第 3 章

系统的时域分析

1．某二阶 LTI 连续系统的初始状态为 $x_1(0)$ 和 $x_2(0)$，已知 $x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$ 时，其零输入响应为 $y_{zi1}(t)=e^{-t}+e^{-2t}$，$t\geqslant 0$；当 $x_1(0)=0$，$x_2(0)=1$ 时，其零输入响应为 $y_{zi2}(t)=e^{-t}-e^{-2t}$，$t\geqslant 0$；当 $x_1(0)=1$，$x_2(0)=-1$，而输入为 $f(t)$ 时，其全响应 $y(t)=2+e^{-t}$，$t\geqslant 0$。求当 $x_1(0)=3$，$x_2(0)=2$，输入为 $2f(t)$ 时的全响应。

分析

此题考察 LTI 系统的线性性质，包括零输入响应线性和零状态响应线性。

解

设输入为 $f(t)$ 时，系统零状态响应为 $y_{zs}(t)$，依题意可得

$$\begin{cases} y_{zi1}(t)=e^{-t}+e^{-2t}, t\geqslant 0 \\ y_{zi2}(t)=e^{-t}-e^{-2t}, t\geqslant 0 \\ y(t)=y_{zi1}(t)-y_{zi2}(t)+y_{zs}(t)=2+e^{-t}, t\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{zs}(t)=2+e^{-t}-2e^{-2t}, t\geqslant 0$$

当 $x_1(0)=3$, $x_2(0)=2$，输入为 $2f(t)$ 时的全响应为：

$$3y_{zi1}(t)+2y_{zi2}(t)+2y_{zs}(t)=4+7e^{-t}-3e^{-2t}, t\geqslant 0$$

2．已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应。

（1） $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$

（2） $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=-2$

（3） $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$

（4） $y''(t)+y(t)=f(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=0$

（5） $y'''(t)+4y''(t)+5y'(t)+2y(t)=f(t)$，$y(0_-)=0$，$y'(0_-)=1$，$y''(0_-)=-1$

分析

将0_-初始状态转换为0_+初始状态，然后采用经典法求解。在输入为零时，系统在0时刻的值不会发生改变。

解

（1）$y''_{zi}(t)+5y'_{zi}(t)+6y_{zi}(t)=0, t>0$

$\lambda^2+5\lambda+6=0$

$\lambda_1=-2, \lambda_2=-3$

$y_{zi}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}, t>0$

$y_{zi}(t)=-2C_1e^{-2t}-3C_2e^{-3t}, t>0$

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+)=y(0_-)=C_1+C_2=1 \\ y'_{zi}(0_+)=y'(0_-)=-2C_1-3C_2=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1=2 \\ C_2=-1 \end{cases}$$

$y_{zi}(t)=2e^{-2t}-e^{-3t}, t>0$

（2）$y''_{zi}(t)+2y'_{zi}(t)+5y_{zi}(t)=0, t>0$

$\lambda^2+2\lambda+5=0$

$\lambda_{1,2}=-1\pm j2$

$y_{zi}(t)=e^{-t}[C\cos(2t)+D\sin(2t)], t>0$

$y'_{zi}(t)=e^{-t}[(-2C-D)\sin(2t)+(2D-C)\cos(2t)], t>0$

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+)=y(0_-)=C=2 \\ y'_{zi}(0_+)=y'(0_-)=2D-C=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=2 \\ D=0 \end{cases}$$

$y_{zi}(t)=2e^{-t}\cos(2t), t>0$

（3）$y''_{zi}(t)+2y'_{zi}(t)+y_{zi}(t)=0, t>0$

$\lambda^2+2\lambda+1=0$

$\lambda_{1,2}=-1$

$y_{zi}(t)=(C_1t+C_0)e^{-t}, t>0$

$y'_{zi}(t)=C_1e^{-t}-(C_1t+C_0)e^{-t}, t>0$

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+)=y(0_-)=C_0=1 \\ y'_{zi}(0_+)=y'(0_-)=C_1-C_0=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1=2 \\ C_0=1 \end{cases}$$

$y_{zi}(t)=(2t+1)e^{-t}, t>0$

（4）$y''_{zi}(t)+y_{zi}(t)=0, t>0$

$\lambda^2+1=0$

$\lambda_{1,2}=\pm j$

$y_{zi}(t)=C\cos t+D\sin t, t>0$

$y'_{zi}(t) = -C\sin t + D\cos t, t > 0$

$\begin{cases} y_{zi}(0_+) = y(0_-) = C = 2 \\ y'_{zi}(0_+) = y'(0_-) = D = 0 \end{cases}$

$y_{zi}(t) = 2\cos t, t > 0$

（5） $y'''_{zi}(t) + 4y''_{zi}(t) + 5y'_{zi}(t) + 2y_{zi}(t) = 0, t > 0$

$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = -2$

$y_{zi}(t) = (C_1 t + C_0)e^{-t} + De^{-2t}, t > 0$

$y'_{zi}(t) = (-C_1 t + C_1 - C_0)e^{-t} - 2De^{-2t}, t > 0$

$y''_{zi}(t) = (C_1 t - 2C_1 + C_0)e^{-t} + 4De^{-2t}, t > 0$

$\begin{cases} y_{zi}(0_+) = y(0_-) = C_0 + D = 0 \\ y'_{zi}(0_+) = y'(0_-) = C_1 - C_0 - 2D = 1 \\ y''_{zi}(0_+) = y''(0_-) = -2C_1 + C_0 + 4D = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_0 = -1 \\ D = 1 \end{cases}$

$y_{zi}(t) = (2t-1)e^{-t} + e^{-2t}, t > 0$

3．已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其 0_+ 时刻的初始值。

（1） $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t), y(0_-) = 1, y'(0_-) = -1, f(t) = u(t)$

（2） $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = f''(t), y(0_-) = 1, y'(0_-) = 1, f(t) = \delta(t)$

（3） $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = f''(t) + f(t), y(0_-) = 2, y'(0_-) = -2, f(t) = \delta(t)$

（4） $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = f'(t), y(0_-) = 1, y'(0_-) = 2, f(t) = e^{-2t}u(t)$

分析

由于输入的影响，系统从 0_- 时刻到 0_+ 时刻的初始值可能产生跳变。

解

（1）将 $f(t) = u(t)$ 代入方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t) \quad ①$$

为使方程两边冲激函数平衡，令

$$y''(t) = r_1(t) \quad ②$$
$$y'(t) = r_2(t) \quad ③$$
$$y(t) = r_3(t) \quad ④$$

其中，$r_1(t)$、$r_2(t)$、$r_3(t)$ 为不含冲激函数及其导数的有界函数。对②式两边从 $0_- \sim 0_+$ 积分，得

$$y'(0_+) - y'(0_-) = \int_{0_-}^{0_+} r_1(t)dt = 0$$
$$y'(0_+) = y'(0_-) + 0 = -1 + 0 = -1$$

对式③两边从 $0_- \sim 0_+$ 积分，得

$$y(0_+) - y(0_-) = \int_{0_-}^{0_+} r_2(t)dt = 0$$

$$y(0_+)=y(0_-)+0=1+0=1$$

（2）将 $f(t)=\delta(t)$ 代入方程得

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=\delta''(t) \quad ①$$

为使方程两边冲激函数平衡，令

$$y''(t)=\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t) \quad ②$$

$$y'(t)=\delta'(t)+b\delta(t)+r_2(t) \quad ③$$

$$y(t)=\delta(t)+r_3(t) \quad ④$$

其中，$r_1(t)$、$r_2(t)$、$r_3(t)$ 为不含冲激函数及其导数的有界函数。将式②③④代入式①得

$$[\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t)]+6[\delta'(t)+b\delta(t)+r_2(t)]+8[\delta(t)+r_3(t)]=\delta''(t)$$

$$\delta''(t)+(b+6)\delta'(t)+(c+6b+8)\delta(t)+[r_1(t)+6r_2(t)+8r_3(t)]=\delta''(t)$$

对比系数得

$$\begin{cases}b+6=0\\c+6b+8=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=-6\\c=28\end{cases}$$

得

$$y''(t)=\delta''(t)-6\delta'(t)+28\delta(t)+r_1(t) \quad ⑤$$

$$y'(t)=\delta'(t)-6\delta(t)+r_2(t) \quad ⑥$$

$$y(t)=\delta(t)+r_3(t) \quad ⑦$$

对式⑤两边从 0_- ～ 0_+ 积分，得

$$y'(0_+)-y'(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}[\delta''(t)-6\delta'(t)+28\delta(t)+r_1(t)]\mathrm{d}t=28$$

$$y'(0_+)=y'(0_-)+28=1+28=29$$

对式⑥两边从 0_- ～ 0_+ 积分，得

$$y(0_+)-y(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}[\delta'(t)-6\delta(t)+r_2(t)]\mathrm{d}t=-6$$

$$y(0_+)=y(0_-)-6=1-6=-5$$

（3）将 $f(t)=\delta(t)$ 代入方程，得

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=\delta''(t)+\delta(t) \quad ①$$

为使方程两边冲激函数平衡，令

$$y''(t)=\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t) \quad ②$$

$$y'(t)=\delta'(t)+b\delta(t)+r_2(t) \quad ③$$

$$y(t)=\delta(t)+r_3(t) \quad ④$$

其中，$r_1(t)$、$r_2(t)$、$r_3(t)$ 为不含冲激函数及其导数的有界函数。将式②③④代入式①得

$$[\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t)]+4[\delta'(t)+b\delta(t)+r_2(t)]+3[\delta(t)+r_3(t)]=\delta''(t)+\delta(t)$$

$$\delta''(t)+(b+4)\delta'(t)+(c+4b+3)\delta(t)+[r_1(t)+4r_2(t)+3r_3(t)]=\delta''(t)+\delta(t)$$

对比系数得

$$\begin{cases}b+4=0\\c+4b+3=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=-4 \\ c=14 \end{cases}$$

得

$$y''(t)=\delta''(t)-4\delta'(t)+14\delta(t)+r_1(t) \quad ⑤$$

$$y'(t)=\delta'(t)-4\delta(t)+r_2(t) \quad ⑥$$

$$y(t)=\delta(t)+r_3(t) \quad ⑦$$

对式⑤两边从 0_- ～ 0_+ 积分，得

$$y'(0_+)-y'(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}[\delta''(t)-4\delta'(t)+14\delta(t)+r_1(t)]\mathrm{d}t=14$$

$$y'(0_+)=y'(0_-)+14=-2+14=12$$

对式⑥两边从 0_- ～ 0_+ 积分，得

$$y(0_+)-y(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}[\delta'(t)-4\delta(t)+r_2(t)]\mathrm{d}t=-4$$

$$y(0_+)=y(0_-)-4=2-4=-2$$

（4）将 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ 代入方程得

$$y''(t)+4y'(t)+5y(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)+\delta(t) \quad ①$$

为使方程两边冲激函数平衡，令

$$y''(t)=\delta(t)+r_1(t) \quad ②$$

$$y'(t)=r_2(t) \quad ③$$

$$y(t)=r_3(t) \quad ④$$

其中 $r_1(t)$ 、 $r_2(t)$ 、 $r_3(t)$ 为不含冲激函数及其导数的有界函数。

对式②两边从 0_- ～ 0_+ 积分，得

$$y'(0_+)-y'(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}[\delta(t)+r_1(t)]\mathrm{d}t=1$$

$$y'(0_+)=y'(0_-)+1=2+1=3$$

对式③两边从 0_- ～ 0_+ 积分，得

$$y(0_+)-y(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}r_2(t)\mathrm{d}t=0$$

$$y(0_+)=y(0_-)+0=1+0=1$$

4．已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应、零状态响应和完全响应。

（1） $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f(t), y(0_-)=y'(0_-)=1, f(t)=u(t)$

（2） $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=f'(t)+3f(t), y(0_-)=1, y'(0_-)=2, f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$

（3） $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=f'(t), y(0_-)=0, y'(0_-)=1, f(t)=u(t)$

分析

此题是典型的求微分方程的经典解题型。

解

（1）根据零输入响应的定义可知零输入响应满足以下的齐次方程

$$y_{zi}''(t)+4y_{zi}'(t)+3y_{zi}(t)=0$$

写出特征方程

$$\lambda^2+4\lambda+3=0$$
$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-3$$
$$y_{zi}(t)=C_{zi1}e^{-t}+C_{zi2}e^{-3t},t\geqslant 0$$
$$y'_{zi}(t)=-C_{zi1}e^{-t}-3C_{zi2}e^{-3t},t\geqslant 0$$
$$\begin{cases}y_{zi}(0_+)=y'(0_-)=C_{zi1}+C_{zi2}=1\\ y'_{zi}(0_+)=y'(0_-)=-C_{zi1}-3C_{zi2}=1\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}C_{zi1}=2\\ C_{zi2}=-1\end{cases}$$
$$y_{zi}(t)=2e^{-t}-e^{-3t},t\geqslant 0$$

根据零状态响应的定义可知零状态响应满足以下非齐次方程

$$y''_{zs}(t)+4y'_{zs}(t)+3y_{zs}(t)=u(t)$$

由于方程右端不含冲激函数及其导数，所以 $y'_{zs}(t)$，$y_{zs}(t)$ 为连续函数，即有

$$\begin{cases}y_{zs}(0_+)=y_{zs}(0_-)=0\\ y'_{zs}(0_+)=y'_{zs}(0_-)=0\end{cases}$$
$$y''_{zs}(t)+4y'_{zs}(t)+3y_{zs}(t)=1,t>0$$

零状态响应的齐次解为

$$y_{zsh}(t)=C_{zsh1}e^{-t}+C_{zsh2}e^{-3t},t\geqslant 0$$

设零状态响应的特解为

$$y_{zsp}(t)=P,t\geqslant 0$$
$$0+4\times 0+3P=1,t>0$$
$$\Rightarrow P=\frac{1}{3}$$

有

$$y_{zsp}(t)=\frac{1}{3},t\geqslant 0$$
$$y_{zs}(t)=y_{zsh}(t)+y_{zsp}(t)=C_{zsh1}e^{-t}+C_{zsh2}e^{-3t}+\frac{1}{3},t\geqslant 0$$
$$\begin{cases}y_{zs}(0_+)=C_{zsh1}+C_{zsh2}+\frac{1}{3}=0\\ y'_{zs}(0_+)=-C_{zi1}-3C_{zi2}=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}C_{zsh1}=-\frac{1}{2}\\ C_{zsh2}=\frac{1}{6}\end{cases}$$
$$y_{zs}(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}+\frac{1}{3},t\geqslant 0$$
$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{5}{6}e^{-3t}+\frac{1}{3},t\geqslant 0$$

（2）根据零输入响应的定义可知零输入响应满足以下齐次方程

$$y''_{zi}(t)+4y'_{zi}(t)+4y_{zi}(t)=0$$

写出特征方程

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$
$$\lambda_{1,2}=-2$$
$$y_{zi}(t)=(C_{zi1}t+C_{zi0})e^{-2t},t\geqslant 0$$
$$y'_{zi}(t)=(-2C_{zi1}t+C_{zi1}-2C_{zi0})e^{-2t},t\geqslant 0$$
$$\begin{cases}y_{zi}(0_+)=y(0_-)=C_{zi0}=1\\ y'_{zi}(0_+)=y'(0_-)=C_{zi1}-2C_{zi0}=2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}C_{zi0}=1\\ C_{zi1}=4\end{cases}$$
$$y_{zi}(t)=(4t+1)e^{-2t},t\geqslant 0$$

根据零状态响应的定义可知零状态响应满足以下非齐次方程

$$y''_{zs}(t)+4y'_{zs}(t)+4y_{zs}(t)=\delta(t)+2e^{-t}u(t) \quad ①$$

为确保方程两边冲激函数平衡，设

$$y''_{zs}(t)=\delta(t)+r_1(t) \quad ②$$
$$y'_{zs}(t)=r_2(t) \quad ③$$
$$y_{zs}(t)=r_3(t) \quad ④$$

其中，$r_1(t)$、$r_2(t)$、$r_3(t)$为不含冲激函数及其导数的有界函数。

对式②两边从$0_-\sim 0_+$积分，得

$$y'_{zs}(0_+)-y'_{zs}(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}[\delta(t)+r_1(t)]dt=1$$
$$y'_{zs}(0_+)=y'_{zs}(0_-)+1=0+1=1$$

对式③两边从$0_-\sim 0_+$积分，得

$$y_{zs}(0_+)-y_{zs}(0_-)=\int_{0_-}^{0_+}r_2(t)dt=0$$
$$y_{zs}(0_+)=y_{zs}(0_-)+0=0+0=0$$

由于

$$y''_{zs}(t)+4y'_{zs}(t)+4y_{zs}(t)=2e^{-t},t>0$$

零状态响应的齐次解为

$$y_{zsh}(t)=(C_{zsh1}t+C_{zsh0})e^{-2t},t\geqslant 0$$

设零状态响应的特解为

$$y_{zsp}(t)=Pe^{-t},t\geqslant 0$$
$$Pe^{-t}-4Pe^{-t}+4Pe^{-t}=2e^{-t},t>0$$
$$\Rightarrow P=2$$

有

$$y_{zsp}(t)=2e^{-t},t\geqslant 0$$
$$y_{zs}(t)=y_{zsh}(t)+y_{zsp}(t)=(C_{zsh1}t+C_{zsh0})e^{-2t}+2e^{-t},t\geqslant 0$$
$$y'_{zs}(t)=(-2C_{zsh1}t+C_{zsh1}-2C_{zsh0})e^{-2t}-2e^{-t},t\geqslant 0$$

$$\begin{cases} y_{zs}(0_+) = C_{zsh0} + 2 = 0 \\ y'_{zs}(0_+) = C_{zsh1} - 2C_{zsh0} - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{zsh0} = -2 \\ C_{zsh1} = 1 \end{cases}$$

$$y_{zs}(t) = (-t-2)e^{-2t} + 2e^{-t}, t \geqslant 0$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = (3t-1)e^{-2t} + 2e^{-t}, t \geqslant 0$$

（3）根据零输入响应的定义可知零输入响应满足以下齐次方程

$$y''_{zi}(t) + 2y'_{zi}(t) + 2y_{zi}(t) = 0$$

写出特征方程

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j$$

$$y_{zi}(t) = [C\cos(t) + D\sin(t)]e^{-t}, t \geqslant 0$$

$$y'_{zi}(t) = (D-C)\cos(t)e^{-t} + (-D-C)\sin(t)e^{-t}, t \geqslant 0$$

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+) = y'(0_-) = C = 0 \\ y'_{zi}(0_+) = y'(0_-) = D - C = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = 1 \end{cases}$$

$$y_{zi}(t) = \sin(t)e^{-t}, t \geqslant 0$$

根据零状态响应的定义可知零状态响应满足以下非齐次方程

$$y''_{zs}(t) + 2y'_{zs}(t) + 2y_{zs}(t) = \delta(t) \quad ①$$

为确保方程两边冲激函数平衡，设

$$y''_{zs}(t) = \delta(t) + r_1(t) \quad ②$$

$$y'_{zs}(t) = r_2(t) \quad ③$$

$$y_{zs}(t) = r_3(t) \quad ④$$

其中，$r_1(t)$、$r_2(t)$、$r_3(t)$为不含冲激函数及其导数的有界函数。

对式②两边从$0_- \sim 0_+$积分，得

$$y'_{zs}(0_+) - y'_{zs}(0_-) = \int_{0_-}^{0_+} [\delta(t) + r_1(t)]dt = 1$$

$$y'_{zs}(0_+) = y'_{zs}(0_-) + 1 = 0 + 1 = 1$$

对式③两边从$0_- \sim 0_+$积分，得

$$y_{zs}(0_+) - y_{zs}(0_-) = \int_{0_-}^{0_+} r_2(t)dt = 0$$

$$y_{zs}(0_+) = y_{zs}(0_-) + 0 = 0 + 0 = 0$$

由于

$$y''_{zs}(t) + 2y'_{zs}(t) + 2y_{zs}(t) = 0, t > 0$$

零状态响应为

$$y_{zs}(t) = [C_{zs}\cos(t) + D_{zs}\sin(t)]e^{-t}, t \geqslant 0$$

$$y'_{zs}(t) = (D_{zs} - C_{zs})\cos(t) + (-D_{zs} - C_{zs})\sin(t)e^{-t}, t \geqslant 0$$

$$\begin{cases} y_{zs}(0_+) = C_{zs} = 0 \\ y'_{zs}(0_+) = D_{zs} - C_{zs} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{zs} = 0 \\ D_{zs} = 1 \end{cases}$$

$$y_{zs}(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-t}, t \geqslant 0$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = 2\sin(t)\mathrm{e}^{-t}, t \geqslant 0$$

5．试求下列微分方程所描述的连续时间 LTI 系统的冲激响应 $h(t)$ 。

（1） $y'(t) + 4y(t) = 3f'(t) + 2f(t), t \geqslant 0$

（2） $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4f(t), t \geqslant 0$

（3） $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 2f'(t) + 5f(t), t \geqslant 0$

分析

冲激响应是激励为 $\delta(t)$ 的零状态响应。

解

（1）选取中间系统 $y'(t) + 4y(t) = f(t)$ ，设其冲激响应为 $h_1(t)$ ，即

$$h_1'(t) + 4h_1(t) = \delta(t)$$

且有

$$h_1(0_+) = 1$$

$$h_1'(t) + 4h_1(t) = 0, t > 0$$

$$\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = -4$$

$$h_1(t) = C\mathrm{e}^{-4t}, t > 0$$

$$h_1(0_+) = C = 1$$

$$h_1(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-4t}, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} = \mathrm{e}^{-4t}u(t)$$

所求系统的冲激响应可由下式计算得出

$$h(t) = 3h_1'(t) + 2h_1(t) = 3[\mathrm{e}^{-4t}u(t)]' + 2\mathrm{e}^{-4t}u(t)$$

$$= 3[-4\mathrm{e}^{-4t}u(t) + \mathrm{e}^{-4t}\delta(t)] + 2\mathrm{e}^{-4t}u(t) = -10\mathrm{e}^{-4t}u(t) + 3\delta(t)$$

（2）选取中间系统 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ，设其冲激响应为 $h_1(t)$ ，即

$$h_1''(t) + 3h_1'(t) + 2h_1(t) = \delta(t)$$

且有

$$h_1'(0_+) = 1, h_1(0_+) = 0$$

$$h_1''(t) + 3h_1'(t) + 2h_1(t) = 0, t > 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$h_1(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}, t > 0$$

$$h_1'(t) = -C_1\mathrm{e}^{-t} - 2C_2\mathrm{e}^{-2t}, t > 0$$

$$\begin{cases} h_1(0_+) = C_1 + C_2 = 0 \\ h_1'(0_+) = -C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} e^{-t} - e^{-2t}, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

所求系统的冲激响应可由下式计算得出

$$h(t) = 4h_1(t) = 4(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

（3）选取中间系统 $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = f(t)$，设其冲激响应为 $h_1(t)$，即

$$h_1''(t) + 4h_1'(t) + 4h_1(t) = \delta(t)$$

且有

$$h_1'(0_+) = 1, h_1(0_+) = 0$$

$$h_1''(t) + 4h_1'(t) + 4h_1(t) = 0, t > 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2$$

$$h_1(t) = (C_1 t + C_0)e^{-2t}, t > 0$$

$$h_1'(t) = (-2C_1 t + C_1 - 2C_0)e^{-2t}, t > 0$$

$$\begin{cases} h_1(0_+) = C_0 = 0 \\ h_1'(0_+) = C_1 - 2C_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} te^{-2t}, t > 0 \\ 0 \quad, t < 0 \end{cases} = te^{-2t}u(t)$$

所求系统的冲激响应可由下式计算得出

$$h(t) = 2h_1'(t) + 5h_1(t) = 2[te^{-2t}u(t)]' + 5te^{-2t}u(t)$$
$$= 2[e^{-2t}u(t) - 2te^{-2t}u(t) + te^{-2t}\delta(t)] + 5te^{-2t}u(t) = 2e^{-2t}u(t) + te^{-2t}u(t)$$

6. 已知某线性时不变系统的输入 $f(t) = u(t-3) - u(t-4)$，冲激响应 $h(t) = u(t-7) - u(t-9)$，求出系统的零状态响应。

分析

零状态响应可以由系统输入与单位冲激响应的卷积求出，即

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$$

解

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) = [u(t) - u(t-4)] * [u(t-7) - u(t-9)]$$
$$= u(t) * u(t-7) - u(t) * u(t-9) - u(t-4) * u(t-7) + u(t-4) * u(t-9)]$$
$$= (t-7)u(t-7) - (t-9)u(t-9) - (t-11)u(t-11) + (t-13)u(t-13)$$

7. 已知某线性时不变系统的输入 $f(t) = u(t)$，冲激响应 $h(t) = (4e^{-4t} - e^{-t})u(t)$，求出系统的零状态响应。

分析

同上题，零状态响应可以由系统输入与单位冲激响应的卷积求出，即

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$$

解

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(t) = f(t) * h(t) &= u(t) * (4e^{-4t} - e^{-t})u(t) = 4u(t) * e^{-4t}u(t) - u(t) * e^{-t}u(t) \\
&= 4\times\frac{1-e^{-4t}}{0-(-4)}u(t) - \frac{1-e^{-t}}{0-(-1)}u(t) = (1-e^{-4t})u(t) - (1-e^{-t})u(t) \\
&= (e^{-t} - e^{-4t})u(t)
\end{aligned}
$$

8. 如图 3.1 所示系统，它由几个子系统组合而成，各子系统的冲激响应分别为 $h_a(t) = \delta(t-1)$，$h_b(t) = u(t) - u(t-3)$，试求总系统的冲激响应 $h(t)$。

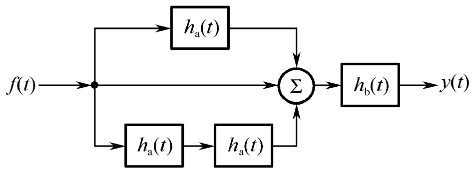


图 3.1

分析

复合系统的冲激响应可以由各子系统的冲激响应运算得到。系统级联，冲激响应卷积，系统并联，冲激响应相加。

解

$$
\begin{aligned}
h(t) &= [h_a(t) + \delta(t) + h_a(t) * h_a(t)] * h_b(t) \\
&= [\delta(t-1) + \delta(t) + \delta(t-1) * \delta(t-1)] * [u(t) - u(t-3)] \\
&= [\delta(t-1) + \delta(t) + \delta(t-2)] * [u(t) - u(t-3)] \\
&= \delta(t-1) * u(t) + \delta(t) * u(t) + \delta(t-2) * u(t) - \\
&\quad \delta(t-1) * u(t-3) - \delta(t) * u(t-3) - \delta(t-2) * u(t-3) \\
&= u(t-1) + u(t) + u(t-2) - u(t-4) - u(t-3) - u(t-5)
\end{aligned}
$$

9. 已知某连续时间 LTI 系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$，$y(0_-) = 1$，$y'(0_-) = 0$，$f(t) = 10\cos t u(t)$，求：

（1）系统的单位冲激响应 $h(t)$；

（2）系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$、零状态响应 $y_{zs}(t)$ 及完全响应 $y(t)$。

解

（1）

$$
\begin{cases}
h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = 0, t > 0 \\
h'(0_-) = 1 \\
h(0_-) = 0
\end{cases}
$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

$$h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}, t > 0$$

$$h'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}, t > 0$$

$$
\begin{cases}
h(0_+) = C_1 + C_2 = 0 \\
h'(0_+) = -2C_1 - 3C_2 = 1
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

即

$$h(t) = \begin{cases} e^{-2t} - e^{-3t}, t > 0 \\ 0 \qquad\quad, t < 0 \end{cases} = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

（2）求零输入响应

$$y''_{zi}(t) + 5y'_{zi}(t) + 6y_{zi}(t) = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

$$y_{zi}(t) = D_1 e^{-2t} + D_2 e^{-3t}, t > 0$$

$$\begin{cases} y_{zi}(0_+) = D_1 + D_2 = y_{zi}(0_-) = 1 \\ y'_{zi}(0_+) = -2D_1 - 3D_2 = y'_{zi}(0_-) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1 = 3 \\ D_2 = -2 \end{cases}$$

$$y_{zi}(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}, t > 0$$

求零状态响应

$$y_{zsh}(t) = E_1 e^{-2t} + E_2 e^{-3t}, t > 0$$

设 $y_{zsp}(t) = A\cos t + B\sin t, t > 0$

$$(-A\cos t - B\sin t) + 5(-A\sin t + B\cos t) + 6(A\cos t + B\sin t) = 10\cos t$$

$$(-A + 5B + 6A)\cos t + (-B - 5A + 6B)\sin t = 10\cos t$$

$$A = 1, B = 1$$

$$y_{zsp} = \cos t + \sin t, t > 0$$

$$y_{zs}(t) = y_{zsh}(t) + y_{zsp}(t) = E_1 e^{-2t} + E_2 e^{-3t} + \cos t + \sin t, t > 0$$

$$y'_{zs}(t) = -2E_1 e^{-2t} - 3E_2 e^{-3t} - \sin t + \cos t, t > 0$$

$$\begin{cases} y_{zs}(0_+) = y_{zs}(0_-) = E_1 + E_2 + 1 = 0 \\ y'_{zs}(0_+) = y'_{zs}(0_-) = -2E_1 - 3E_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1 = -4 \\ E_2 = 3 \end{cases}$$

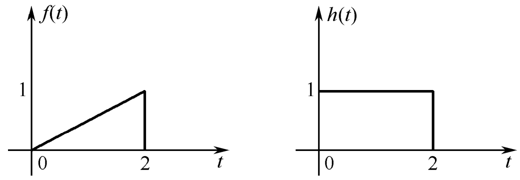
即

$$y_{zs}(t) = -4e^{-2t} + 3e^{-3t} + \cos t + \sin t, t > 0$$

求全响应

$$\begin{aligned} y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) &= 3e^{-2t} - 2e^{-3t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t} + \cos t + \sin t \\ &= -e^{-2t} + e^{-3t} + \cos t + \sin t, t > 0 \end{aligned}$$

10．某连续时间 LTI 系统的输入 $f(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 如图 3.2 所示，试求系统的零状态响应，并画出波形。



（a）　　　　（b）

图 3.2

分析

系统的零状态响应是输入信号与系统的单位冲激响应的卷积。方法一：写出波形图的代数表达式，然后求 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$；方法二：直接采用图示法求卷积。

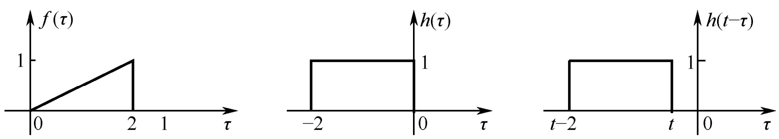
解

方法一：
$$f(t)=\frac{t}{2}[u(t)-u(t-2)]=\frac{t}{2}u(t)-\frac{t-2}{2}u(t-2)-u(t-2)$$

$$h(t)=u(t)-u(t-2)$$

$$\begin{aligned}
y_{zs}(t)=f(t)*h(t)&=\left[\frac{t}{2}u(t)-\frac{t-2}{2}u(t-2)-u(t-2)\right]*[u(t)-u(t-2)]\\
&=\frac{t}{2}u(t)*u(t)-\frac{t-2}{2}u(t-2)*u(t)-u(t-2)*u(t)\\
&\quad-\frac{t}{2}u(t)*u(t-2)+\frac{t-2}{2}u(t-2)*u(t-2)+u(t-2)*u(t-2)\\
&=\frac{t^2}{4}u(t)-\frac{(t-2)^2}{4}u(t-2)-(t-2)u(t-2)\\
&\quad-\frac{(t-2)^2}{4}u(t-2)+\frac{(t-4)^2}{4}u(t-4)+(t-4)u(t-4)\\
&=\frac{t^2}{4}u(t)-\frac{(t-2)t}{2}u(t-2)+\frac{(t-4)t}{4}u(t-4)
\end{aligned}$$

方法二：图示法，$f(\tau)$、$h(\tau)$、$h(t-\tau)$ 波形如图 3.3（a）～（c）所示。



（a）　　　　（b）　　　　（c）

图 3.3

① $t<0$ 时，卷积波形如图 3.4（a）所示。

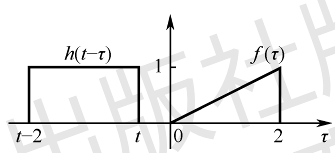


图 3.4（a）

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=0$$

② $0\leqslant t<2$ 时，卷积波形如图 3.4（b）所示。

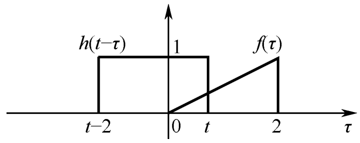


图 3.4（b）

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_0^t \frac{\tau}{2}\mathrm{d}\tau=\frac{t^2}{4}$$

③ $0\leqslant t-2<2$，即 $2\leqslant t<4$ 时，卷积波形如图 3.4（c）所示。

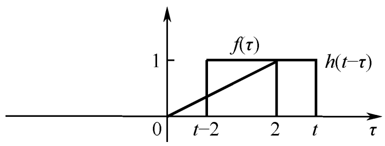


图 3.4（c）

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_{t-2}^2 \frac{\tau}{2}\mathrm{d}\tau=\frac{4-(t-2)^2}{4}=\frac{-t^2+4t}{4}$$

④ $2\leqslant t-2$，即 $t\geqslant 4$ 时，卷积波形如图 3.4（d）所示。

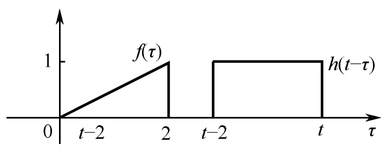


图 3.4（d）

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=0$$

即

$$y_{zs}(t)=\begin{cases}0 & ,t<0\\ \dfrac{t^2}{4} & ,0\leqslant t<2\\ \dfrac{-t^2+4t}{4} & ,2\leqslant t<4\\ 0 & ,t\geqslant 4\end{cases}$$

波形如图 3.5 所示。

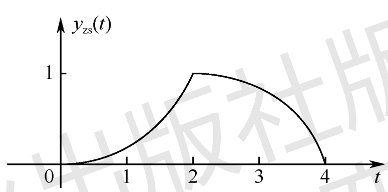


图 3.5

11．如图 3.6 所示的电路，其中 $i_S(t)=u(t)\mathrm{A}$，若以电容电流 $i_C(t)$ 为响应，试列出其微分方程并求出其冲激响应和阶跃响应。

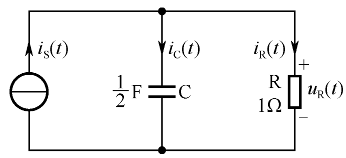


图 3.6

解

由电路写出方程

$$i_C(t)+i_R(t)=i_S(t)$$

$$i_R(t)=\frac{u_R(t)}{R}=\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t}i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

整理可得

$$i_C'(t)+\frac{1}{RC}i_C(t)=i_S'(t)$$

代入电路参数得，系统的微分方程为

$$i_C'(t)+2i_C(t)=i_S'(t)$$

设电路的冲激响应为$h(t)$，则有

$$h'(t)+2h(t)=\delta'(t)$$

设

$$h_1'(t)+2h_1(t)=\delta(t)$$

则得

$$\begin{cases}h_1'(t)+2h_1(t)=0,t>0\\h_1(0_+)=1\end{cases}$$

$$\lambda+2=0$$

$$\lambda=-2$$

$$h_1(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t},t>0$$

$$h_1(0_+)=C_1=1$$

即

$$h_1(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2t},t>0\\0\quad,t<0\end{cases}=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

$$h(t)=h_1'(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)+\delta(t)$$

电路的阶跃响应$g(t)$

$$g(t)=h(t)*u(t)=[-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)+\delta(t)]*u(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)*u(t)+\delta(t)*u(t)$$

$$=-2\times\frac{\mathrm{e}^{-2t}-1}{-2-0}u(t)+u(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)-u(t)+u(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

12．如图 3.7 所示的电路，已知$i_S(t)=u(t)A$，$L=0.2\mathrm{H}$，$C=1\mathrm{F}$，$R=0.5\Omega$，输出为$i_L(t)$，求其冲激响应和阶跃响应。

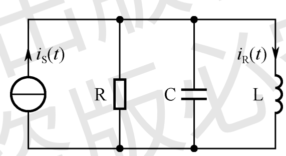


图 3.7

解

分析电路如图 3.8 所示。

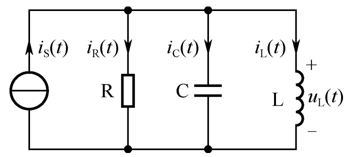


图 3.8

由电路写出方程

$$i_R(t)+i_C(t)+i_L(t)=i_S(t)$$

$$i_R(t)=\frac{u_L(t)}{R}=\frac{L}{R}i_L'(t)$$

$$i_C(t)=Cu_L'(t)=LCi_L''(t)$$

整理得

$$LCi_L''(t)+\frac{L}{R}i_L'(t)+i_L(t)=i_S(t)$$

代入电路参数，整理得系统的微分方程

$$i_L''(t)+2i_L'(t)+5i_L(t)=5i_S(t)$$

设电路的冲激响应为 $h(t)$，则有

$$h''(t)+2h'(t)+5h(t)=5\delta(t)$$

则有

$$\begin{cases} h''(t)+2h'(t)+5h(t)=0, t>0 \\ h'(0_+)=5 \\ h(0_+)=0 \end{cases}$$

$$\lambda^2+2\lambda+5=0$$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm j2$$

$$h(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)+D_1\mathrm{e}^{-t}\sin(2t), t>0$$

$$h'(t)=(2D_1-C_1)\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)-(2C_1+D_1)\mathrm{e}^{-t}\sin(2t), t>0$$

$$\begin{cases} h(0_+)=C_1=5 \\ h'(0_+)=2D-C_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=5 \\ D_1=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

即

$$h(t)=\begin{cases} 5\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)+\dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin(2t), t>0 \\ 0 \quad , t<0 \end{cases}=\left[5\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)+\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\right]u(t)$$

电路的阶跃响应 $g(t)$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\left[5\mathrm{e}^{-\tau}\cos(2\tau)+\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-\tau}\sin(2\tau)\right]u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\left\{\int_0^t\left[5\mathrm{e}^{-\tau}\cos(2\tau)+\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-\tau}\sin(2\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\}u(t)$$

$$=\left[\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\tau}\sin(2\tau)-2\mathrm{e}^{-\tau}\cos(2\tau)\right]\Bigg|_o^t u(t)$$

$$=\left[\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)-2\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)+2\right]u(t)$$

13．如图 3.9 所示的系统，试求当输入 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$ 时，系统的零状态响应。

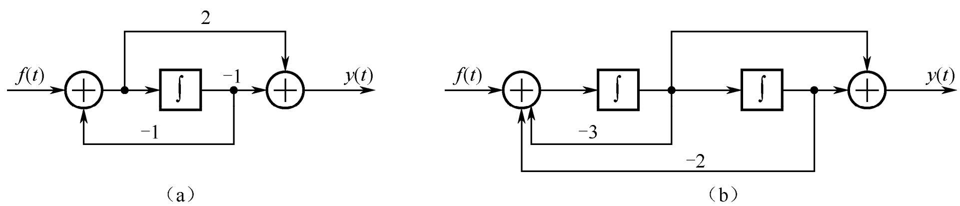


图 3.9

分析

先由系统框图写出系统微分方程，然后求出单位冲激响应，最后由卷积法求出系统的零状态响应。

解

（a）设积分器的输出为 $x(t)$，则有

$$x'(t)=f(t)-x(t)$$

$$x'(t)+x(t)=f(t)$$

$$y(t)=2x'(t)-x(t)$$

$$y'(t)=2x''(t)-x'(t)$$

$$y'(t)+y(t)=2x''(t)-x'(t)+2x'(t)-x(t)=2[x'(t)+x(t)]'-[x'(t)+x(t)]$$

$$y'(t)+y(t)=2f'(t)-f(t)$$

选取中间系统 $y'(t)+y(t)=f(t)$，设其冲激响应为 $h_1(t)$，即

$$h_1'(t)+h_1(t)=\delta(t)$$

且有

$$h_1(0_+)=1$$

$$h_1'(t)+h_1(t)=0,t>0$$

$$\lambda+1=0$$

$$\lambda_1=-1$$

$$h_1(t)=C_1\mathrm{e}^{-t},t>0$$

$$h_1(0_+)=C_1=1$$

$$h_1(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t},t>0\\0\quad,t<0\end{cases}=\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

所求系统的冲激响应可由下式计算出

$$h(t)=2h_1'(t)-h_1(t)=2[\mathrm{e}^{-t}u(t)]'-\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

$$=2[-\mathrm{e}^{-t}u(t)+\mathrm{e}^{-t}\delta(t)]-\mathrm{e}^{-t}u(t)=2\delta(t)-3\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(t) &= f(t)*h(t) = e^{-t}u(t)*[2\delta(t)-3e^{-t}u(t)] \\
&= e^{-t}u(t)*2\delta(t) - e^{-t}u(t)*3e^{-t}u(t) \\
&= 2e^{-t}u(t) - 3te^{-t}u(t)
\end{aligned}
$$

（b）设最后一个积分器的输出为 $x(t)$，则有

$$x''(t) = f(t) - 3x'(t) - 2x(t)$$

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = f(t)$$

$$y(t) = x'(t) + x(t)$$

$$y'(t) = x''(t) + x'(t)$$

$$y''(t) = x'''(t) + x''(t)$$

$$
\begin{aligned}
y''(t)+3y'(t)+2y(t) &= [x'''(t)+x''(t)] + 3[x''(t)+x'(t)] + 2[x'(t)+x(t)] \\
&= [x'''(t)+3x''(t)+2x'(t)] + [x''(t)+3x'(t)+2x(t)] \\
&= f'(t) + f(t)
\end{aligned}
$$

选取中间系统 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$，设其冲激响应为 $h_1(t)$，即

$$h_1''(t) + 3h_1'(t) + 2h_1(t) = \delta(t)$$

且有

$$h_1'(0_+) = 1, h_1(0_+) = 0$$

$$h_1''(t) + 3h_1'(t) + 2h_1(t) = 0, t > 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$h_1(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}, t > 0$$

$$h_1'(t) = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-t}, t > 0$$

$$
\begin{cases}
h_1(0_+) = C_1 + C_2 = 0 \\
h_1'(0_+) = -C_1 - 2C_2 = 1
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
C_1 = 1 \\
C_2 = -1
\end{cases}
$$

$$
h_1(t) = \begin{cases}
e^{-t} - e^{-2t}, & t > 0 \\
0, & t < 0
\end{cases} = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)
$$

所求系统的冲激响应可由下式计算得出

$$
\begin{aligned}
h(t) &= h_1'(t) + h_1(t) = [(e^{-t} - e^{-2t})u(t)]' + (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \\
&= [(-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta(t)] + (e^{-t} - e^{-2t})u(t) = e^{-2t}u(t)
\end{aligned}
$$

$$y_{zs}(t) = f(t)*h(t) = e^{-t}u(t)*e^{-2t}u(t) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{(-1)-(-2)}u(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

14．求下列差分方程的解。

（1） $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 0$，$y(0) = 1$ （2） $y(n) - 2y(n-1) = 0$，$y(0) = 2$

（3） $y(n) + 3y(n-1) = 0$，$y(1) = 1$ （4） $y(n) + \frac{1}{3}y(n-1) = 0$，$y(-1) = -1$

分析

本题求零输入响应，只有齐次解。

解

（1）$1-\frac{1}{2}\lambda^{-1}=0$

$\lambda=\frac{1}{2}$

$y(n)=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$y(0)=C_1=1$

$y(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

（2）$1-2\lambda^{-1}=0$

$\lambda=2$

$y(n)=C_1 2^n$

$y(0)=C_1=2$

$y(n)=2\times 2^n=2^{n+1}$

（3）$1+3\lambda^{-1}=0$

$\lambda=-3$

$y(n)=C_1(-3)^n$

$y(1)=-3C_1=1$

$C_1=-\frac{1}{3}$

$y(n)=-\frac{1}{3}\times(-3)^n=(-3)^{n-1}$

（4）$1+\frac{1}{3}\lambda^{-1}=0$

$\lambda=-\frac{1}{3}$

$y(n)=C_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$y(-1)=-3C_1=-1$

$C_1=\frac{1}{3}$

$y(n)=\frac{(-3)^n}{3}$

15．求下列差分方程的解。

（1）$y(n)-7y(n-1)+16y(n-2)-12y(n-3)=0$，$y(0)=0$，$y(1)=-1$，$y(2)=-3$

（2）$y(n)-2y(n-1)+2y(n-2)-2y(n-3)+y(n-4)=0$，$y(0)=0$，$y(1)=1$，$y(2)=2$，$y(3)=5$

（3）$y(n)+6y(n-1)+9y(n-2)=[3^n+(-2)^n]u(n)$，$y(-1)=0$，$y(-2)=1$

解

（1）$1-7\lambda^{-1}+16\lambda^{-2}-12\lambda^{-3}=0$

$$\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0$$

$$(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0$$

$$\lambda_{1,2}=2，\ \lambda_3=3$$

$$y(n)=(C_1n+C_0)2^n+D_13^n$$

$$\begin{cases} y(0)=C_0+D_1=0 \\ y(1)=2(C_1+C_0)+3D_1=-1 \\ y(n)=4(2C_1+C_0)+9D_1=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_0=-1 \\ C_1=-1 \\ D_1=1 \end{cases}$$

即

$$y(n)=-(n+1)2^n+3^n$$

（2）$1-2\lambda^{-1}+2\lambda^{-2}-2\lambda^{-3}+\lambda^{-4}=0$

$$\lambda^4-2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+1=0$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda^2+1)=0$$

$$\lambda_{1,2}=1，\ \lambda_3=\mathrm{j}，\ \lambda_4=-\mathrm{j}$$

$$y(n)=(C_1n+C_0)+(\sqrt{2})^n\left[D_1\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+D_2\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]$$

$$\begin{cases} y(0)=C_0+D_1=0 \\ y(1)=C_1+C_0+\sqrt{2}\left[D_1\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+D_2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=1 \\ y(2)=2C_1+C_0+2\left[D_1\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+D_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=2 \\ y(3)=3C_1+C_0+(\sqrt{2})^3\left[D_1\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+D_2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=3 \\ C_0=0 \\ D_1=0 \\ D_2=-2 \end{cases}$$

即

$$y(n)=3n-2(\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

（3）求零输入响应

$$1+6\lambda^{-1}+9\lambda^{-2}=0$$

$$\lambda^2+6\lambda+9=0$$

$$\lambda_{1,2}=-3$$

$$y_{\mathrm{zi}}(n)=(C_1n+C_0)(-3)^n$$

$$\begin{cases} y_{zi}(-1)=y(-1)=-\dfrac{1}{3}(-C_1+C_0)=0 \\ y_{zi}(-2)=y(-2)=\dfrac{1}{9}(-2C_1+C_0)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=-9 \\ C_0=-9 \end{cases}$$

$$y_{zi}(n)=-(9n+9)(-3)^n=-(n+1)(-3)^{n+2}$$

求系统 $y(n)+6y(n-1)+9f(n-2)=f(n)$ 的单位序列响应 $h(n)$

$$h(n)+6h(n-1)+9h(n-2)=\delta(n)$$

$$h(n)=\delta(n)-6h(n-1)-9h(n-2)$$

$$h(0)=\delta(0)-6h(-1)-9h(-2)=1$$

$$h(1)=\delta(1)-6h(0)-9h(-1)=-6$$

即

$$\begin{cases} h(n)+6h(n-1)+9h(n-2)=0, n>0 \\ h(0)=1 \\ h(1)=-6 \end{cases}$$

$$h(n)=(D_1n+D_0)(-3)^n$$

$$\begin{cases} h(0)=D_0=1 \\ h(1)=-3(D_1+D_0)=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_0=1 \\ D_1=1 \end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases} (n+1)(-3)^n, & n\geqslant 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}=(n+1)(-3)^n u(n)$$

求零状态响应

$$\begin{aligned} y_{zs}(n)&=f(n)*h(n)=\{[3^n+(-2)^n]u(n)\}*[(n+1)(-3)^n u(n)] \\ &=-\frac{11}{4}n(-3)^{n-1}u(n)-\frac{13}{4}(-3)^n u(n)+3^{n-1}u(n)+4(-2)^n u(n) \\ &=\left(\frac{11}{12}n-\frac{13}{4}\right)(-3)^n u(n)+3^{n-1}u(n)+4(-2)^n u(n) \end{aligned}$$

求全响应

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=-\left(\frac{97}{12}n+\frac{49}{4}\right)(-3)^n u(n)+3^{n-1}u(n)+4(-2)^n u(n)$$

16．求下列各差分方程所描述的 LTI 离散系统的零输入响应。

（1）$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)$，$y(-1)=0$，$y(-2)=1$

（2）$y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=f(n)-f(n-1)$，$y(-1)=1$，$y(-2)=-3$

（3）$y(n)+y(n-2)=f(n-2)$，$y(-1)=-2$，$y(-2)=-1$

解

（1）$y_{zi}(n)+3y_{zi}(n-1)+2y_{zi}(n-2)=0$

$$1+3\lambda^{-1}+2\lambda^{-2}=0$$

$\lambda^2+3\lambda+2=0$

$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

$y_{zi}(n)=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n$

$$\begin{cases}y_{zi}(-1)=y(-1)=-C_1-\dfrac{1}{2}C_2=0\\ y_{zi}(-2)=y(-2)=C_1+\dfrac{1}{4}C_2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_1=2\\ C_2=-4\end{cases}$$

即

$y_{zi}(n)=2(-1)^n-4(-2)^n,n\geqslant 0$

（2）$y_{zi}(n)+2y_{zi}(n-1)+y_{zi}(n-2)=0$

$1+2\lambda^{-1}+\lambda^{-2}=0$

$\lambda^2+2\lambda+1=0$

$\lambda_{1,2}=-1$

$y_{zi}(n)=(C_1n+C_0)(-1)^n$

$$\begin{cases}y_{zi}(-1)=y(-1)=C_1-C_0=1\\ y_{zi}(-2)=y(-2)=-2C_1+C_0=-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_1=2\\ C_0=1\end{cases}$$

即

$y_{zi}(n)=(2n+1)(-1)^n,n\geqslant 0$

（3）$1+\lambda^{-2}=0$

$\lambda^2+1=0$

$\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{j}$

$$y_{zi}(n)=C\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+D\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$\begin{cases}y_{zi}(-1)=y(-1)=-D=-2\\ y_{zi}(-2)=y(-2)=-C=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=1\\ D=2\end{cases}$$

即

$$y_{zi}(n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right),n\geqslant 0$$

17．求下列各差分方程所描述的离散系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

（1）$y(n)-2y(n-1)=f(n)$， $f(n)=2u(n)$，$y(-1)=-1$

（2）$y(n)+2y(n-1)=f(n)$， $f(n)=2^n u(n)$，$y(-1)=1$

（3）$y(n)+2y(n-1)=f(n)$， $f(n)=(3n+4)u(n)$，$y(-1)=-1$

（4）$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)$， $f(n)=u(n)$，$y(-1)=1$，$y(-2)=0$

（5） $y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=f(n)$， $f(n)=3(0.5)^n u(n)$，$y(-1)=3$，$y(-2)=-5$

解

（1）零输入响应 $y_{zi}(n)$ 满足

$$y_{zi}(n)-2y_{zi}(n-1)=0$$

特征根 $\lambda=2$，可设

$$y_{zi}(n)=C_1 2^n$$

将初始状态 $y_{zi}(-1)=y(-1)=-1$ 代入，可得

$$y_{zi}(-1)=\frac{C_1}{2}=-1$$

解得 $C_1=-2$，即

$$y_{zi}(n)=2^{n+1}, n\geqslant 0$$

零状态响应满足

$$y_{zs}(n)-2y_{zs}(n-1)=2, n\geqslant 0$$
$$y_{zs}(-1)=0$$

令 $n=0$，可得

$$y_{zs}(0)=2+2y_{zs}(-1)=2$$

零状态响应为非齐次方程的解，故

$$y_{zs}(n)=y_{zsh}(n)+y_{zsp}(n), n\geqslant 0$$

其中齐次解

$$y_{zsh}(n)=C_2 2^n$$

设特解

$$y_{zsp}(n)=P$$

将上式代入非齐次方程，得

$$P-2P=2$$

即

$$P=-2$$

故

$$y_{zs}(n)=C_2 2^n-2, n\geqslant 0$$

将初始值 $y_{zs}(0)=2$ 代入上式，得

$$y_{zs}(0)=C_2-2=2$$

解得

$$C_2=4$$

即

$$y_{zs}(n)=4\times 2^n-2=2^{n+2}-2, n\geqslant 0$$
$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=2^{n+1}+2^{n+2}-2=2^{n+1}-2, n\geqslant 0$$

（2）零输入响应 $y_{zi}(n)$ 满足

$$y_{zi}(n)+2y_{zi}(n-1)=0$$

特征根 $\lambda=-2$，可设

$$y_{zi}(n)=C_1(-2)^n$$

将初始状态 $y_{zi}(-1)=y(-1)=1$ 代入，可得

$$y_{zi}(-1)=-\frac{C_1}{2}=1$$

解得 $C_1=-2$，即

$$y_{zi}(n)=(-2)^{n+1}, n\geqslant 0$$

零状态响应满足

$$y_{zs}(n)+2y_{zs}(n-1)=2^n, n\geqslant 0$$
$$y_{zs}(-1)=0$$

令 $n=0$，可得

$$y_{zs}(0)=2^0-2y_{zs}(-1)=1$$

零状态响应为非齐次方程的解，故

$$y_{zs}(n)=y_{zsh}(n)+y_{zsp}(n), n\geqslant 0$$

其中齐次解

$$y_{zsh}(n)=C_2(-2)^n$$

设特解

$$y_{zsp}(n)=P(2)^n$$

将上式代入非齐次方程，得

$$P(2)^n+2P(2)^{n-1}=2^n$$

即

$$P=\frac{1}{2}$$

故

$$y_{zsp}(n)=\frac{1}{2}2^n=2^{n-1}$$
$$y_{zs}(n)=C_2(-2)^n+2^{n-1}, n\geqslant 0$$

将初始值 $y_{zs}(0)=1$ 代入上式，得

$$y_{zs}(0)=C_2+\frac{1}{2}=1$$

解得

$$C_2=\frac{1}{2}$$

即

$$y_{zs}(n)=\frac{1}{2}(-2)^n+2^{n-1}=2^{n-1}-(-2)^{n-1}, n\geqslant 0$$
$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=(-2)^{n+1}+2^{n-1}-(-2)^{n-1}=2^{n-1}+\frac{3}{2}(-2)^{n-1}$$

（3）零输入响应 $y_{zi}(n)$ 满足

$$y_{zi}(n)+2y_{zi}(n-1)=0$$

特征根 $\lambda=-2$，可设

$$y_{zi}(n)=C_1(-2)^n$$

将初始状态 $y_{zi}(-1)=y(-1)=-1$ 代入，可得

$$y_{zi}(-1)=\frac{C_1}{2}=-1$$

可解得 $C_1=2$，即

$$y_{zi}(n)=2(-2)^n, n\geqslant 0$$

零状态响应满足

$$y_{zs}(n)+2y_{zs}(n-1)=3n+4, n\geqslant 0$$
$$y_{zs}(-1)=0$$

令 $n=0$，可得

$$y_{zs}(0)=4-2y_{zs}(-1)=4$$

零状态响应为非齐次方程的解，故

$$y_{zs}(n)=y_{zsh}(n)+y_{zsp}(n), n\geqslant 0$$

其中齐次解

$$y_{zsh}(n)=C_2(-2)^n$$

设特解

$$y_{zsp}(n)=P_1 n+P_0$$

将上式代入非齐次方程，得

$$(P_1 n+P_0)+2[P_1(n-1)+P_0]=3n+4$$

比较系数，解得

$$P_1=1, P_0=2$$

故

$$y_{zs}(n)=C_2(-2)^n+n+2, n\geqslant 0$$

将初始值 $y_{zs}(0)=4$ 代入上式，得

$$y_{zs}(0)=C_2+2=4$$

解得

$$C_2=2$$

即

$$y_{zs}(n)=2(-2)^n+n+2, n\geqslant 0$$
$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=2(-2)^n+2(-2)^n+n+2=4(-2)^n+n+2, n\geqslant 0$$

（4）零输入响应 $y_{zi}(n)$ 满足

$$y_{zi}(n)+3y_{zi}(n-1)+2y_{zi}(n-2)=0$$

特征根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_1=-2$，可设

$$y_{zi}(n)=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n$$

将初始状态 $y_{zi}(-1)=y(-1)=1$，$y_{zi}(-2)=y(-2)=0$ 代入，可得

$$\begin{cases} y_{zi}(-1)=-C_1-\dfrac{1}{2}C_2=1 \\ y_{zi}(-2)=C_1+\dfrac{1}{4}C_2=0 \end{cases}$$

可解得 $C_1=1$，$C_2=-4$，即

$$y_{zi}(n)=(-1)^n-4(-2)^n, n\geqslant 0$$

零状态响应满足

$$y_{zs}(n)+3y_{zs}(n-1)+2y_{zs}(n-2)=1, n\geqslant 0$$

$$y_{zs}(-1)=0, y(-2)=0$$

令 $n=0$，可得

$$y_{zs}(0)=1-3y_{zs}(-1)-2y_{zs}(-2)=1$$

令 $n=1$，可得

$$y_{zs}(1)=1-3y_{zs}(0)-2y_{zs}(-1)=-2$$

零状态响应为非齐次方程的解，故

$$y_{zs}(n)=y_{zsh}(n)+y_{zsp}(n), n\geqslant 0$$

其中齐次解

$$y_{zsh}(n)=C_3(-1)^n+C_4(-2)^n$$

设特解

$$y_{zsp}(n)=P$$

将上式代入非齐次方程，得

$$P+3P+2P=1$$

比较系数，解得

$$P=\frac{1}{6}$$

故

$$y_{zs}(n)=C_3(-1)^n+C_4(-2)^n+\frac{1}{6}, n\geqslant 0$$

将初始值 $y_{zs}(0)=1$， $y_{zs}(1)=-2$ 代入上式，得

$$\begin{cases} y_{zs}(0)=C_3+C_4+\dfrac{1}{6}=1 \\ y_{zs}(1)=-C_3-2C_4+\dfrac{1}{6}=-2 \end{cases}$$

解得

$$C_3=-\frac{1}{2}，\quad C_3=\frac{4}{3}$$

即

$$y_{zs}(n)=-\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{4}{3}(-2)^n+\frac{1}{6}, n\geqslant 0$$

$$\begin{aligned} y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)&=(-1)^n-4(-2)^n-\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{4}{3}(-2)^n+\frac{1}{6} \\ &=\frac{1}{2}(-1)^n-\frac{8}{3}(-3)^n+\frac{1}{6}, n\geqslant 0 \end{aligned}$$

（5）零输入响应 $y_{zi}(n)$ 满足

$$y_{zi}(n)+2y_{zi}(n-1)+y_{zi}(n-2)=0$$

特征根 $\lambda_{1,2}=-1$，可设

$$y_{zi}(n)=(C_1n+C_0)(-1)^n$$

将初始状态 $y_{zi}(-1)=y(-1)=3$， $y_{zi}(-2)=y(-2)=-5$ 代入，可得

$$\begin{cases} y_{zi}(-1)=C_1-C_0=3 \\ y_{zi}(-2)=-2C_1+C_0=-5 \end{cases}$$

可解得 $C_1=2$， $C_0=-1$ 即

$$y_{zi}(n)=(2n-1)(-1)^n, n\geqslant 0$$

零状态响应满足

$$y_{zs}(n)+2y_{zs}(n-1)+y_{zs}(n-2)=\frac{3}{2^n}, n\geqslant 0$$

$$y_{zs}(-1)=0,\ y(-2)=0$$

令 $n=0$，可得

$$y_{zs}(0)=3-2y_{zs}(-1)-y_{zs}(-2)=3$$

令 $n=1$，可得

$$y_{zs}(1)=\frac{3}{2}-2y_{zs}(0)-y_{zs}(-1)=-\frac{9}{2}$$

零状态响应为非齐次方程的解，故

$$y_{zs}(n)=y_{zsh}(n)+y_{zsp}(n), n\geqslant 0$$

其中齐次解

$$y_{zsh}(n)=(C_3 n+C_4)(-1)^n$$

设特解

$$y_{zsp}(n)=\frac{P}{2^n}$$

将上式代入非齐次方程，得

$$\frac{P}{2^n}+\frac{2P}{2^{n-1}}+\frac{P}{2^{n-2}}=\frac{3}{2^n}$$

比较系数，解得

$$P=\frac{1}{3}$$

故

$$y_{zs}(n)=(C_3 n+C_2)(-1)^n+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^n}, n\geqslant 0$$

将初始值 $y_{zs}(0)=3$， $y_{zs}(1)=-\dfrac{9}{2}$ 代入上式，得

$$\begin{cases} y_{zs}(0)=C_2+\dfrac{1}{3}=3 \\ y_{zs}(1)=-(C_3+C_2)+\dfrac{1}{6}=-\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

解得

$$C_2=\frac{8}{3},\quad C_3=2$$

即

$$y_{zs}(n)=\left(2n+\frac{8}{3}\right)(-1)^n+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^n}, n\geqslant 0$$

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=(2n-1)(-1)^n+\left(2n+\frac{8}{3}\right)(-1)^n+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^n}$$

$$=\left(4n+\frac{5}{3}\right)(-1)^n+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^n},n\geqslant 0$$

18．求下列各差分方程所描述的离散系统的单位序列响应。

（1） $y(n)+2y(n-1)=f(n-1)$　　（2） $y(n)-y(n-2)=f(n)$

（3） $y(n)+y(n-1)+\frac{1}{4}y(n-2)=f(n)$　　（4） $y(n)+4y(n-2)=f(n)$

（5） $y(n)-4y(n-1)+8y(n-2)=f(n)$

解

（1）取中间系统 $y(n)+2y(n-1)=f(n)$，设其冲激响应为 $h_1(n)$，即

$$h_1(n)+2h_1(n-1)=\delta(n)$$

$$h_1(n)+2h_1(n-1)=0,n>0$$

$$1+2\lambda^{-1}=0$$

$$\lambda+2=0$$

$$\lambda=-2$$

$$h_1(n)=C_1(-2)^n,n>0$$

由迭代法可知

$$h_1(0)=\delta(0)-2h_1(-1)=1-2\cdot 0=1$$

$$h_1(1)=\delta(1)-2h_1(0)=0-2\cdot 1=-2$$

由 $h_1(0)=C_1=1$ 或 $h_1(1)=-2C_1=-2$，可得

$$C_1=1$$

$$h_1(n)=(-2)^n,n\geqslant 0$$

$$h_1(n)=\begin{cases}(-2)^n,n\geqslant 0\\0\quad\quad,n<0\end{cases}=(-2)^n u(n)$$

所求系统的冲激相应可由下式计算得出

$$h(n)=h_1(n-1)=(-2)^{n-1}u(n-1)$$

（2） $h(n)-h(n-2)=\delta(n)$

$h(n)-h(n-2)=0,n>0$

$1-\lambda^{-2}=0$

$\lambda^2-1=0$

$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$

$h_1(n)=C_1+C_2(-1)^n,n>0$

由迭代法可知

$$h(0)=\delta(0)+h(-2)=1+0=1$$

$$h(1)=\delta(1)+h(-1)=0+0=0$$

$$\begin{cases}h(0)=C_1+C_2=1\\h(1)=C_1-C_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2} \\ C_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{2}, n \geqslant 0 \\ 0 \qquad\quad , n < 0 \end{cases} = \left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\right] u(n)$$

（3）$h(n) + h(n-1) + \dfrac{1}{4}h(n-2) = \delta(n)$

$$h(n) + h(n-1) + \frac{1}{4}h(n-2) = 0, n > 0$$

$$1 + \lambda^{-1} + \frac{1}{4}\lambda^{-2} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$$

$$h(n) = (C_1 n + C_0)\left(-\frac{1}{2}\right)^n, n > 0$$

由迭代法可知

$$h(0) = \delta(0) - h(-1) - \frac{1}{4}h(-2) = 1 - 0 - \frac{1}{4} \times 0 = 1$$

$$h(1) = \delta(1) - h(0) - \frac{1}{4}h(-1) = 0 - 1 - \frac{1}{4} \times 0 = -1$$

$$\begin{cases} h(0) = C_0 = 1 \\ h(1) = (C_1 + C_0)\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} (n+1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n, n \geqslant 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad , n < 0 \end{cases} = (n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

（4）$h(n) + 4h(n-2) = \delta(n)$

$$h(n) + 4h(n-2) = 0, n > 0$$

$$1 + 4\lambda^{-2} = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{j}2$$

$$h(n) = 2^n\left[C\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + D\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right], n > 0$$

由迭代法可知

$$h(0) = \delta(0) - 4h(-2) = 1 - 4 \times 0 = 1$$

$$h(1)=\delta(1)-4h(-1)=0-4\times0=0$$

$$\begin{cases}h(0)=C=1\\h(1)=2D=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C=1\\D=0\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}2^n\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right),n\geqslant0\\0\qquad\qquad\quad,n<0\end{cases}=2^n\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)u(n)$$

（5） $h(n)-4h(n-1)+8h(n-2)=\delta(n)$

$$h(n)-4h(n-1)+8h(n-2)=0,n>0$$

$$1-4\lambda^{-1}+8\lambda^{-2}=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+8=0$$

$$\lambda_{1,2}=2\pm \mathrm{j}2=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

$$h(n)=(2\sqrt{2})^n\left[C\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+D\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right],n>0$$

由迭代法可知

$$h(0)=\delta(0)+4h(-1)-8h(-2)=1+4\times0-8\times0=1$$

$$h(1)=\delta(1)+4h(0)-8h(-1)=0+4\times1-8\times0=4$$

$$\begin{cases}h(0)=C=1\\h(1)=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}C+\dfrac{\sqrt{2}}{2}D\right)=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C=1\\D=1\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}(2\sqrt{2})^n\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)\right],n\geqslant0\\0\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad,n<0\end{cases}$$

$$=(2\sqrt{2})^n\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]u(n)$$

19．求图 3.10 所示各系统的单位序列响应。

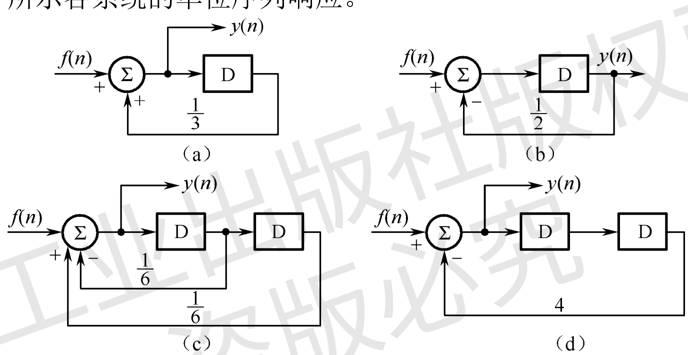


图 3.10

分析

先由系统框图写出差分方程，然后求单位序列响应。

解

（a）根据框图，可写出

$$y(n)=f(n)+\frac{1}{3}y(n-1)$$

整理得系统的差分方程

$$y(n)-\frac{1}{3}y(n-1)=f(n)$$

单位序列响应 $h(n)$ 满足

$$\begin{cases}h(n)-\frac{1}{3}h(n-1)=\delta(n)\\h(-1)=0\end{cases}$$

令 $n=1$，可得

$$h(0)=\delta(0)+\frac{1}{3}h(-1)=1$$

由特征方程

$$1-\frac{1}{3}\lambda^{-1}=0$$

求解得特征根

$$\lambda=\frac{1}{3}$$

可得

$$h(n)=C_1\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

将初始值 $h(0)=1$ 代入上式，得

$$h(0)=C_1=1$$

解得

$$C_1=1$$

故得

$$h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

（b）根据框图，可写出

$$y(n+1)=f(n)-\frac{1}{2}y(n)$$

整理得系统的差分方程

$$y(n+1)+\frac{1}{2}y(n)=f(n)$$

单位序列响应 $h(n)$ 满足

$$\begin{cases} h(n+1)+\frac{1}{2}h(n)=\delta(n) \\ h(-1)=0 \end{cases}$$

令 $n=-1$，可得

$$h(0)=\delta(-1)-\frac{1}{2}h(-1)=0$$

令 $n=0$，可得

$$h(1)=\delta(0)-\frac{1}{2}h(0)=1$$

由特征方程

$$\lambda+\frac{1}{2}=0$$

求解得特征根

$$\lambda=-\frac{1}{2}$$

可得

$$h(n)=C_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n, n>0$$

将初始值 $h(1)=1$ 代入上式，得

$$h(1)=-\frac{1}{2}C_1=1$$

解得

$$C_1=-2$$

考虑到 $h(0)=0$，故得系统的单位序列响应为

$$h(n)=-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

（c）根据框图，可写出

$$y(n)=f(n)-\frac{1}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)$$

整理得系统的差分方程

$$y(n)+\frac{1}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)=f(n)$$

单位序列响应 $h(n)$ 满足

$$\begin{cases} h(n)+\frac{1}{6}h(n-1)-\frac{1}{6}h(n-2)=\delta(n) \\ h(-1)=0, h(-2)=0 \end{cases}$$

令 $n=0$，可得

$$h(0)=\delta(0)-\frac{1}{6}h(-1)+\frac{1}{6}h(-2)=1$$

令 $n=1$，可得

$$h(1)=\delta(1)-\frac{1}{6}h(0)+\frac{1}{6}h(-1)=-\frac{1}{6}$$

由特征方程

$$1+\frac{1}{6}\lambda^{-1}-\frac{1}{6}\lambda^{-2}=0$$

求解得特征根

$$\lambda_1=-\frac{1}{2},\ \lambda_2=\frac{1}{3}$$

可得

$$h(n)=\left[C_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$$

将初始值 $h(0)=1$， $h(1)=-\frac{1}{6}$ 代入上式，得

$$\begin{cases}h(0)=C_1+C_2=1\\ h(1)=-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2=-\frac{1}{6}\end{cases}$$

解得

$$C_1=\frac{3}{5},\quad C_2=\frac{2}{5}$$

故得

$$h(n)=\left[\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$$

（d）根据框图，可写出

$$y(n)=f(n)-4y(n-2)$$

整理得系统的差分方程

$$y(n)+4y(n-2)=f(n)$$

单位序列响应 $h(n)$ 满足

$$\begin{cases}h(n)+4h(n-2)=\delta(n)\\ h(-1)=0,h(-2)=0\end{cases}$$

令 $n=0$，可得

$$h(0)=\delta(0)-4h(-2)=1$$

令 $n=1$，可得

$$h(1)=\delta(1)-4h(-1)=0$$

由特征方程

$$1+4\lambda^{-2}=0$$

求解得特征根

$$\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{j}2=2\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

可得

$$h(n)=2^n\left[C\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+D\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]u(n)$$

将初始值 $h(0)=1$， $h(1)=0$ 代入上式，得

$$\begin{cases}h(0)=C=1\\h(1)=2D=0\end{cases}$$

解得

$$C=1,\quad D=0$$

故得

$$h(n)=2^n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u(n)$$

20．求下列系统的单位序列响应 $h(n)$ 和单位阶跃响应 $g(n)$ 。

（1） $y(n)=f(n)-2f(n-1)$

（2） $y(n)+2y(n-1)=f(n)+f(n-1)$

（3） $y(n)-\frac{1}{2}y(n-2)=2f(n)+f(n-2)$

（4） $y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)-f(n-1)$

分析

先求系统的单位序列响应 $h(n)$ ，然后根据单位阶跃响应与单位序列响应的关系 $g(n)=h(n)*u(n)$ 求出单位阶跃响应 $g(n)$ 。

解

（1）根据单位序列响应的定义，得

$$h(n)=\delta(n)-2\delta(n-1)$$

单位阶跃响应为

$$g(n)=h(n)*u(n)=[\delta(n)-2\delta(n-1)]*u(n)=u(n)-2u(n-1)$$

（2）假设中间系统 $y(n)+2y(n-1)=f(n)$ 的单位脉冲响应为 $h_1(n)$ ，则有

$$\begin{cases}h_1(n)+2h_1(n-1)=\delta(n)\\h_1(-1)=0\end{cases}$$

令 $n=0$ ，可得

$$h_1(0)=\delta(0)-2h_1(-1)=1$$

写出特征方程

$$1+2\lambda^{-1}=0$$

可得特征根为

$$\lambda=-2$$

则

$$h_1(n)=C_1(-2)^n u(n)$$

将初始值 $h_1(0)=1$ 代入上式，得

$$h_1(0)=C_1=1$$

解得

$$C_1=1$$

故得

$$h_1(n)=(-2)^n u(n)$$

则所求系统的单位冲激响应为

$$h(n)=h_1(n)+h_1(n-1)=(-2)^n u(n)+(-2)^{n-1}u(n-1)$$

单位阶跃响应为

$$\begin{aligned}g(n)=h(n)*u(n)&=[(-2)^n u(n)+(-2)^{n-1}u(n-1)]*u(n)\\&=\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)}u(n)+\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}u(n-1)=\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}u(n)+\frac{1-(-2)^n}{3}u(n)\\&=\left[\frac{2}{3}+\frac{(-2)^n}{3}\right]u(n)\end{aligned}$$

（3）假设中间系统 $y(n)-\frac{1}{2}y(n-2)=f(n)$ 的单位脉冲响应为 $h_1(n)$，则有

$$\begin{cases}h_1(n)-\frac{1}{2}h_1(n-2)=\delta(n)\\h_1(-1)=0,h_1(-2)=0\end{cases}$$

令 $n=0$，可得

$$h_1(0)=\delta(0)+\frac{1}{2}h_1(-2)=1$$

令 $n=1$，可得

$$h_1(1)=\delta(1)+\frac{1}{2}h_1(-1)=0$$

写出特征方程

$$1-\frac{1}{2}\lambda^{-2}=0$$

可得特征根为

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

则

$$h_1(n)=\left[C_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+C_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]u(n)$$

将初始值 $h_1(0)=1$， $h_1(1)=0$ 代入上式，得

$$\begin{cases}h_1(0)=C_1+C_2=1\\h_1(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}C_1-\frac{\sqrt{2}}{2}C_2=0\end{cases}$$

解得

$$C_1=\frac{1}{2}，\quad C_2=\frac{1}{2}$$

故得

$$h_1(n)=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]u(n)$$

则所求系统的单位冲激响应为

$$\begin{aligned}h(n)&=2h_1(n)+h_1(n-2)\\&=2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]u(n)+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}\right]u(n-2)\\&=\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]u(n)+\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]u(n-2)\\&=\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]u(n)-2\delta(n)\end{aligned}$$

单位阶跃响应为

$$\begin{aligned}g(n)=h(n)*u(n)&=\left\{\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]u(n)-2\delta(n)\right\}*u(n)\\&=2\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}u(n)+2\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}u(n)-2u(n)\\&=4\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{2-\sqrt{2}}u(n)+4\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{2}}u(n)-2u(n)\end{aligned}$$

（4）假设中间系统 $y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)$ 的单位脉冲响应为 $h_1(n)$，则有

$$\begin{cases}h_1(n)-3h_1(n-1)+2h_1(n-2)=\delta(n)\\h_1(-1)=0,h_1(-2)=0\end{cases}$$

令 $n=0$，可得

$$h_1(0)=\delta(0)+3h_1(-1)-2h_1(-2)=1$$

令 $n=1$，可得

$$h_1(1)=\delta(1)+3h_1(0)-2h_1(-1)=3$$

写出特征方程

$$1-3\lambda^{-1}+2\lambda^{-2}=0$$

可得特征根为

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2$$

则

$$h_1(n)=(C_1+2^nC_2)u(n)$$

将初始值 $h_1(0)=1$，$h_1(1)=3$ 代入上式，得

$$\begin{cases} h_1(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ h_1(1) = C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases}$$

解得

$$C_1 = 1，\quad C_2 = 1$$

故得

$$h_1(n) = (1 + 2^n)u(n)$$

则所求系统的单位冲激响应为

$$\begin{aligned} h(n) &= h_1(n) - h_1(n-1) \\ &= (1+2^n)u(n) - (1+2^{n-1})u(n-1) \\ &= (1+2^n)u(n) - \left(1 + \frac{2^n}{2}\right)u(n) + \frac{3}{2}\delta(n) \\ &= \frac{2^n}{2}u(n) + \frac{3}{2}\delta(n) \end{aligned}$$

单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} g(n) = h(n) * u(n) &= \left[\frac{2^n}{2}u(n) + \frac{3}{2}\delta(n)\right] * u(n) = \frac{1}{2} \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}u(n) + \frac{3}{2}u(n) \\ &= 2^n u(n) - \frac{1}{2}u(n) + \frac{3}{2}u(n) = (2^n + 1)u(n) \end{aligned}$$

21．某人向银行贷款 10 万元，贷款月利率为 0.5%，从次月起开始向银行每月还款 1000 元，以第 n 个月的欠款 $y(n)$ 建立差分方程，并求此人还清贷款的时间。

解

根据题意，可写出方程

$$y(n) = (1 + 0.005)y(n-1) - 1000$$

即

$$\begin{cases} y(n) - 1.005y(n-1) = -1000 \\ y(-1) = 100000 \end{cases}$$

令 $n = 0$，可得

$$y(0) = -1000 + 1.005y(-1) = 99500$$

写出特征方程

$$1 - 1.005\lambda^{-1} = 0$$

可得特征根为

$$\lambda = 1.005$$

则

$$y_{\mathrm{h}}(n) = C_1 \times 1.005^n, n \geqslant 0$$

设特解为

$$y_{\mathrm{p}}(n) = P$$

代入方程得

$$P - 1.005P = -1000$$

解得

$$P = 200000$$

则得

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = C_1 \times 1.05^n + 200000, n \geqslant 0$$

将初始值 $y(0) = 99500$ 代入上式，得

$$y(0) = C_1 + 200000 = 99500$$

解得

$$C_1 = -100500$$

故得

$$y(n) = 200000 - 100500 \times 1.005^n, n \geqslant 0$$

令 $y(n_0) = 0$，解得

$$n_0 = \log_{1.005}\left(\frac{200000}{100500}\right) \approx 137.98$$

取整数 $n_0 = 138$，即他还清贷款需要 138 个月。

22．银行向个人开放零存整取业务，每月存入 50 元，月利率 0.5%，连续 5 年，以第 n 个月账上金额 $y(n)$ 建立差分方程，并求到期的金额。

解

根据题意，可写出方程

$$y(n) = y(n-1) + 0.005y(n-1) + 50$$

即

$$\begin{cases} y(n) - 1.005y(n-1) = 50 \\ y(0) = 50 \end{cases}$$

写出特征方程

$$1 - 1.005\lambda^{-1} = 0$$

可得特征根为

$$\lambda = 1.005$$

则

$$y_h(n) = C_1 \times 1.005^n, n \geqslant 0$$

设特解为

$$y_p(n) = P$$

代入方程得

$$P - 1.005P = 50$$

解得

$$P = -10000$$

则得

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = C_1 \times 1.05^n - 10000, n \geqslant 0$$

将初始值 $y(0) = 50$ 代入上式，得

$$y(0) = C_1 - 10000 = 50$$

解得

$$C_1 = 10050$$

故得

$$y(n)=10050\times1.005^{n}-10000, n\geqslant 0$$

令 $n=60$，解得

$$y(60)=10050\times1.005^{60}-10000\approx 3555.94$$

即 5 年后到期的金额为3555.94 元。

23．如图 3.11 所示的复合系统，各子系统的单位序列响应为 $h_1(n)=u(n), h_2(n)=u(n-5)$。求复合系统的单位序列响应 $h(n)$。

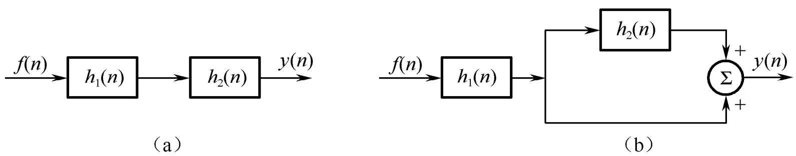


图 3.11

解

（a） $h(n)=h_1(n)*h_2(n)=u(n)*u(n-5)=(n-4)u(n-5)$

（b） $h(n)=h_1(n)*[h_2(n)+\delta(n)]=u(n)*[u(n-5)+\delta(n)]$

$$=u(n)*u(n-5)-u(n)*\delta(n)=(n-4)u(n-5)-u(n)$$

24．如图 3.11（a）所示系统，已知复合系统的 $h(n)$ 如图 3.12 所示。

（1）设 $h_2(n)=u(n)-u(n-2)$，求 $h_1(n)$。

（2）求输入 $f(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$ 时的零状态响应。

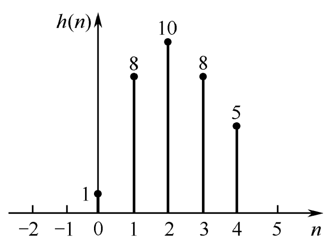


图 3.12

解

（1） $h_2(n)=u(n)-u(n-2)=\delta(n)+\delta(n+1)$

由题意可得

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n)=h_1(n)*[\delta(n)+\delta(n-1)]$$

$$h(n)=\delta(n)+8\delta(n-1)+10\delta(n-2)+8\delta(n-3)+5\delta(n-4)$$

$$=[\delta(n)+7\delta(n-1)+3\delta(n-2)+5\delta(n-3)]*[\delta(n)+\delta(n-1)]$$

对比以上两式，可得

$$h_1(n)=\delta(n)+7\delta(n-1)+3\delta(n-2)+5\delta(n-3)$$

（2） $y_{zs}(n)=f(n)*h(n)$

$$=[\delta(n)+8\delta(n-1)+10\delta(n-2)+8\delta(n-3)+5\delta(n-4)]*[\delta(n)-\delta(n-1)]$$

$$=\delta(n)+8\delta(n-1)+10\delta(n-2)+8\delta(n-3)+5\delta(n-4)-$$

$$\delta(n-1)-8\delta(n-2)-10\delta(n-3)-8\delta(n-4)-5\delta(n-5)$$

$$=\delta(n)+7\delta(n-1)+2\delta(n-2)-2\delta(n-3)-3\delta(n-4)-5\delta(n-5)$$

25．LTI 系统输入 $f(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$，零状态响应 $y_{zs}(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，求单位序列响应 $h(n)$。

解

$$y_{zs}(n)=f(n)*h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)=\left[\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)\right]*\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}(-1)^n\right]u(n)$$

故

$$h(n)=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}(-1)^n\right]u(n)$$

26．系统的差分方程为 $y(n)+5y(n-1)+4y(n-2)=2^n u(n)$，求下列两种情况时的零输入响应、零状态响应和完全响应。

（1） $y(-1)=0$，$y(-2)=1$　　　　（2） $y(0)=0$，$y(1)=1$

解

（1）零输入响应满足如下方程

$$y_{zi}(n)+5y_{zi}(n-1)+4y_{zi}(n-2)=0$$

写出系统特征方程

$$1+5\lambda^{-1}+4\lambda^{-2}=0$$

可求得特征根

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-4$$

可得零输入响应的函数形式如下

$$y_{zi}(n)=C_1(-1)^n+C_2(-4)^n$$

将初始值 $y_{zi}(-1)=y(-1)=0$， $y_{zi}(-2)=y(-2)=1$ 代入上式，得

$$\begin{cases} y_{zi}(-1)=-C_1-\frac{1}{4}C_2=0 \\ y_{zi}(-2)=C_1+\frac{1}{16}C_2=1 \end{cases}$$

解得

$$C_1=\frac{4}{3},\quad C_2=-\frac{16}{3}$$

故

$$y_{zi}(n)=\frac{4}{3}(-1)^n-\frac{16}{3}(-4)^n$$

设系统 $y(n)+5y(n-1)+4y(n-2)=f(n)$ 的单位序列响应为 $h(n)$，则

$$h(n)+5h(n-1)+4h(n-2)=\delta(n)$$
$$h(-1)=0,h(-2)=0$$

令 $n=0$，可得

$$h(0)=\delta(0)-5h(-1)-4h(-2)=1$$

令 $n=1$，可得

$$h(1)=\delta(1)-5h(1)-4h(-)=-5$$

由系统的特征根，可得单位序列响应 $h(n)$ 的函数形式如下

$$h(n)=[D_1(-1)^n+D_2(-4)^n]u(n)$$

将初始值 $h(0)=1$， $h(1)=-5$ 代入上式，得

$$\begin{cases}h(0)=D_1+D_2=1\\h(1)=-D_1-4D_2=-5\end{cases}$$

解得

$$D_1=-\frac{1}{3}，\quad D_2=\frac{4}{3}$$

故得

$$h(n)=\left[-\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{2}{3}(-4)^n\right]u(n)$$

则系统的零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=f(n)*h(n)=2^n u(n)*\left[-\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{2}{3}(-4)^n\right]u(n)\\&=-\frac{2^n}{3}u(n)*(-1)^n u(n)+\frac{2\times 2^n}{3}u(n)*(-4)^n u(n)\\&=-\frac{1}{3}\times\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{2-(-1)}u(n)+\frac{2}{3}\times\frac{2^{n+1}-(-4)^{n+1}}{2-(-4)}u(n)\\&=\left[-\frac{1}{9}(-1)^n+\frac{4}{9}(-4)^n\right]u(n)\end{aligned}$$

系统的全响应为

$$\begin{aligned}y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)&=\left[\frac{4}{3}(-1)^n-\frac{16}{3}(-4)^n\right]u(n)+\left[-\frac{1}{9}(-1)^n+\frac{4}{9}(-4)^n\right]u(n)\\&=\left[\frac{11}{9}(-1)^n-\frac{44}{9}(-4)^n\right]u(n)\end{aligned}$$

（2）零输入响应满足如下方程

$$y_{zi}(n)+5y_{zi}(n-1)+4y_{zi}(n-2)=0$$

写出系统特征方程

$$1+5\lambda^{-1}+4\lambda^{-2}=0$$

可求得特征根

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-4$$

可得零输入响应的函数形式如下

$$y_{zi}(n)=C_1(-1)^n+C_2(-4)^n$$

由（1）小题，已经求得

$$y_{zs}(n)=\left[-\frac{1}{9}(-1)^n+\frac{4}{9}(-4)^n\right]u(n)$$

系统的全响应为

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=[C_1(-1)^n+C_2(-4)^n]u(n)+\left[-\frac{1}{9}(-1)^n+\frac{4}{9}(-4)^n\right]u(n)$$

将初始值 $y(0)=0$， $y(1)=1$ 代入上式，得

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2-\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}=0 \\ y(1)=-C_1-4C_2+\dfrac{1}{9}-\dfrac{16}{9}=1 \end{cases}$$

解得

$$C_1=\frac{4}{9}，\quad C_2=-\frac{7}{9}$$

故

$$y_{zi}(n)=\frac{4}{9}(-1)^n-\frac{7}{9}(-4)^n$$

$$\begin{aligned} y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)&=\left[\frac{4}{9}(-1)^n-\frac{7}{9}(-4)^n\right]u(n)+\left[-\frac{1}{9}(-1)^n+\frac{4}{9}(-4)^n\right]u(n) \\ &=\left[\frac{1}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}(-4)^n\right]u(n) \end{aligned}$$

27．求差分方程 $y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=2^n u(n)$， $y(0)=0$， $y(1)=1$ 的零输入响应、零状态响应和完全响应。

解

零输入响应满足如下方程

$$y_{zi}(n+2)+3y_{zi}(n+1)+2y_{zi}(n)=0$$

写出系统特征方程

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

可求得特征根

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$$

可得零输入响应的函数形式如下

$$y_{zi}(n)=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n$$

设系统 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)$ 的单位序列响应为 $h(n)$，则

$$h(n)+3h(n-1)+2h(n-2)=\delta(n)$$

$$h(-1)=0,h(-2)=0$$

令 $n=0$，可得

$$h(0)=\delta(0)-3h(-1)-2h(-2)=1$$

令 $n=1$，可得

$$h(1)=\delta(1)-3h(1)-2h(-2)=-3$$

由系统的特征根，可得单位序列响应 $h(n)$ 的函数形式如下

$$h(n)=[D_1(-1)^n+D_2(-2)^n]u(n)$$

将初始值 $h(0)=1$， $h(1)=-3$ 代入上式，得

$$\begin{cases} h(0)=D_1+D_2=1 \\ h(1)=-D_1-2D_2=-3 \end{cases}$$

解得

$$D_1=-1，\quad D_2=2$$

故得

$$h(n)=[-(-1)^n+2(-2)^n]u(n)$$

则系统的零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=f(n)*h(n)=2^{n-2}u(n-2)*[-(-1)^n+2(-2)^n]u(n)\\&=-2^{n-2}u(n-2)*(-1)^n u(n)+2(2)^{n-2}u(n-2)*(-2)^n u(n)\end{aligned}$$

由于

$$2^n u(n)*(-1)^n u(n)=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{2-(-1)}u(n)=\frac{2\times2^n+(-1)^n}{3}u(n)$$

$$2^n u(n)*(-2)^n u(n)=\frac{2^{n+1}-(-2)^{n+1}}{2-(-2)}u(n)=\frac{2\times2^n+2(-2)^n}{4}u(n)$$

故

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=-\frac{2\times2^{n-2}+(-1)^{n-2}}{3}u(n-2)+2\times\frac{2\times2^{n-2}+2(-2)^{n-2}}{4}u(n-2)\\&=\left[\frac{2^n}{12}-\frac{(-1)^n}{3}+\frac{(-2)^n}{4}\right]u(n-2)\end{aligned}$$

系统的全响应为

$$\begin{aligned}y(n)&=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)\\&=[C_1(-1)^n+C_2(-2)^n]u(n)+\left[\frac{2^n}{12}-\frac{(-1)^n}{3}+\frac{(-2)^n}{4}\right]u(n-2)\end{aligned}$$

将初始值 $y(0)=0$， $y(2)=1$ 代入上式，得

$$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2=0\\y(1)=-C_1-2C_2=1\end{cases}$$

解得

$$C_1=1\text{，}\quad C_2=-1$$

故

$$y_{zi}(n)=(-1)^n-(-2)^n$$

$$y(n)=[(-1)^n+(-2)^n]u(n)+\left[\frac{2^n}{12}-\frac{(-1)^n}{3}+\frac{(-2)^n}{4}\right]u(n-2)$$

28．证明

（1）已知 LTI 系统的单位阶跃响应为 $g(n)=\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$，则单位序列响应为 $h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

（2）LTI 系统单位序列响应 $h(n)=(n+1)\alpha^n u(n)$（$|\alpha|<1$），则单位阶跃响应为

$$g(n)=\left[\frac{1}{(\alpha-1)^2}-\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\alpha^n+\frac{\alpha}{\alpha-1}(n+1)\alpha^n\right]u(n)$$

证明

（1）根据单位序列响应与单位阶跃响应的关系，可得

$$h(n)=g(n)-g(n-1)=\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u(n)-\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]u(n-1)$$

$$=\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u(n)-\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]u(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$$

证毕。

（2）根据单位序列响应与单位阶跃响应的关系，可得

$$g(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}h(i)=\sum_{i=-\infty}^{n}(i+1)\alpha^{i}u(i)=\left[\sum_{i=0}^{n}i\alpha^{i}\right]u(n)+\left[\sum_{i=0}^{n}\alpha^{i}\right]u(n)$$

令

$$s(n)=\sum_{i=0}^{n}i\alpha^{i}=\alpha+2\alpha^{2}+3\alpha^{3}+4\alpha^{4}+5\alpha^{5}+\cdots+n\alpha^{n}$$

$$\alpha s(n)=\alpha^{2}+2\alpha^{3}+3\alpha^{4}+4\alpha^{5}+5\alpha^{6}+\cdots+n\alpha^{n+1}$$

将以上两式相减，可得

$$(1-\alpha)s(n)=\alpha+\alpha^{2}+\alpha^{3}+\alpha^{4}+\alpha^{5}+\alpha^{6}+\cdots+\alpha^{n}-n\alpha^{n+1}=\frac{\alpha-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}-n\alpha^{n+1}$$

即

$$s(n)=\frac{\alpha-\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)^{2}}-\frac{n\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

而且

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha^{i}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

故

$$g(n)=\left[\frac{\alpha-\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)^{2}}-\frac{n\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right]u(n)+\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n)$$

$$=\left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)^{2}}+\frac{1}{1-a}-\frac{\alpha\alpha^{n}}{(1-\alpha)^{2}}-\frac{n\alpha\alpha^{n}}{1-\alpha}-\frac{\alpha\alpha^{n}}{1-\alpha}\right]u(n)$$

$$=\left[\frac{\alpha}{(\alpha-1)^{2}}-\frac{1}{\alpha-1}-\frac{\alpha\alpha^{n}}{(\alpha-1)^{2}}+\frac{n\alpha\alpha^{n}}{\alpha-1}+\frac{\alpha\alpha^{n}}{\alpha-1}\right]u(n)$$

$$=\left[\frac{1}{(\alpha-1)^{2}}-\frac{\alpha}{(\alpha-1)^{2}}\alpha^{n}+\frac{\alpha}{\alpha-1}(n+1)\alpha^{n}\right]u(n)$$

证毕。

29．已知 LTI 系统的单位阶跃响应 $g(n)=[2^{n}+3\times5^{n}+10]u(n)$，求：

（1）系统的后向差分方程；

（2）单位序列响应 $h(n)$；

（3）$f(n)=u(n)+3^{n}u(n)$ 时的零状态响应。

解

（1）$H(z)=\dfrac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\dfrac{\dfrac{z}{z-2}+3\dfrac{z}{z-5}+10\dfrac{z}{z-1}}{\dfrac{z}{z-1}}$

$$=\frac{14z^2-85z+21}{(z-2)(z-5)}=\frac{14-85z^{-1}+21z^{-2}}{1-7z^{-1}+10z^{-2}}$$

系统的后向差分方程为

$$y(n)-7y(n-1)+10y(n-2)=14f(n)-85f(n-1)+21f(n-2)$$

（2）根据单位序列响应与单位阶跃响应的关系，可得

$$h(n)=g(n)-g(n-1)=[2^n+3\times5^n+10]u(n)-[2^{n-1}+3\times5^{n-1}+10]u(n-1)$$

$$=[2^n+3\times5^n+10]u(n)-[2^{n-1}+3\times5^{n-1}+10]u(n)+\frac{111}{10}\delta(n)$$

$$=\left[\frac{2^n}{2}+\frac{12\times5^n}{5}\right]u(n)+\frac{111}{10}\delta(n)$$

（3）$y_{zs}(n)=f(n)*h(n)=[u(n)+3^nu(n)]*\left\{\left[\dfrac{2^n}{2}+\dfrac{12\times5^n}{5}\right]u(n)+\dfrac{111}{10}\delta(n)\right\}$

$$=u(n)*\frac{2^n}{2}u(n)+(3)^nu(n)*\frac{2^n}{2}u(n)+u(n)*\frac{12\times5^n}{5}u(n)+$$

$$3^nu(n)*\frac{12\times5^n}{5}u(n)+[u(n)+3^nu(n)]*\frac{111}{10}\delta(n)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}u(n)+\frac{1}{2}\times\frac{3^{n+1}-(2)^{n+1}}{3-2}u(n)+\frac{12}{5}\times\frac{5^{n+1}-1}{5-1}u(n)+$$

$$\frac{12}{5}\times\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{5-3}u(n)+\frac{111}{10}[u(n)+3^nu(n)]$$

$$=(10+9\times3^n+9\times5^n)u(n)$$

30. 如图 3.13 所示的复合系统由三个子系统组成，它们的单位序列响应分别为 $h_1(n)=\delta(n)$，$h_2(n)=\delta(n-N)$，N 为常数，$h_3(n)=u(n)$，求复合系统的单位序列响应。

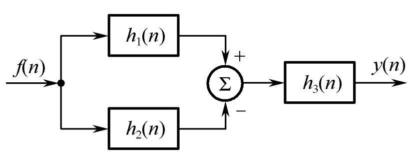


图 3.13

解

由系统框图可得复合系统的单位序列响应为

$$h(n)=[h_1(n)-h_2(n)]*h_3(n)=[\delta(n)-\delta(n-N)]*u(n)=u(n)-u(n-N)$$

31. 图 3.14 所示的复合系统由三个子系统组成，它们单位序列响应分别为 $h_1(n)=u(n)$，$h_2(n)=u(n-5)$，求复合系统的单位序列响应。

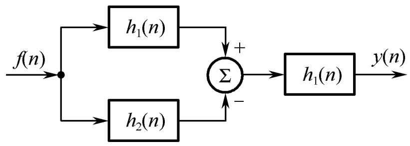


图 3.14

解

由系统框图可得复合系统的单位序列响应为

$$h(n)=[h_1(n)-h_2(n)]*h_1(n)=[u(n)-u(n-5)]*u(n)$$

$$=u(n)*u(n)-u(n-5)*u(n)=(n+1)u(n)-(n-4)u(n-5)$$

32．图 3.15 所示系统，若激励 $f(n)=(0.5)^n u(n)$，求系统的零状态响应。

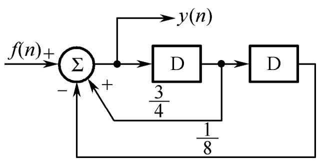


图 3.15

解

$$y(n)=f(n)+\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)$$

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=f(n)$$

$$h(n)-\frac{3}{4}h(n-1)+\frac{1}{8}h(n-2)=\delta(n)$$

$$h(0)=\delta(0)+\frac{3}{4}h(-1)-\frac{1}{8}h(-2)=1+\frac{3}{4}\times 0-\frac{1}{8}\times 0=1$$

$$h(1)=\delta(1)+\frac{3}{4}h(0)-\frac{1}{8}h(-1)=0+\frac{3}{4}\times 1-\frac{1}{8}\times 0=\frac{3}{4}$$

$$h(n)-\frac{3}{4}h(n-1)+\frac{1}{8}h(n-2)=0, n>0$$

$$1-\frac{3}{4}\lambda^{-1}+\frac{1}{8}\lambda^{-2}=0$$

$$\lambda^2-\frac{3}{4}\lambda+\frac{1}{8}=0$$

$$\lambda_1=\frac{1}{4}, \lambda_2=\frac{1}{2}$$

$$h(n)=C_1\left(\frac{1}{4}\right)^n+C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, n>0$$

$$\begin{cases} h(0)=C_1+C_2=1 \\ h(1)=\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=2 \end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}-\left(\frac{1}{4}\right)^n+2\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}=\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^n+2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u(n)$$

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)=f(n)*h(n)&=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)*\left[\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^n+2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u(n)\right]\\&=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)*\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)*2\left(\frac{1}{2}\right)^n)u(n)\\&=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}u(n)+2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n)u(n)\\&=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)+2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n)u(n)\\&=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)+2n\left(\frac{1}{2}\right)^n)u(n)\end{aligned}$$

33.已知某离散系统的单位响应为$h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$，其零状态响应$y_{zs}(n)=[1-(0.8)^{n+1}]u(n)$，求该系统的激励$f(n)$。

解

根据$y_{zs}(n)=h(n)*f(n)$，有

$$y_{zs}(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)*f(n) \qquad ①$$

利用卷积的时不变特性，有

$$y_{zs}(n-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)*f(n) \qquad ②$$

式①减去式②得

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)-y_{zs}(n-1)&=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)\right]*f(n)\\&=\left[\delta(n)+\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n-1)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)\right]*f(n)\\&=\left[\delta(n)-\frac{2}{3}h(n-1)\right]*f(n)=f(n)-\frac{2}{3}y_{zs}(n-1)\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}f(n)=y_{zs}(n)-\frac{1}{3}y_{zs}(n-1)&=[1-(0.8)^{n+1}]u(n)-\frac{1}{3}[1-(0.8)^n]u(n-1)\\&=[1-0.8(0.8)^n]u(n)-\frac{1}{3}[1-(0.8)^n]u(n)=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{5}(0.8)^n\right]u(n)\end{aligned}$$