向传播的平面波的相位函数 $\varphi(z, t) = \omega t - kz$, 而球面波的 $\varphi(r, t) = \omega t - kr$ 。证明相速度 $v_p = \omega/k$ 。

3.3 设单色波电场为 $E_x = Ae^{-i(\omega t - kz)} + Ce^{-i(\omega t + kz)}$, $E_y = E_z = 0$ 。

(1) 解释它代表什么样的电磁波; (2) 求相应的磁场 \mathbf{H} ;

(3) 求能量密度和能流密度的平均值; (4) 试证明相速度 $v_p = \frac{\omega}{k} \left(\frac{A+C}{A-C} \cos^2 kz + \frac{A-C}{A+C} \sin^2 kz \right)$ 。

3.4 证明群速度可表为 $v_g = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$ 。若改用真空中波长, 则 $v_g = \frac{c}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)^{-1}$ 。

3.5 某物质对不同波长光的折射率是: $\lambda = 0.4 \mu\text{m}$ 时, $n = 1.63$; $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ 时, $n = 1.58$ 。若色散关系是 $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ (此处 λ 为真空中的波长), 求 He-Ne 激光束 ($\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$) 通过这种物质时的相速度与群速度。

3.6 试计算下列各情况下的群速度:

(1) $v_p = v_0$ (常数) (无色散介质, 如空气中的声波)。

(2) $v_p = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho} \right)}$ (水面波, g 为重力加速度, T 为表面张力, ρ 为液体的密度)。

(3) $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ (正常色散介质中光波的柯西公式)。

(4) $\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2$ (波导中的电磁波, ω_c 为截止角频率)。

3.7 已知矢势和标势: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, $\phi = \phi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 。其中 \mathbf{A}_0, \mathbf{k} 为常矢量, ω, ϕ_0 为常数。求:

(1) 洛伦兹规范条件下, \mathbf{A}_0 与 ϕ_0 之间应满足的关系。

(2) 求 \mathbf{E}, \mathbf{B} 。

(3) $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_0 + \alpha \mathbf{k}) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, $\phi' = (\phi_0 + \alpha \omega) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, 其中 α 为待定常数, 证明 (\mathbf{A}', ϕ') 与 (\mathbf{A}, ϕ) 对应的是同一电磁场。

3.8 利用电荷守恒定律, 验证 \mathbf{A}, ϕ 的推迟势满足洛伦兹规范条件。

3.9 证明在线性各向同性均匀非导电介质中, 若 $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$, 则 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 可完全由矢势 \mathbf{A} 决定。若取 $\phi = 0$, 这时 \mathbf{A} 满足哪两个方程?

3.10 验证推迟势

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} d\tau', \quad \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} d\tau'$$

满足达朗贝尔方程: $\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$, $\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ 。