

## 第3章 电路的暂态分析

前面已经学习了线性电阻电路的分析方法，由电阻和电源组成的电路中各元件电压和电流的关系是即时的线性代数关系。但是若电路中含有电容或电感，当电路突然接通或关断，电路的参数、结构、电源突然变化时，电容或电感会有一个充电或放电的过渡过程，这个过程称为暂态过程。

暂态过程持续的时间虽然很短，但是在工程实践中却具有非常重要的应用。比如，在飞机发动机的点火系统中启动点火线圈就是利用电感的充放电电路，高能点火器则是采用了电容的充放电电路等。

本章主要介绍暂态过程产生的原因和换路定则、 $RC$  和  $RL$  电路的零输入响应、零状态响应、全响应及求解一阶线性电路暂态分析的三要素法。

### 本章要求：

1. 理解电路换路的概念和暂态过程产生的原因，掌握换路定则和初始值的计算；
2. 理解零输入响应、零状态响应和全响应的变化规律；
3. 掌握一阶线性电路暂态分析的三要素法。

### 本章难点：

电路初始值的计算。

## 3.1 换路定则

### 3.1.1 产生暂态过程的原因及条件

#### 1. 稳态和暂态的概念

##### 1) 稳态 (steady state)

电路中的电压和电流在给定条件下已达到某一稳态值，称为电路的稳定状态，简称稳态。

##### 2) 暂态 (transient state)

电路由一种稳定状态变换为另一种稳定状态所经历的过渡过程，称为暂态过程，简称暂态。

#### 2. 电路中产生暂态的原因

在电路接通、断开时，电路中电源的升高或降低、电路中的元件参数发生变化等，称为换路 (switching)，会使电路的工作状态发生变化，就有可能产生暂态过程。换路是引起暂态过程必要的外部条件 (外因)。

电路发生换路就一定引起暂态过程吗？这还要看电路元件的性质，如电阻电路在换路瞬间，电压、电流是可以跃变的，电路立即处于稳态，就不存在暂态过程。

在含有储能元件的电路中，换路之后电路中的能量发生了变化，根据  $p = \frac{dW}{dt}$ ，能量是不能跃变的，能量的变化总是需要一定的时间来完成，否则功率将达到无穷大，因此产生暂态过程的原因是在换路瞬间储能元件储存的能量不能跃变。由此可知，电路含有储能元件是引起暂态过程必要的内部条件 (内因)。

本章主要分析暂态过程电路中电流、电压的变化情况。只有在认识和掌握了这种客观物理现象之后，才能充分利用它的特性，例如，利用电路的暂态过程来产生锯齿波、三角波等特定的波形信号；同时，也可以避免暂态过程中产生的危害，如暂态过程中产生的过电压或过电流对电气设备造成的损害。

### 3.1.2 换路定则概述

在换路的瞬间，储能元件的能量是不能跃变的。在  $RC$  电路中，电容元件储存的电能  $\frac{1}{2}Cu_C^2$  不跃变，即电容两端的电压  $u_C$  不跃变；在  $RL$  电路中，电感元件储存的磁能  $\frac{1}{2}Li_L^2$  不跃变，即流过电感元件的电流  $i_L$  不跃变。

定义  $t=0$  时发生换路，把  $t=0_-$  记为换路前的最终时刻（这时电路仍处于换路前的稳定状态，换路即将发生）；把  $t=0_+$  记为换路后的最初时刻（这时刚刚发生换路），从  $t=0_- \sim t=0_+$  的瞬间，电容两端的电压和流过电感的电流均不能跃变，即换路定则：

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

需要注意的是，换路定则仅适用于换路瞬间，只能用来确定  $t=0_+$  时电路中电容的端电压  $u_C(0_+)$  和电感中流过的电流  $i_L(0_+)$  的值。

### 3.1.3 电路初始值的确定

换路发生之后电路中各电压、电流在  $t=0_+$  时刻的数值，称为电压或电流的初始值，即暂态过程的初始值。虽然换路定则只能求解  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$ ，但是每个元件的电压和电流在  $t=0_+$  时刻都存在一个初始值。求解电路初始值的步骤如下。

(1) 画出  $t=0_-$  时刻的等效电路，电容元件可视作开路，电感元件可视作短路，求解  $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$ ；

(2) 根据换路定则确定  $u_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ ；

(3) 根据  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$ ，画出  $t=0_+$  时刻的等效电路，即将电容元件用电压等于  $u_C(0_+)$  的电压源替代（未储能时则相当于短路），电感元件用电流等于  $i_L(0_+)$  的电流源替代（未储能时则相当于开路），求解该直流电阻电路，从而确定其余相关的初始条件。

**【例 3.1.1】** 如图 3.1.1 所示电路，换路前电容元件和电感元件均未储能，试计算电路中各电流的初始值。

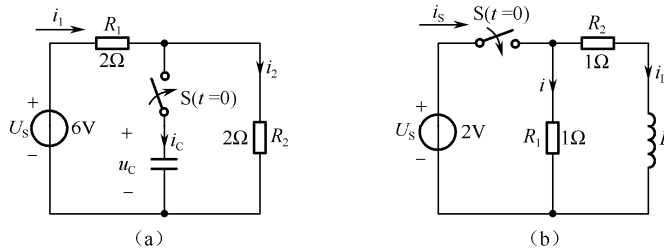


图 3.1.1 例 3.1.1 图

**解：**(1) 如图 3.1.1 (a) 所示电路，由于电容元件未储能，则

$$u_C(0_-) = 0V$$

根据换路定则

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$$

因此，在  $t = 0_+$  时刻电路中，电容元件相当于短路，如图 3.1.2 (a) 所示，则

$$i_1(0_+) = i_C(0_+) = \frac{U_S}{R_1} = \frac{6}{2} = 3\text{A}, \quad i_2(0_+) = 0\text{A}$$

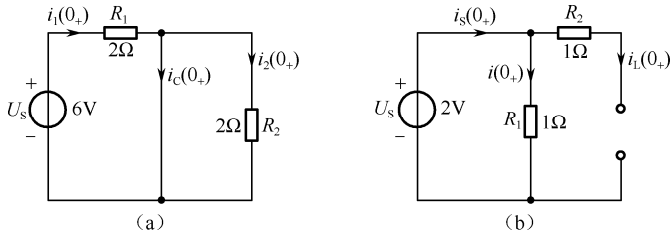


图 3.1.2  $t = 0_+$  时刻的等效电路

(2) 如图 3.1.1 (b) 所示电路，由于电感元件未储能，则

$$i_L(0_-) = 0\text{A}$$

根据换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0\text{A}$$

因此，在  $t = 0_+$  时刻电路中，电感元件相当于开路，如图 3.1.2 (b) 所示，则

$$i(0_+) = i_s(0_+) = \frac{U_S}{R_1} = \frac{2}{1} = 2\text{A}$$

**【例 3.1.2】** 如图 3.1.3 所示，已知电源的电压  $U_S = 20\text{V}$ ， $R = 1\text{k}\Omega$ ， $L = 1\text{H}$ ，电压表的内阻  $R_V = 500\text{k}\Omega$ ，电压表的量程为  $50\text{V}$ 。设开关在  $t=0$  时断开，求在开关 S 断开的瞬间，电压表两端的电压是多少？

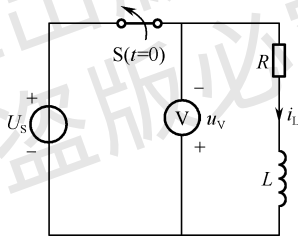


图 3.1.3 例 3.1.2 图

**解：**开关 S 断开前，电路已处于稳态，在  $t = 0_-$  时刻电路中，电感相当于短路，如图 3.1.4 (a) 所示，则

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R} = \frac{20}{1000} = 20\text{mA}$$

根据换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 20\text{mA}$$

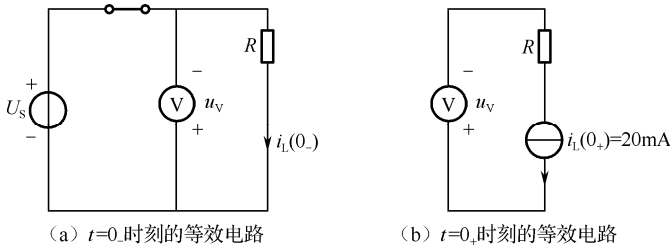


图 3.1.4 等效电路

在  $t = 0_+$  时刻电路中，电感相当于一个电流为  $i_L(0_+) = 20\text{mA}$  的恒流源，如图 3.1.4 (b) 所示。

此时

$$u_V(0_+) = i_L(0_+) \times R_V = 20 \times 10^{-3} \times 500 \times 10^3 = 10000V$$

在开关断开的瞬间，电压表两端出现了高达 10000V 的电压，造成过电压，导致电压表损坏。

注意： $i_L(0_+) \neq 0A$ ，在  $t=0_+$  时刻的等效电路中，电感相当于一个电流为  $i_L(0_+)$  的恒流源； $u_C(0_+) \neq 0V$ ，在  $t=0_+$  时刻的等效电路中，电容相当于一个电压为  $u_C(0_+)$  的恒压源。

【例 3.1.3】 如图 3.1.5 所示电路，换路前电路已处于稳态。已知电压源  $U_S = 6V$ ， $R = 1\Omega$ ， $R_1 = 4\Omega$ ， $R_2 = 2\Omega$ ， $R_3 = 2\Omega$ ，在  $t=0$  时开关 S 闭合，试求  $u_L(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $u_C(0_+)$  和  $i_C(0_+)$ 。

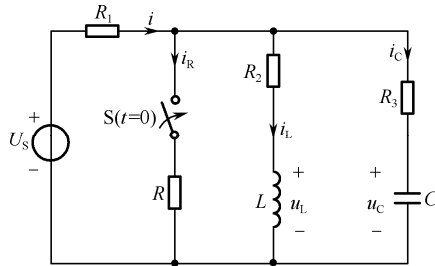


图 3.1.5 例 3.1.3 图

解：(1) 确定  $u_C(0_-)$  和  $i_L(0_-)$ 。作  $t=0_-$  时刻的等效电路，如图 3.1.6 (a) 所示，由于换路前电路已处于稳态，因此这时电感相当于短路，电容相当于开路。

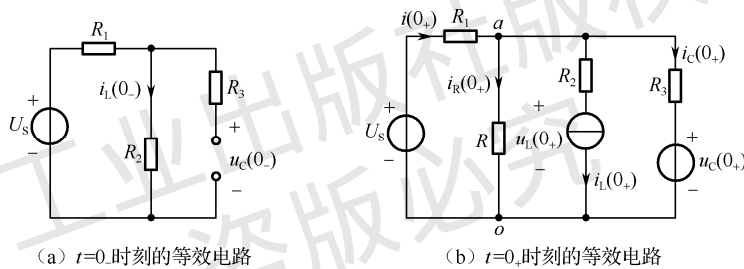


图 3.1.6 等效电路

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = \frac{6}{2 + 4} = 1A, \quad u_C(0_-) = R_2 i_L(0_-) = 2 \times 1 = 2V$$

(2) 确定  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$ 。根据换路定则，可得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1A, \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2V$$

(3) 确定其他初始值。作  $t=0_+$  时刻的等效电路，如图 3.1.6 (b) 所示，这时电感可以用一个 1A 的电流源来代替，电容可以用一个 2V 的电压源来代替（注意电压和电流的方向）。

由节点电压法，可得

$$U_{ao} = \frac{\frac{U_S}{R_1} + \frac{u_C(0_+)}{R_3} - i_L(0_+)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{6}{4} + \frac{2}{2} - 1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{6}{7}V$$

由 KVL 可得

$$U_{ao} = R_3 i_C(0_+) + u_C(0_+), \quad i_C(0_+) = \frac{U_{ao} - u_C(0_+)}{R_3} = \frac{\frac{6}{7} - 2}{2} = -\frac{4}{7}A$$

$$U_{ao} = R_2 i_L(0_+) + u_L(0_+), \quad u_L(0_+) = U_{ao} - R_2 i_L(0_+) = \frac{6}{7} - 2 \times 1 = -\frac{8}{7} \text{V}$$

还能够计算其余初始值，有

$$i_R(0_+) = \frac{U_{ao}}{R} = \frac{\frac{6}{7}}{1} = \frac{6}{7} \text{A}$$

$$i(0_+) = i_R(0_+) + i_L(0_+) + i_C(0_+) = \frac{6}{7} + 1 - \frac{4}{7} = \frac{9}{7} \text{A}$$



思考题：暂态电路分析的目的是什么？产生暂态过程的原因是什么？

## 3.2 RC 电路的响应

RC 电路在模拟电路、数字电子电路中有着广泛的应用，不同的激励与响应，对应着不同的应用。

从电源或信号源输入到电路的信号称为激励（excitation）。电路在电源、信号源或储能元件的作用下所产生的电流、电压或引起电流、电压的变化，称为响应（response）。响应又分为零输入响应、零状态响应及全响应。

### 3.2.1 RC 电路的零输入响应

所谓电路的零输入，是指换路后无电源激励，电路中引起的电压或电流响应是由储能元件电容的储能引起的，称为 RC 电路的零输入响应（zero-input response）。RC 电路的零输入响应实质是 RC 电路的放电过程。

图 3.2.1 (a) 所示 RC 电路，当电容元件充电到  $u_C = U_0$  时，即将开关 S 从位置 1 合到位置 2，使电路脱离电源，输入为 0。具有初始电压  $U_0$  的电容 C 通过电阻 R 进行放电，如图 3.2.1 (b) 所示。

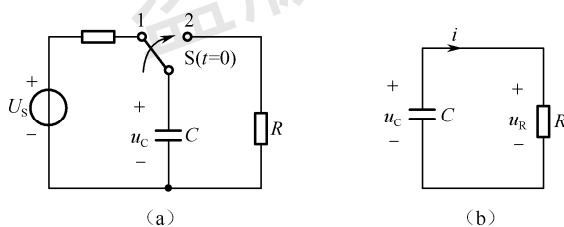


图 3.2.1 RC 电路的零输入响应

$t \geq 0$  时，根据 KVL 可得

$$u_R - u_C = 0$$

而  $u_R = Ri$ ， $i = -C \frac{du_C}{dt}$ ，电路的微分方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (3.2.1)$$

式 (3.2.1) 为一阶线性常系数齐次微分方程，初始条件  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ 。也就是说，这个暂态过程的问题其实是一个一阶线性常系数微分方程问题。若电路中含有一个储能元件，根据电路规律列写的电压、电流的微分方程是一阶的，则该电路为一阶电路。从高等数学可知，此齐次微分方程的通解为

$$u_C = Ae^{pt}$$

代入式 (3.2.1) 可得

$$(RCp + 1)Ae^{pt} = 0$$

相应的特征方程为

$$RCp + 1 = 0$$

特征根为

$$p = -\frac{1}{RC}$$

将初始值代入  $u_C = Ae^{pt}$ , 则可求得积分常数  $A = u_C(0_+) = U_0$ 。

放电过程中电容电压  $u_C$  的表达式为

$$u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{RC}} = U_0e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.2.2)$$

电路中的电流和电阻上的电压分别为

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}, \quad u_R = u_C = U_0e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.2.3)$$

电压  $u_R$ 、 $u_C$  和电流  $i$  都是按照同样的指数规律衰减的。它们衰减的快慢取决于指数中  $\frac{1}{RC}$  的大小, 即取决于电路的结构和元件的参数。

令  $\tau = RC$ , 在国际单位制中,  $R$  的单位为  $\Omega$ ,  $C$  的单位为 F, 则  $\tau$  的单位为 s。 $\tau$  具有时间的量纲, 称为 RC 电路的时间常数 (time constant), 它反映了 RC 电路暂态过程的快慢。 $\tau$  越大, 衰减得就越慢;  $\tau$  越小, 衰减得就越快。因此, 改变  $R$  或  $C$  的数值就可以改变电容元件放电的快慢。

引入  $\tau$  后, 电压  $u_C$ 、 $u_R$  和电流  $i$  可以分别表示为

$$u_C = u_R = U_0e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad i = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.2.4)$$

图 3.2.2 (a)、(b) 所示 RC 电路的零输入响应曲线为  $u_C$ 、 $u_R$  和  $i$  随时间变化的曲线。

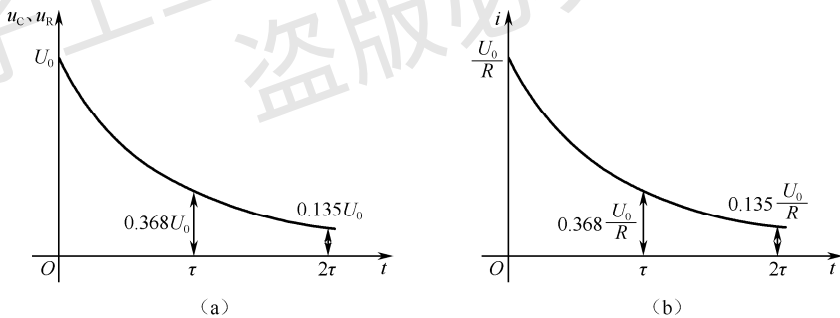


图 3.2.2 RC 电路的零输入响应曲线

把  $t = \tau$  代入  $u_C$  的方程得

$$u_C(\tau) = Ue^{-1} = 0.368U_0$$

所以, 时间常数就是按指数规律衰减到其初始值 36.8% 时所需的时间。当  $t = k\tau$  ( $k$  为整数) 时, 电容电压  $u_C$  的值见表 3.2.1。从表 3.2.1 可以看出, 理论上要经过无限长的时间  $u_C$  才能衰减为零。但经过大约  $5\tau$  的时间,  $u_C$  已经衰减到  $0.0067U_0$ , 因此工程上一般认为经过  $3 \sim 5\tau$  时间就已经达到稳态了。

表 3.2.1  $u_C(t)$  随时间而衰减的过程

|          |       |             |             |            |             |              |     |          |
|----------|-------|-------------|-------------|------------|-------------|--------------|-----|----------|
| $t$      | 0     | $1\tau$     | $2\tau$     | $3\tau$    | $4\tau$     | $5\tau$      | ... | $\infty$ |
| $u_C(t)$ | $U_0$ | $0.368 U_0$ | $0.135 U_0$ | $0.05 U_0$ | $0.018 U_0$ | $0.0067 U_0$ | ... | 0        |

**【例 3.2.1】** 如图 3.2.3 所示，换路前电路已处于稳态，已知电压源  $U_s = 5\text{V}$ ， $R_1 = 25\text{k}\Omega$ ， $R_2 = 100\text{k}\Omega$ ， $R_3 = 100\text{k}\Omega$ ， $C = 10\mu\text{F}$ ，在  $t = 0$  时开关 S 断开，求换路后的电容电压  $u_C$ 。

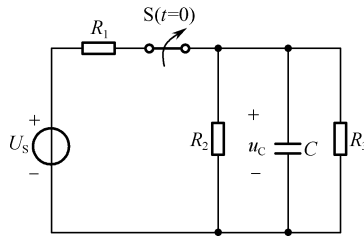


图 3.2.3 例 3.2.1 图

**解：**(1) 求电容电压的初始值  $u_C(0_+)$ 。换路前电路已经达到稳定状态，电容可视为开路，所以

$$u_C(0_-) = U_s \times \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 5 \times \frac{\frac{100 \times 100}{100 + 100}}{25 + \frac{100 \times 100}{100 + 100}} = \frac{10}{3} \text{V}$$

根据换路定则

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{10}{3} \text{V}$$

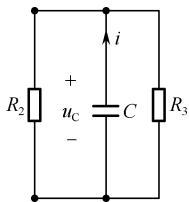


图 3.2.4  $t \geq 0$  时的等效电路

(2) 求时间常数  $\tau$ 。 $t \geq 0$  时的等效电路如图 3.2.4 所示，显然这时电容通过电阻  $R_2$ 、 $R_3$  进行放电，放电回路的等效电阻为两电阻的并联。这是一个一阶 RC 电路的零输入响应。

$$\text{等效电阻为} \quad R_{\text{eq}} = \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = \frac{100 \times 100}{100 + 100} = 50\text{k}\Omega$$

$$\text{时间常数为} \quad \tau = R_{\text{eq}} C = 50 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 0.5\text{s}$$

$$\text{由式 (3.2.4) 可得} \quad u_C = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{10}{3} e^{-2t} \text{V}$$

### 3.2.2 RC 电路的零状态响应

所谓电路的零状态，是指换路前电路中储能元件没有储存能量，换路后电路中电压或电流的响应是由电源激励信号产生的，称为零状态响应 (zero-state response)，也就是只有外部激励作用激起的响应。

如图 3.2.5 所示 RC 串联电路，换路前电容元件未储能，即  $u_C(0_-) = 0\text{V}$ ，故为零状态。在  $t = 0$  时将开关 S 闭合，电路与一恒定电压为  $U_s$  的电压源接通，开始对电容元件充电，电容电压为  $u_C$ 。由于此时储能元件没有储能，只靠电源的激励在电路中产生响应，所以这种响应称为零状态响应。

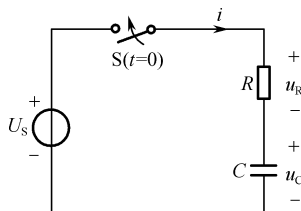


图 3.2.5 RC 电路的零状态响应

RC 电路的零状态响应实质是 RC 电路的充电过程。

根据 KVL 定律，列出  $t \geq 0$  时电路的微分方程为

$$U_s = Ri + u_c = RC \frac{du_c}{dt} + u_c \quad (3.2.5)$$

该方程为一阶线性常系数非齐次方程。方程的解有两部分，一部分是特解  $u'_c$ ，另一部分是通解  $u''_c$ 。

在电路中通常取换路后新的稳态值  $u_c(\infty)$  作为特解，因此特解也称稳态分量，即

$$u'_c = u_c(\infty) = U_s$$

$u''_c$  是齐次微分方程  $RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$  的通解，即前面求过的  $u''_c = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ 。

因此，式 (3.2.5) 的通解为

$$u_c = u'_c + u''_c = U_s + Ae^{-\frac{t}{RC}} = U_s + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.2.6)$$

式中， $\tau = RC$ ，具有时间的量纲，是  $RC$  电路的时间常数 (time constant)。

把电容电压初始值  $u_c(0_+) = 0V$  代入式 (3.2.6)，则  $A = -U_s$ ，所以有

$$u_c = U_s - U_s e^{-\frac{t}{\tau}} = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_c(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.2.7)$$

$u_c$  随时间变化的曲线如图 3.2.6 (a) 所示。

把  $t = \tau$  代入  $u_c$  的方程得

$$u_c(\tau) = U_c(\infty)(1 - e^{-1}) = 0.632U_c(\infty)$$

从图 3.2.6 (a) 也可以看出， $\tau$  表示电容端电压  $u_c$  从初始值上升到稳态值的 63.2% 时所需的时间。 $\tau$  越大，暂态过程变化越缓慢； $\tau$  越小，暂态过程变化越快。

根据图 3.2.5 可知，电容元件的电流  $i$  和电阻上的电压  $u_R$  分别为

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.2.8)$$

$$u_R = Ri = U_s e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.2.9)$$

$i$  和  $u_R$  随时间变化的曲线如图 3.2.6 (b) 所示。

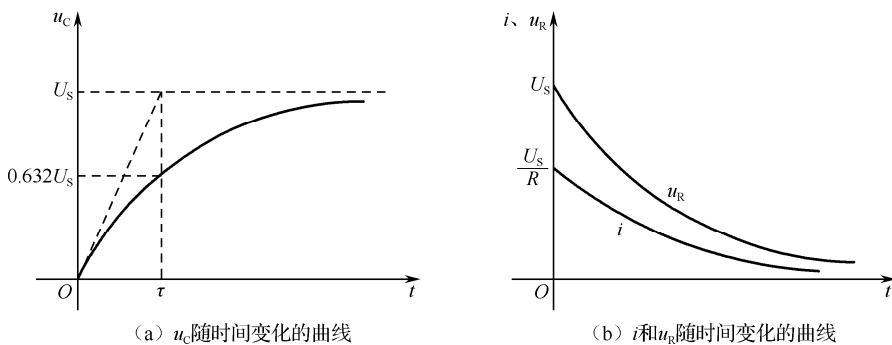


图 3.2.6 RC 电路的零状态响应曲线

分析较为复杂的电路时，可以应用第 2 章中的戴维宁定理将换路后的电路转化为图 3.2.5 所示的  $RC$  串联电路，然后再利用上述公式进行求解。

**【例 3.2.2】** 如图 3.2.7 所示的电路，开关  $S$  闭合前电容未储能。已知电压源  $U_s = 20V$ ， $R_1 = 10k\Omega$ ， $R_2 = 10k\Omega$ ， $R_3 = 5k\Omega$ ， $C = 10\mu F$ ，在  $t = 0$  时开关  $S$  闭合，求开关闭合后的电容电压  $u_c$ 。



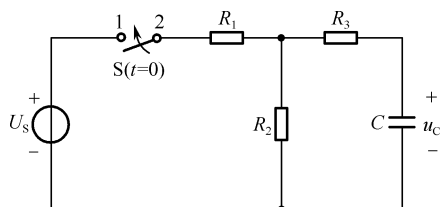


图 3.2.7 例 3.2.2 图

解：应用戴维宁定理将换路后的电路转化为图 3.2.8 所示的等效电路。

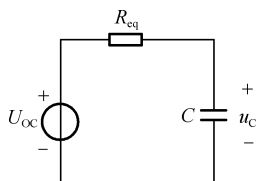


图 3.2.8 换路后的等效电路

等效电源电动势和内阻分别为

$$U_{oc} = U_s \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20 \times \frac{10}{10 + 10} = 10\text{V}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{10 \times 10}{10 + 10} + 5 = 10\text{k}\Omega$$

时间常数为

$$\tau = R_{eq} C = 10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 0.1\text{s}$$

于是由式 (3.2.7) 得

$$u_C = U_{oc} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 10 \times (1 - e^{-10t}) \text{V}$$

### 3.2.3 RC 电路的全响应

换路后电路里既有电源，储能元件上又有能量储存，这时电路的电压和电流响应是由这两种激励共同引起的，称为全响应 (complete response)。

在图 3.2.9 所示的电路中，已知电源电压为 \$U\_s\$，电容电压初始值 \$u\_C(0\_-) = U\_0\$，储能元件的初始储能不为零，是 RC 电路的全响应。

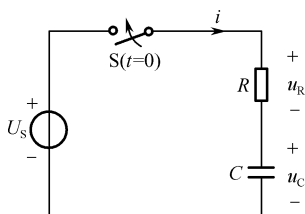


图 3.2.9 RC 电路的全响应

\$t \ge 0\$ 时电路的微分方程与式 (3.2.5) 相同，由此可得

$$u_C = u_C' + u_C'' = U_s + A e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.2.10)$$

但积分常数 \$A\$ 与零状态时不同，在 \$t = 0\_+\$ 时，\$u\_C(0\_+) = U\_0\$，则 \$A = U\_0 - U\_s\$。所以

$$u_C = U_s + (U_0 - U_s) e^{-\frac{t}{RC}} = U_s + (U_0 - U_s) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.2.11)$$

式中,  $U_s$  为稳态分量 (steady state component);  $(U_0 - U_s)e^{-\frac{t}{\tau}}$  为暂态分量 (transient component)。于是

全响应=稳态分量+暂态分量

$$\text{式 (3.2.11) 还可改写为} \quad u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.2.12)$$

式中,  $U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  是零输入响应;  $U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  是零状态响应。于是

全响应=零输入响应+零状态响应

因此, 全响应可以看作零输入响应与零状态响应的叠加。这正是第 2 章中所讲的叠加定理在一阶线性电路暂态分析中的体现。

**【例 3.2.3】** 在例 3.2.2 中, 如果换路前电容已储有能量,  $u_C(0_-) = 5\text{V}$ , 计算换路后的电容电压  $u_C$  及电阻  $R_1$  上的电压  $u_{R_1}$ 。

**解:** 根据换路定则

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 5\text{V}$$

由例 3.2.2 可知

$$u_C(\infty) = 10\text{V}, \quad \tau = 0.1\text{s}$$

由式 (3.2.11), 可得

$$u_C = 10 + (5 - 10)e^{-10t} = (10 - 5e^{-10t})\text{V}$$

根据 KVL 可得

$$U_s = u_{R_1} + u_{R_3} + u_C$$

因而

$$\begin{aligned} u_{R_1} &= U_s - R_3 i_C - u_C = U_s - R_3 \times C \frac{du_C}{dt} - u_C \\ &= [20 - 5 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} \times \frac{d(10 - 5e^{-10t})}{dt} - (10 - 5e^{-10t})]\text{V} \\ &= (10 + 2.5e^{-10t})\text{V} \end{aligned}$$

可以看出, 电路中的其他响应 (如电阻  $R_1$  上的电压) 也由稳态分量和暂态分量两部分相加组成, 它也是按照指数规律变化的。



**思考题:** 时间常数的物理意义是什么? 其大小与暂态过程的快慢有什么关系?

### 3.3 一阶线性电路暂态分析的三要素法

仅含有一个储能元件或可等效为一个储能元件的线性电路, 不论是简单的还是复杂的, 其微分方程都是一阶线性常系数微分方程, 这种电路称为一阶线性电路 (first-order linear circuit)。

上述的 RC 电路是一阶线性电路, 电路的响应由稳态分量和暂态分量相加而成。例如, RC 电路的全响应电容端电压为

$$u_C = U_s + (U_0 - U_s)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

若将一阶线性电路的响应写成一般公式, 则为

$$f(t) = f'(t) + f''(t) = f(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.3.1)$$

式中,  $f(t)$  是电路的响应 (电压或电流);  $f(\infty)$  是稳态分量;  $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  是暂态分量。若初始值为  $f(0_+)$ ,

则得  $A = f(0_+) - f(\infty)$ 。于是

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.3.2)$$

这是分析一阶线性电路暂态过程中任意变量的一般公式。在求解一阶电路的响应（电压或电流）时，只要求得  $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$  和  $\tau$  这三个“要素”，就能直接写出电路的响应。初始值、稳态值和时间常数叫作暂态过程的三要素。

三要素法虽然是按全响应等于暂态分量和稳态分量推出来的，但同样适用于零输入响应和零状态响应，零输入响应和零状态响应可看作全响应的特殊形式。

三要素法是一阶线性电路暂态分析最简单、实用的通用法则，它不仅适用于求解电容电压和电感电流，也适用于求解电路中的其他电压和电流。无论电路结构如何，在同一个一阶电路中，各电压和电流暂态过程的时间常数都是相同的。

利用三要素法求解一阶线性电路响应的步骤如下。

(1) 确定初始值  $f(0_+)$ 。

(2) 确定稳态值  $f(\infty)$ 。作出稳态时的等效电路，稳态时，电容相当于开路，电感相当于短路。求解该直流稳态电路，确定稳态值。

(3) 求时间常数  $\tau$ 。

(4) 代入三要素公式确定一阶线性电路的响应。

需要注意：三要素法适用于求解只含有一个（或可等效成一个）储能元件的一阶线性电路在直流电源或无独立电源作用下的暂态过程。

**【例 3.3.1】** 如图 3.3.1 所示电路，换路前已达到稳态。已知  $C = 2\mu\text{F}$ ， $R_1 = 2\text{k}\Omega$ ， $R_2 = 4\text{k}\Omega$ ， $U_1 = 6\text{V}$ ， $U_2 = 12\text{V}$ 。在  $t = 0$  时将开关 S 从位置 1 合到位置 2 上，求换路后的电容电压  $u_C$  和  $i$ 。

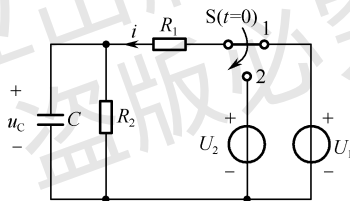


图 3.3.1 例 3.3.1 图

**解：**(1) 求初始值。在换路前的稳态电路中，电容相当于开路，如图 3.3.2 所示，可得

$$u_C(0_-) = U_1 \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6 \times \frac{4}{2 + 4} = 4\text{V}$$

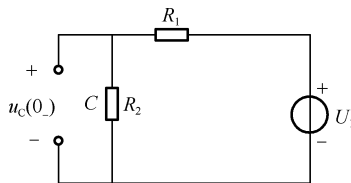


图 3.3.2  $t=0$  时刻的电路图

根据换路定则

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4\text{V}$$

(2) 求稳态值。在换路后的直流稳态电路中，电容相当于开路，如图 3.3.3 所示。

$$u_C(\infty) = U_2 \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 12 \times \frac{4}{2 + 4} = 8\text{V}$$

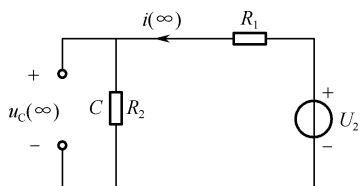


图 3.3.3  $t=\infty$ 时的等效电路

(3) 求时间常数  $\tau$ 。求等效电阻的电路图如图 3.3.4 所示，有

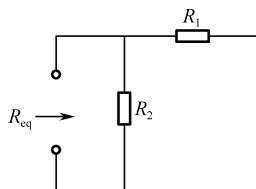


图 3.3.4 求等效电阻的电路图

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \times 4}{2 + 4} \times 10^3 = \frac{4}{3} \times 10^3 \Omega$$

$$\tau = R_{\text{eq}} C = \frac{4}{3} \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6} = \frac{8}{3} \times 10^{-3} \text{s}$$

(4) 代入三要素公式求  $u_C$ 。

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 8 + (4 - 8)e^{-\frac{t}{\tau}} = (8 - 4e^{-\frac{3}{8} \times 10^3 t}) \text{V}$$

(5) 用三要素法求  $i$ 。

① 初始值。在换路后的电路中，电容电压为  $u_C(0_+) = 4 \text{V}$  的恒压源代替，如图 3.3.5 所示。

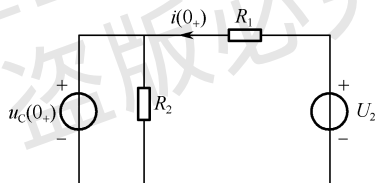


图 3.3.5  $t=0_+$ 时刻的等效电路

$$i(0_+) = \frac{U_2 - u_C(0_+)}{R_1} = \frac{12 - 4}{2000} = 4 \text{mA}$$

② 稳态值。在图 3.3.3 所示换路后的稳态电路图中可得

$$i(\infty) = \frac{U_2}{R_1 + R_2} = \frac{12}{2 \times 10^3 + 4 \times 10^3} = 2 \text{mA}$$

因而

$$i = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 + (4 - 2)e^{-\frac{3}{8} \times 10^3 t} = (2 + 2e^{-\frac{3}{8} \times 10^3 t}) \text{mA}$$

在图 3.3.1 中根据基尔霍夫电压定律得

$$i = \frac{U_2 - u_C}{R_1} = \frac{12 - (8 - 4e^{-\frac{3}{8} \times 10^3 t})}{2} = (2 + 2e^{-\frac{3}{8} \times 10^3 t}) \text{mA}$$

### 3.4 微分和积分电路

微分电路与积分电路是矩形脉冲激励的 RC 电路，选取不同电路的时间常数即可构成输出电

压波形和输入电压波形之间的特定（微分或积分）的关系。

### 3.4.1 微分电路

图 3.4.1 所示是 RC 微分电路（differentiating circuit），设电路处于零状态。输入的是矩形脉冲电压  $u_1$ ，在电阻  $R$  两端输出的电压为  $u_2$ 。设  $R=20\text{k}\Omega$ ， $C=100\text{pF}$ ， $u_1$  的幅值  $U=6\text{V}$ ，脉冲宽度  $t_p=50\mu\text{s}$ 。

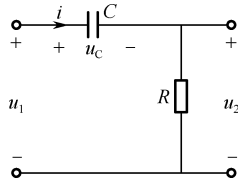


图 3.4.1 RC 微分电路

时间常数为

$$\tau = RC = 20 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-12} = 2 \times 10^{-6} \text{ s} = 2\mu\text{s}$$

因此， $\tau \ll t_p$ 。

在  $t=0$  时， $u_1$  从零突然上升到  $6\text{V}$ ，开始对电容元件充电。由于电容元件两端的电压不能跃变，在此瞬间它相当于短路（ $u_C=0$ ），所以  $u_2=U=6\text{V}$ 。因为  $\tau \ll t_p$ ，相对于  $t_p$  而言，充电很快， $u_C$  很快增长到  $U$  值；与此同时， $u_2$  很快衰减到零值。这样，在电阻两端就输出一个正尖脉冲，如图 3.4.2 所示。

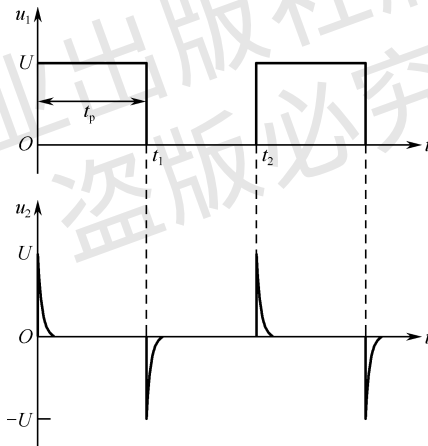


图 3.4.2 微分电路的输入电压和输出电压的波形

在  $t=t_1$  时， $u_1$  突然下降到零（这时输入端不是开路，而是短路），也由于  $u_C$  不能跃变，所以在此瞬间， $u_2=-u_C=-U=-6\text{V}$ ，极性与前相反。然后电容元件经电阻很快放电， $u_2$  很快衰减到零值。这样就输出一个负尖脉冲。如果输入的是周期性矩形脉冲，则输出的是周期正、负尖脉冲，如图 3.4.2 所示。

比较  $u_1$  和  $u_2$  的波形，可看到在  $u_1$  的上升跃变部分， $u_2=U=6\text{V}$ ，此时正值最大；在  $u_1$  的平直部分， $u_2 \approx 0$ ；在  $u_1$  的下降跃变部分， $u_2=-U=-6\text{V}$ ，此时负值最大。这种输入尖脉冲反映了输入矩形脉冲的跃变部分，是对矩形脉冲微分的结果，因此这种电路称为微分电路。

RC 微分电路具有两个条件：①  $\tau \ll t_p$ （一般  $\tau < 0.2t_p$ ）；② 从电阻端输出。在脉冲电路中，微分电路可作触发信号之用。

### 3.4.2 积分电路

积分电路 (integrating circuit) 也是 RC 串联电路, 但是与微分电路不同的是, 条件变为: ①  $\tau \gg t_p$ ; ② 从电容端输出, 如图 3.4.3 所示。

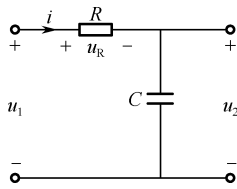


图 3.4.3 积分电路

积分电路输入电压和输出电压的波形如图 3.4.4 所示。由于  $\tau \gg t_p$ , 电容器缓慢充电, 其上的电压在整个脉冲持续时间内缓慢增长, 当还未增长到趋近稳定值时, 脉冲已告终止 ( $t=t_1$ )。以后电容器经电阻缓慢放电, 电容器上的电压也缓慢衰减。经过若干周期之后, 充电时电压的初始值和放电时电压的初始值在一定的数值稳定下来, 在输出端输出一个锯齿波电压。时间常数越大, 充放电越缓慢, 所得锯齿波电压的线性也就越好。

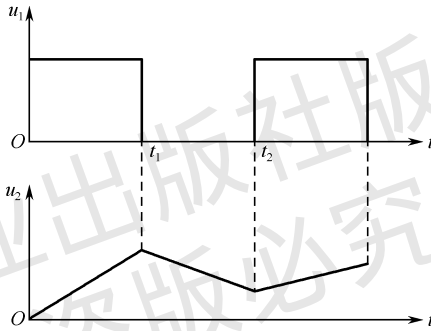


图 3.4.4 积分电路输入电压和输出电压的波形

从图 3.4.4 所示的波形上看,  $u_2$  是对  $u_1$  积分的结果, 因此这种电路称为积分电路。在脉冲电路中, 积分电路可用于产生锯齿波电压。

## 3.5 RL 电路的响应

在电工和电子技术中, 常利用 RL 电路的暂态过程来实现系统的启动和保护等。例如, 汽车和飞机点火系统就是通过点火线圈存储和释放磁场能, 从而使火花塞产生足够能量的火花的; 上万伏的高压将击穿火花塞两电极空气, 产生电火花引燃汽车车缸内的混合气体; 通过启辉器断开后镇流器产生的高电压使灯管气体电离, 产生放电, 日光灯才能点燃发亮。

### 3.5.1 RL 电路的零输入响应

如图 3.5.1 (a) 所示电路, 开关原来在 1 的位置, 电路已稳定, 电感电流的初始值为  $I_0 = \frac{U_s}{R_0}$ 。

在  $t=0$  时开关 S 由 1 合到 2 (即换路), 如图 3.5.1 (b) 所示。此时, 电路中只有电阻和储存有磁场能的电感, 没有独立电源, 具有初始电流  $I_0$  的电感  $L$  通过电阻  $R$  进行放电, 电路中的响应是由于电感元件储存的磁场能激起的, 电路中的响应为 RL 电路的零输入响应。

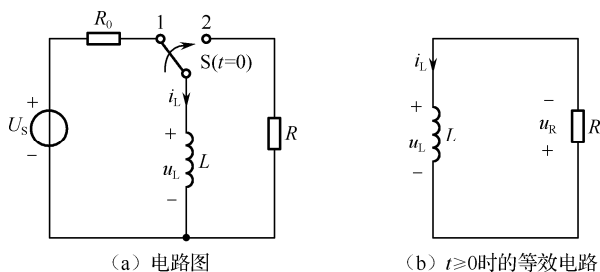


图 3.5.1 RL 电路的零输入响应

$t \geq 0$  时，在图 3.5.1 (b) 中根据 KVL 可得

$$u_R + u_L = 0$$

而  $u_R = Ri_L$ ， $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ ，电路的微分方程为

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \quad (3.5.1)$$

参照 3.3 节的求解方法，通过类比可知

$$i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{R}{L}t} = I_0e^{-\frac{R}{L}t}$$

与 RC 电路类似，令  $\tau = \frac{L}{R}$ ，则

$$i_L = I_0e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.5.2)$$

式中， $\tau$  称为 RL 电路的时间常数，其中  $R$  的单位为  $\Omega$ ， $L$  的单位为 H，则  $\tau$  的单位为 s。

根据图 3.5.1 (b) 可知，电阻和电感上的电压分别为

$$u_R = Ri_L = RI_0e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad u_L = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

图 3.5.2 所示 RL 电路的零输入响应曲线分别为  $i_L$ 、 $u_L$  和  $u_R$  随时间变化的曲线。

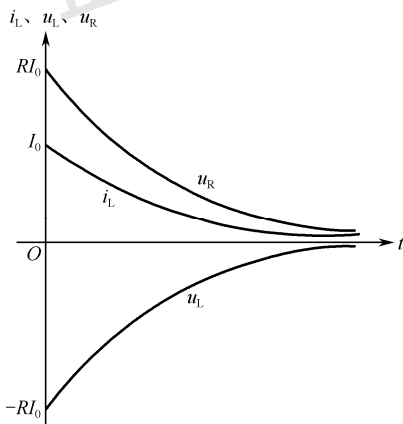


图 3.5.2 RL 电路的零输入响应曲线

比较 RL 电路和 RC 电路的零输入响应，可知用经典法分析 RL 电路与分析 RC 电路的暂态过程的响应有许多相似之处，如电路微分方程的形式相同，方程的求解过程相同，响应解析式的形式相同，电路时间常数的大小对暂态过程的影响相同等。需要注意的是，电路时间常数的表达式不同。

● 在 RC 电路中，电路的时间常数为  $\tau = RC$ ；

● 在 RL 电路中，电路的时间常数为  $\tau = \frac{L}{R}$ 。

【例 3.5.1】 如图 3.5.3 所示，换路前电路已处于稳态。已知： $I_s = 5\text{ A}$ ， $R_1 = 5\Omega$ ， $R_2 = 5\Omega$ ， $L = 1\text{ H}$ ，在  $t = 0$  时开关 S 闭合，求开关 S 闭合后的电流  $i$  及电感电流  $i_L$ 。

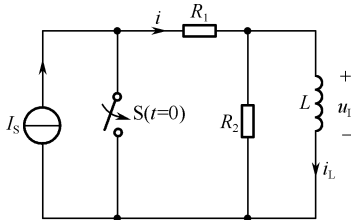


图 3.5.3 例 3.5.1 图

解：换路后的电路如图 3.5.4 所示，这是一个一阶 RL 零输入电路。

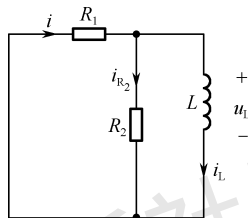


图 3.5.4 换路后的电路

(1) 求电感电流的初始值  $i_L(0_+)$ 。换路前电感相当于短路，则

$$i_L(0_-) = I_s = 5\text{ A}$$

根据换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 5\text{ A}$$

(2) 求时间常数  $\tau$ 。放电回路的等效电阻为

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \times 5}{5 + 5} = 2.5\Omega$$

时间常数

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{2.5} = 0.4\text{ s}$$

由式 (3.5.2) 可得

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 5e^{-2.5t}\text{ A}$$

电感上的电压为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = 1 \times \frac{d(5e^{-2.5t})}{dt} = -12.5e^{-2.5t}\text{ V}$$

流过电阻  $R_2$  的电流  $i_{R_2}$  为  $i_{R_2} = \frac{u_L}{R_2} = \frac{-12.5e^{-2.5t}}{5} = -2.5e^{-2.5t}\text{ A}$

根据 KCL 可得

$$i = i_{R_2} + i_L = -2.5e^{-2.5t} + 5e^{-2.5t} = 2.5e^{-2.5t}\text{ A}$$

### 3.5.2 RL 电路的零状态响应

如图 3.5.5 所示，换路前电感元件未储能。在  $t = 0$  时开关 S 闭合，电路与一恒定电压为  $U_s$  的电压源接通，开始对电感元件充电，流过电感的电流为  $i_L$ ，电路中的响应是电源激励激起的，为 RL 电路的零状态响应。图 3.5.5 所示的 RL 电路为一阶电路，采用三要素法同采用经典分析法分析的结果完全一样。



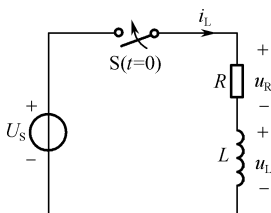


图 3.5.5 RL 电路的零状态响应

换路前，电感元件未储能，电感元件电流的初始值为

$$i_L(0_+) = 0$$

换路后，接入电源，电感元件储能。当达到稳态时，电感元件相当于短路，电感元件电流的稳态值为

$$i_L(\infty) = \frac{U_s}{R}$$

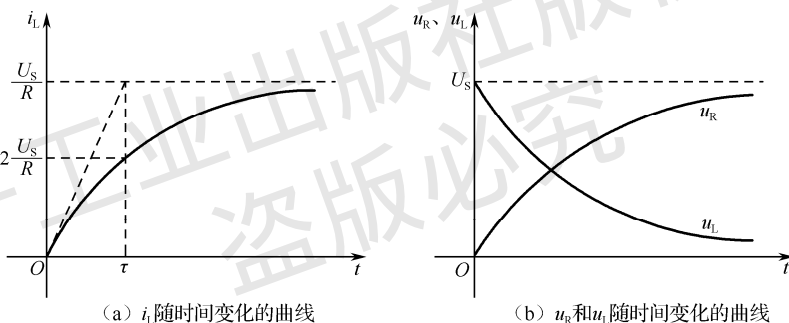
时间常数同零输入响应

$$\tau = \frac{L}{R}$$

将三要素代入式 (3.3.2)，得 RL 电路的零状态响应

$$i_L = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{U_s}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (3.5.3)$$

$i_L$  随时间变化的曲线如图 3.5.6 (a) 所示。



(a)  $i_L$  随时间变化的曲线

(b)  $u_R$  和  $u_L$  随时间变化的曲线

图 3.5.6 RL 电路的零状态响应曲线

$t \geq 0$  时电阻元件和电感元件上的电压分别为

$$u_R = Ri = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad u_L = L \frac{di}{dt} = U_s e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.5.4)$$

它们随时间变化的曲线如图 3.5.6 (b) 所示。在稳态时，电感元件相当于短路，其电压为零，所以电阻元件上的电压就等于电源电压。

### 3.5.3 RL 电路的全响应

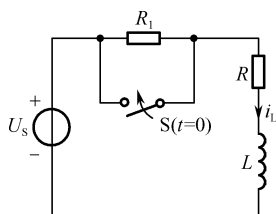


图 3.5.7 RL 电路的全响应

如图 3.5.7 所示，电源电压为  $U_s$ ，若换路前电路已处于稳态，则电感元件电流的初始值为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R} = I_0$$

换路后，电路中仍存在电源，电路中的响应为 RL 电路的全响应。换路后电感元件的稳态值为

$$i_L(\infty) = \frac{U_S}{R}$$

时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R}$$

将三要素代入式 (3.3.2), 得 RL 电路的全响应

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_S}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.5.5)$$

式中, 右边第一项为零输入响应; 第二项为零状态响应。

**【例 3.5.2】** 图 3.5.8 所示电路原已稳定, 已知  $U_S = 36\text{V}$ ,  $R_1 = 32\Omega$ ,  $R_2 = 40\Omega$ ,  $R_3 = 10\Omega$ ,  $L = 9\text{H}$ , 在  $t=0$  时将开关 S 断开, 试求开关 S 断开后流过电感的电流。

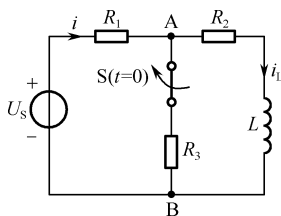


图 3.5.8 例 3.5.2 图

解: (1) 求初始值  $i_L(0_+)$ 。

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3}} \times \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{36}{32 + \frac{40 \times 10}{40 + 10}} \times \frac{10}{40 + 10} = 0.18\text{A}$$

根据换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.18\text{A}$$

(2) 求稳态值  $i_L(\infty)$ 。

$$i_L(\infty) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = \frac{36}{32 + 40} = 0.5\text{A}$$

(3) 求时间常数  $\tau$ 。

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{9}{32 + 40} = 0.125\text{s}$$

$$i_L = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.5 + (0.18 - 0.5)e^{-8t} = (0.5 - 0.32e^{-8t})\text{A}$$

需要注意的是, 对于简单 RL 串联一阶电路, 电路中只有一个电阻, 则  $R_{\text{eq}} = R$ ; 对于较复杂的一阶电路,  $R_{\text{eq}}$  为换路后的电路中, 将独立电源置零, 并断开电感元件后, 从电感两端看进去所求得的无源二端网络的等效电阻, 与戴维宁定理求等效电阻的方法类似。

**【例 3.5.3】** 如图 3.5.9 所示电路在开关 S 断开前已处于稳定状态。利用三要素法求开关断开后的电流  $i_L(t)$ 。

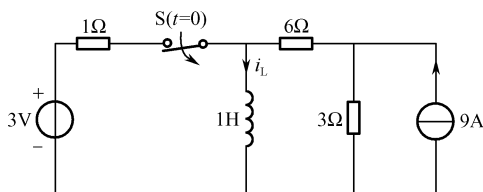


图 3.5.9 例 3.5.3 图

解: (1) 求初始值  $i_L(0_+)$ 。在换路前的稳态电路中, 电感相当于短路, 如图 3.5.10 所示, 可得

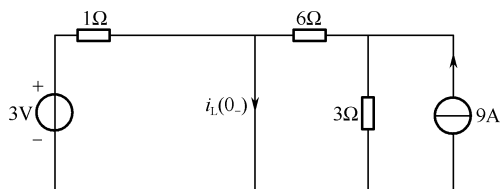


图 3.5.10  $t=0$  时刻的等效电路

$$i_L(0_-) = \frac{3}{1} + 9 \times \frac{3}{6+3} = 6\text{A}$$

根据换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 6\text{A}$$

(2) 求稳态解  $i_L(\infty)$ 。在换路后的直流稳态电路中，电感相当于短路，如图 3.5.11 所示。

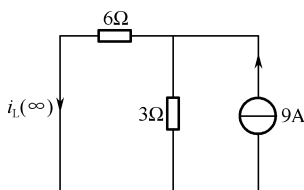


图 3.5.11  $t=\infty$  时的等效电路

$$i_L(\infty) = 9 \times \frac{3}{6+3} = 3\text{A}$$

(3) 求时间常数。在换路后的电路中，将独立电源置零，并断开电感元件后，从电感两端看去所求得的无源二端网络如图 3.5.12 所示。

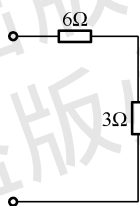


图 3.5.12 求等效电阻的电路

$$R_{\text{eq}} = 6 + 3 = 9\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{9}\text{s}$$

$$i_L = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 3 + (6-3)e^{-9t} = (3+3e^{-9t})\text{A}$$



思考题：RL 电路中， $R$  和  $L$  变大，对暂态过程的快慢有什么影响？

## 本章小结

1. 当含有储能元件的电路发生换路时，电路将从一个稳定状态过渡到另一个稳定状态。换路瞬间，电容上的电压不跃变， $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ ；电感上的电流不跃变， $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

2. 求解电路初始值的步骤：

(1) 画出  $t=0_-$  时刻的等效电路图，求解  $u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_-)$ ；

(2) 根据换路定则确定  $u_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ ;

(3) 根据已求得的  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$ ，画出  $t=0_+$  时刻的等效电路。即将电容元件用电压等于  $u_C(0_+)$  的电压源替代（未储能时则相当于短路），电感元件用电流等于  $i_L(0_+)$  的电流源替代（未储能时则相当于开路），求解该直流电阻电路，从而确定其余相关的初始条件。

3. 一阶线性电路的响应分为零输入响应、零状态响应和全响应。其中零输入响应是由储能元件的初始储能产生的响应；零状态响应是由外施激励引起的响应；全响应是储能元件的初始值和外施激励共同引起的响应，它可以看作零输入响应和零状态响应的叠加。

4. 一阶线性电路的响应都是按照指数规律变化的，变化的快慢由时间常数  $\tau$  决定。其中，RC 电路的时间常数为  $\tau = RC$ ；RL 电路的时间常数为  $\tau = \frac{L}{R}$ ，时间常数的单位为 s。当电路较为复杂时，求时间常数时应代入戴维宁等效电阻  $R_{eq}$ 。

5. 一阶线性电路响应的一般表达式可写为： $f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。初始值  $f(0_+)$ 、稳态值  $f(\infty)$  和时间常数  $\tau$  称为一阶线性电路的三要素。

一阶电路的响应归纳如表 3.1 所示。

表 3.1 一阶电路的响应

| 一阶动态电路   | 零输入响应                               | 零状态响应  | 全响应  | 时间常数                 |
|----------|-------------------------------------|--|--|----------------------|
| 一阶 RC 电路 | $u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$ | $u_C = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ | $u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ | $\tau = RC$          |
| 一阶 RL 电路 | $i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$ | $i_L = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ | $i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ | $\tau = \frac{L}{R}$ |

## 习 题

3-1 换路定则的数学表达式为：\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。

3-2 全响应既可分解为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_之和，又可分解为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_之和。当\_\_\_\_\_趋向于零时，过渡过程结束。

3-3 一阶线性电路暂态分析的三要素法中的三要素指的是\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。

3-4 已知电路的全响应为  $u = 5 + 5e^{-2t}$  V，则  $u(0_+) =$ \_\_\_\_\_， $u(\infty) =$ \_\_\_\_\_， $\tau =$ \_\_\_\_\_。零状态响应为\_\_\_\_\_，零输入响应为\_\_\_\_\_。

3-5 在直流稳态时，电感元件上（ ）。

- A. 有电流、有电压      B. 有电流、无电压      C. 无电流、有电压

3-6 在直流稳态时，电容元件上（ ）。

- A. 有电压、有电流      B. 有电压、无电流      C. 无电压、有电流

3-7 在图 3.1 中，已知  $I_S = 1$  A， $R = 100$   $\Omega$ 。开关 S 闭合前电路已处于稳态，试问在闭合开关 S 的瞬间， $u_L(0_+)$  为（ ）。

- A. 0V      B. 100V      C. 63.2V

3-8 在图 3.2 中，已知  $U_S = 6$  V， $R_1 = 2$   $\Omega$ ， $R_2 = 2$   $\Omega$ 。开关 S 闭合前电路已处于稳态，试问在闭合开关瞬间，初始值  $i_L(0_+)$  和  $i(0_+)$  分别为（ ）。

- A. 0A、1.5A      B. 3A、3A      C. 3A、1.5A

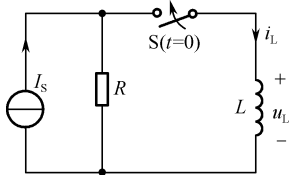


图 3.1 题 3-7 图

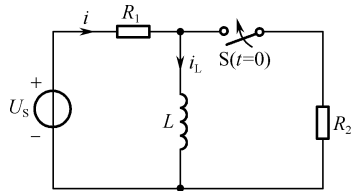


图 3.2 题 3-8 图

3-9 图 3.3 所示电路的时间常数为 ( )。

- A.  $3\mu\text{s}$                       B.  $1.5\mu\text{s}$                       C.  $6\mu\text{s}$

3-10 图 3.4 所示电路中, 开关 S 在  $t=0$  瞬间闭合, 若  $u_C(0_-)=0\text{V}$ , 则  $i_1(0_+)$  为 ( )。

- A.  $0\text{A}$                               B.  $0.5\text{A}$                               C.  $1\text{A}$

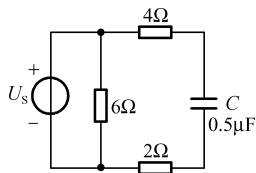


图 3.3 题 3-9 图

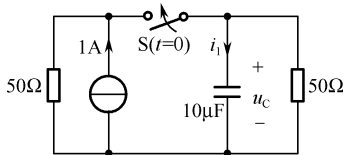


图 3.4 题 3-10 图

3-11 在电路的暂态过程中, 电路的时间常数  $\tau$  越大, 则电流和电压的增长或衰减就 ( )。

- A. 越快                              B. 越慢                              C. 无影响

3-12 电路的暂态过程从  $t=0$  大致经过 ( ) 时间, 就可认为到达稳定状态了。

- A.  $\tau$                                       B.  $(3\sim 5)\tau$                               C.  $10\tau$

3-13 如图 3.5 所示电路, 换路前电路已处于稳态, 已知  $U_s=6\text{V}$ ,  $R_1=2\Omega$ ,  $R_2=4\Omega$ 。试求开关断开后电流  $i_1$ 、 $i_2$  及电感电压  $u_L$  的初始值。

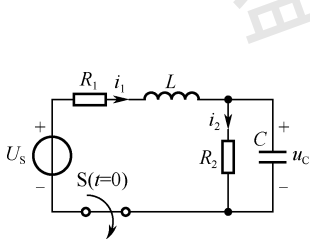


图 3.5 题 3-13 图

3-14 如图 3.6 所示电路, 换路前电路已处于稳态, 已知  $U_s=8\text{V}$ ,  $R_1=2\Omega$ ,  $R_2=R_3=4\Omega$ , 在  $t=0$  时将开关由位置 1 换接至位置 2, 试求换路后电流  $i_1$ 、 $i_2$ 、 $i_L$  及电感电压  $u_L$  的初始值。

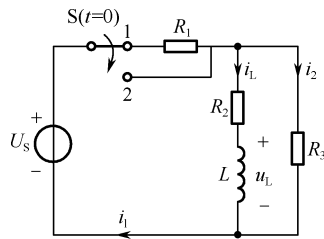


图 3.6 题 3-14 图

3-15 图 3.7 所示电路开关闭合前电容电压  $u_C$  为零, 在  $t=0$  时 S 闭合, 求换路后的  $u_C$  和  $i_C$ 。

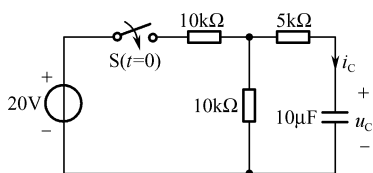


图 3.7 题 3-15 图

3-16 如图 3.8 所示电路原已处于稳态。已知  $U_s=60\text{V}$ ,  $R_1=100\Omega$ ,  $R_2=150\Omega$ ,  $R_3=100\Omega$ ,  $C=10\mu\text{F}$ 。若  $t=0$  时将开关闭合, 求换路后的电流  $u_C$  和  $i$ 。

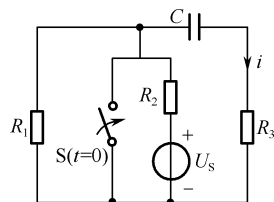


图 3.8 题 3-16 图

3-17 如图 3.9 所示电路，已知  $i_L(0_-) = 0\text{A}$ ，在  $t = 0$  时开关 S 闭合。求换路后的电感电流  $i_L$  及电压  $u_L$ 。

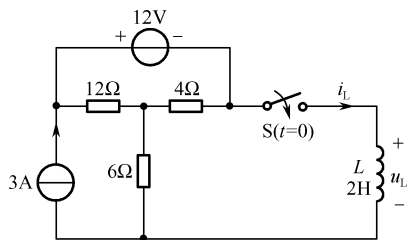


图 3.9 题 3-17 图

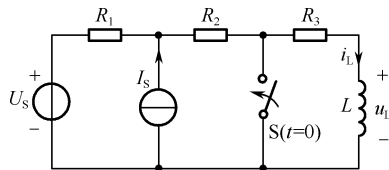


图 3.10 题 3-18 图

3-19 电路如图 3.11 所示，换路前已处于稳态。已知  $I_s = 1\text{mA}$ ， $U_s = 10\text{V}$ ， $R_1 = 10\text{k}\Omega$ ， $R_2 = 10\text{k}\Omega$ ， $R_3 = 20\text{k}\Omega$ ， $C = 10\mu\text{F}$ ，在  $t = 0$  时开关 S 闭合。试求换路后的  $u_C$ 。

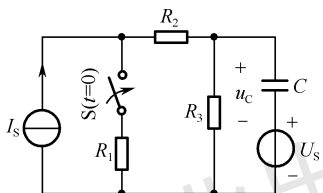


图 3.11 题 3-19 图

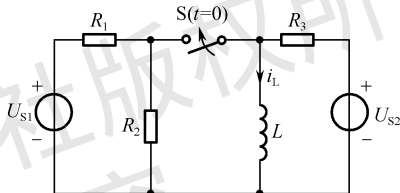


图 3.12 题 3-20 图

3-21 电路如图 3.13 所示，换路前已处于稳态。已知  $U_s = 3\text{V}$ ， $I_s = 9\text{A}$ ， $R_1 = 1\Omega$ ， $R_2 = 2\Omega$ ， $R_3 = 6\Omega$ ， $R_4 = 3\Omega$ ， $C = 0.5\text{F}$ 。若  $t = 0$  时将开关 S 断开，试用三要素法求换路后的  $u$ 。

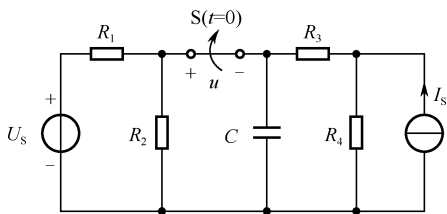


图 3.13 题 3-21 图

3-22 如图 3.14 所示，开关原合在位置 1，电路已达稳态。已知  $U_s = 40\text{V}$ ， $I_s = 3\text{A}$ ， $R_1 = 50\Omega$ ， $R_2 = 25\Omega$ ， $R_3 = 50\Omega$ ， $R_4 = 100\Omega$ ， $R_5 = 2\Omega$ ， $L = 1\text{H}$ 。在  $t = 0$  时将开关由位置 1 换接至位置 2，试用三要素法计算换路后的  $i$ 。

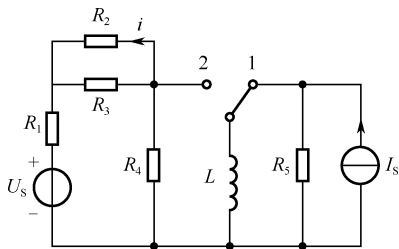


图 3.14 题 3-22 图

## 拓展阅读——一阶电路在飞机交流发电机电压自动调节系统中的应用

飞机同步发电机的转速、负载（负载大小或功率因数）变化时，其电压将随之变化。为保证用电设备正常工作，需通过改变励磁机的励磁电流来调节同步发电机的电压。

目前较先进的飞机交流电源系统均采用晶体管式的电压调节器。它的特点是调压精度高，调

压误差为 $\pm(0.5\sim 1)\%$ ，而老式的炭片调压器和磁放大器式调压器的调压误差分别为 $\pm 5\%$ 和 $\pm 2\%$ ；此外，它还具有重量轻、体积小、寿命长、维护方便、反应快等突出优点。

晶体管电压调节器的基本原理可用图 3.15 来加以说明。图中大功率晶体管串联在励磁机励磁线圈电路中，用来控制励磁机的励磁电流。大功率晶体管通常工作在开关状态，在忽略其饱和和压降与穿透电流的情况下，可将晶体管 BG 看作一个开关 K，开关频率不宜过高（一般取  $1\sim 3\text{kHz}$ ），否则功耗将增大。图 3.15 中 VD 为续流二极管，在功率管截止期间，续流二极管可为励磁电流提供续流通路，以防止功率管由导通转为截止时，在励磁绕组中产生过高的自感电势将功率管击穿；同时，还可使励磁电流平滑。在功率管的控制下，励磁电流是不断变化的，功率管导通期间励磁电流将增长，截止期间励磁电流将衰减。

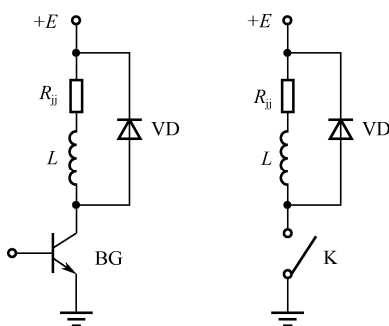


图 3.15 晶体管电压调节器的基本原理

设  $R_{jj}$  和  $L$  为励磁绕组的电阻和电感， $E$  为电源电压， $t_1$  为功率管导通时间，导通期间的电流为  $i_{\text{on}}$ ， $t_2$  为功率管截止时间，截止期间的电流为  $i_{\text{off}}$ ，则功率管导通与截止期间的电压平衡方程式为

$$i_{\text{on}} R_{jj} + L \frac{di_{\text{on}}}{dt} = E \quad (3.1)$$

$$i_{\text{off}} R_{jj} + L \frac{di_{\text{off}}}{dt} = 0 \quad (3.2)$$

式 (3.1)、式 (3.2) 的解分别为

$$i_{\text{on}} = \frac{E}{R_{jj}} - Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (0 \leq t \leq t_1)$$

$$i_{\text{off}} = Be^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \quad (t_1 \leq t \leq T)$$

式中， $T = t_1 + t_2$ ； $\tau = \frac{L}{R_{jj}}$ ； $A$ 、 $B$  为积分常数。

为从边界条件确定积分常数  $A$  和  $B$ ，还必须建立下式：

$$i_{\text{on}} = \frac{E}{R_{jj}} - Ae^{-\frac{t-T}{\tau}} \quad (T \leq t \leq T + t_1)$$

边界条件为  $t = t_1$  时， $i_{\text{on}} = i_{\text{off}}$ ； $t = T$  时， $i_{\text{on}} = i_{\text{off}}$ 。

联立求解上述方程可得

$$i_{\text{on}} = \frac{E}{R_{jj}} \left( 1 - \frac{1 - e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (3.3)$$

$$i_{\text{off}} = \frac{E}{R_{\text{ij}}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \quad (3.4)$$

式 (3.3)、式 (3.4) 给出了发电机励磁电流的变化规律。在功率管的控制下, 由于励磁绕组存在电感, 使得励磁电流按照指数规律变化。功率管导通时, 励磁电流按照指数规律增长; 功率管截止时, 励磁电流按照指数规律衰减。可见, 励磁电流增长和衰减是围绕某一平均值  $I_{\text{ij}}$  脉动的, 如图 3.16 所示。

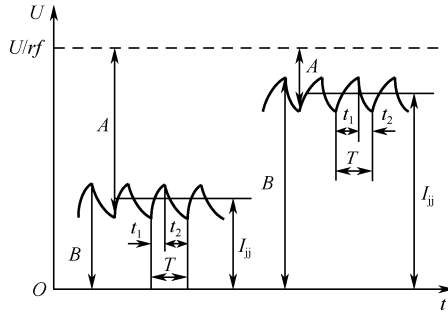


图 3.16 励磁电流的变化

通过计算可得平均值  $I_{\text{ij}}$  为

$$I_{\text{ij}} = \frac{E}{R_{\text{ij}}} \cdot \sigma$$

式中,  $\sigma$  为大功率晶体管的导通比,  $\sigma = \frac{t_1}{T}$ 。

可见, 在功率管的控制下, 励磁电流的平均值  $I_{\text{ij}}$  与功率管的导通比  $\sigma$  成正比。只要使功率管导通比  $\sigma$  随发电机工作状态的变化做相应的改变, 就可以控制励磁机的励磁电流。