# 第 1 章　信号与系统的基本概念

## 1.1　信号的描述与分类

### 1.1.1　信号的描述

人类的发展需要人与人之间的交流,这种交流要依靠信息,因此,信息是存在于客观世界的一种事物现象,通常以文字、声音、图像或事先约定的编码等形式来表现。例如,在原始社会,信息交流主要以烽火、声音等形式通过人类感觉器官进行交流,这种方式无论是在信息传输速度还是在传输距离方面都受到限制。随着对电磁现象的认识,人们把这种含有信息的文字、声音、图像或编码等分别按一定规则约定而形成的符号统称为消息。这种消息依附于随时间和空间变化的某种物理量。把这种随时间和空间变化的物理量统称信号。可见信号是消息的载体,是消息的表现形式,是通信的客观对象,而消息则是信号的内容。例如在通信工程中,一般将语音、文字、图像、数据等统称为消息,在消息中包含着一定的信息。传送消息必须借助于一定形式的信号(光信号、电信号等)。若信号表现为电压、电流、电荷等则称为电信号,它是现代科学技术中应用最广泛的信号。本书只涉及电信号。

信号描述可有多种方式,而一般常用的有下列三种。

(1) 函数

因为信号通常是时间变量 $t$ 的函数,所以对于某一类信号就可以用时间函数来描述,本书用函数 $f(t)$ 表示信号。如正弦函数、指数函数等。指数信号的表示形式为

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-\frac{t}{\tau}} & t\geqslant 0\end{cases}$$

(2) 图形

信号随时间 $t$ 的变化情况,我们可以通过专门仪器观测到其变化的轨迹 —— 图形,因此也可以用图形描述信号。若所得到的图形是曲线,也称为信号的波形,如图 1-1 所示[1]。

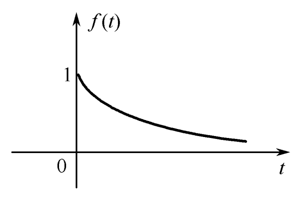


图 1-1

(3) 数据

随着现代电子信息技术的飞速发展,相当一部分信号是用其采样点的数据表示的,如飞行体的轨道观测返回数据等。

应当注意,信号与函数在概念的内涵与外延上是有区别的。信号一般是时间变量 $t$ 的函数,但函数并不一定都是信号;信号是实际的物理量或物理现象,而函数则可能只是一种抽象的数学定义。

本书对“信号”与“函数”两个词相互通用,不予区分。例如,正弦信号也说成正弦函数,或者相反;凡提到函数,指的均是信号。

1　本书图中的图题均省略。

### 1.1.2 信号的分类

信号可按不同方式进行分类,通常信号分类如下。

#### 1. 确定信号与随机信号

按信号随时间变化的规律来分,信号可分为确定信号与随机信号。

确定信号(determinate signal)是指能够表示为确定的时间函数的信号。当给定某一时间值时,信号有确定的数值,其所含信息量的不同体现在其分布值随时间、或空间的变化规律上。正弦信号、指数信号、各种周期信号等都是确定信号。

随机信号(random signal)不是时间 $t$ 的确定函数,它在每一个确定时刻的分布值是不确定的,只能通过大量试验测出它在某些确定时刻上取某些数值的概率。空中的噪声,电路元件中的热噪声电流等都是随机信号。

严格说来,除通过专用仪器或设备产生一些有规律的确定信号外,一般实际的信号都是随机信号。因为若传输的是确定信号,则对接收者来说,就不可能由它得知任何新的信息,从而失去了传送消息的本意。但是,对于确定信号的分析仍然有着重要的意义,因为在一定条件下,实际信号与确定信号表现出某种相似的特性,例如,在一个较长的时间内随时间变化的规律比较确定,即可近似地看成确定信号。可见确定信号是一种近似的、理想化了的信号,这样可以使实际问题分析大为简化,更便于工程的实际应用。

本书将主要研究确定信号,对于随机信号的分析与处理则在后续有关课程中去研究。

#### 2. 连续时间信号与离散时间信号

按自变量 $t$ 取值的连续与否来分,信号有连续时间信号与离散时间信号,如图 1-2 所示。

连续时间信号(continuous-time signal)是指自变量 $t$ 取值是连续的信号,如图 1-2(a)所示。该类信号在某一时间间隔内,对于一切时间值,除了若干函数不连续点外,都能给出确定的值。连续时间信号也简称为连续信号,电路基础课程中所引入的信号都是连续信号。

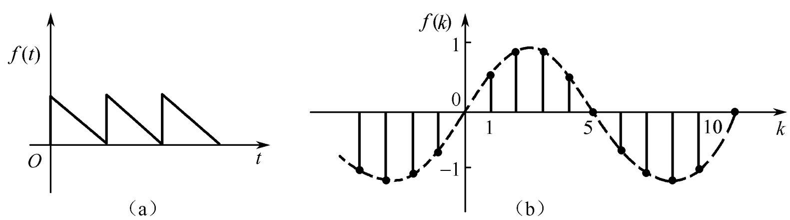



图 1-2

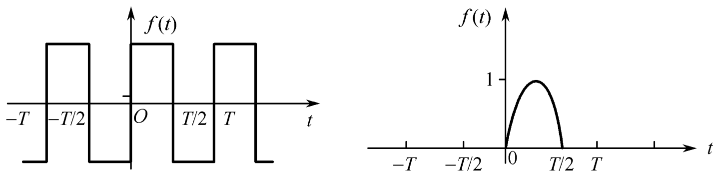
离散时间信号(discrete-time signal)是指自变量 $t$ 取值不是连续而是离散的信号,如图 1-2(b)所示。该类信号只在某些不连续的时间值上给出函数值,其他时间值上函数无定义。离散时间信号也简称为离散信号。

#### 3. 周期信号与非周期信号

按信号函数取值随自变量 $t$ 的重复与否,确定信号可分为周期信号与非周期信号,如图 1-3 所示。

周期信号(periodic signal)是在时间上重复某一变化规律的信号,如图 1-3(a)所示。

设信号 $f(t)$, $t \in R$,若存在一个常数 $T$,使得




（a）　　　　　　　　（b）

图 1-3

$$f(t-nT)=f(t)\quad n\in Z \tag{1-1}$$

则称 $f(t)$ 是以 $T$ 为周期的周期信号。从此定义看出,周期信号有三个特点:

① 周期信号必须在时间上是无始无终的,即自变量 $t$ 的定义域为 $t\in R$。

② 随时间变化的规律必须具有周期性,其周期为 $T$。

③ 在各周期内信号的波形完全一样。

非周期信号(non-periodic signal) 是指不满足式(1-1) 及上述特点的信号, 如图 1-3(b) 所示。

#### 4. 功率信号与能量信号

信号还可以用它的能量特性表示,通常分为能量信号与功率信号。

为了知道信号能量或功率的特性,常常研究信号(电流或电压) 在一单位电阻上所消耗的能量或功率。

信号的能量定义为在时间区间$(-\infty,\infty)$ 内信号 $f(t)$ 的能量,记为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

信号的功率定义为在时间区间$(-\infty,\infty)$ 内信号 $f(t)$ 的平均功率,记为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

能量信号(energy signal) 是指信号能量有限,而信号平均功率为零的信号。此类信号只能从能量去加以研究,而无法从平均功率去考察研究。例如,非周期脉冲信号、只存在于有限时间内的信号是能量信号。

功率信号(power signal) 是指信号平均功率有限,而信号总能量为无限大的信号。对于此类信号能量就没有意义,而只能从平均功率去考察研究。例如,在时间间隔无限大的情况下,所有周期信号都是功率信号。

存在于无限时间内的非周期信号可以是能量信号,也可以是功率信号,这要根据信号函数来确定。

#### 5. 有时限信号与无时限信号

若在有限时间区间$(t_1<t<t_2)$ 内信号 $f(t)$ 存在,而在此时间区间以外,信号 $f(t)=0$,则此信号即为有时限信号,简称时限信号,否则即为无时限信号。

#### 6. 有始信号与有终信号

设 $t_1$ 为实常数,若 $t<t_1$ 时 $f(t)=0$,$t>t_1$ 时 $f(t)\neq0$,则 $f(t)$ 即为有始信号,其起始时刻为 $t_1$。设 $t_2$ 为实常数,若 $t>t_2$ 时 $f(t)=0$,$t<t_2$ 时 $f(t)\neq0$,则 $f(t)$ 即为有终信号,其终止时刻为 $t_2$。

**7. 因果信号与非因果信号**

若 $t<0$ 时 $f(t)=0$，$t>0$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 为因果信号，可用 $f(t)U(t)$ 表示。其中 $U(t)$ 为单位阶跃信号。因果信号为有始信号的特例。

若 $t>0$ 时 $f(t)=0$，$t<0$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 为反因果信号，可用 $f(t)U(-t)$ 表示。非因果信号为有终信号的特例。

信号还有其他分类形式，如按自变量多少还可以分为一维信号、二维信号与多维信号。声音信号是一种一维信号，而电视图像信号是二维信号。本书主要讨论的时间信号是一维信号，用 $f(t)$ 表示。

**【例 1-1】** 试判断下列各信号 $f(t)$ 是否为周期信号。若是，其周期 $T$ 为多少？

(1) $f(t)=\cos(7\pi t+60°)$ (2) $f(t)=\cos 2t+\sin 3t$ (3) $f(t)=\cos 10t+\sin 10t$

(4) $f(t)=\sin 2t+\cos \pi t$ (5) $f(t)=t^2+1$ (6) $f(t)=\sin 2\pi t+\cos 5\pi t$

(7) $f(t)=(\sin 2t)^2$ (8) $f(t)=e^{-2t}\cos(2\pi t+30°)$ (9) $f(t)=10\cos 4\pi t U(t)$

**解：**(1) $f(t)$ 为周期信号，其周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{7\pi}=\dfrac{2}{7}(\mathrm{s})$。

(2) $f(t)$ 为两个子信号 $f_1(t)=\cos 2t$ 与 $f_2(t)=\sin 3t$ 的和，即 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$，且

$$f_1(t)=f_1(t\pm n_1T_1),\quad f_2(t)=f_2(t\pm n_2T_2)$$

其中，$n_1\in Z$，$n_2\in Z$（$Z$ 表示整数域）。则当 $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{n_2}{n_1}$（$n_1$ 与 $n_2$ 必须为不可约的整数）时，$f(t)$ 即为周期信号，其周期 $T=n_1T_1=n_2T_2$。

子信号 $\cos 2t$ 的周期为 $T_1=\dfrac{2\pi}{2}=\pi(\mathrm{s})$，子信号 $\sin 3t$ 的周期为 $T_2=\dfrac{2\pi}{3}(\mathrm{s})$，故有 $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{\pi}{2\pi/3}=\dfrac{3}{2}$。由于 3/2 已为不能再约的整数比，故 $f(t)$ 为周期信号，其周期为

$$T=2T_1=2\pi(\mathrm{s}) \quad 或 \quad T=3T_2=3\times\frac{2\pi}{3}=2\pi(\mathrm{s})$$

(3) 子信号 $\cos 10t$ 的周期为 $T_1=2\pi/10=0.2\pi(\mathrm{s})$，子信号 $\sin 10t$ 的周期为 $T_2=2\pi/10=0.2\pi(\mathrm{s})$，故有 $T_1/T_2=0.2\pi/0.2\pi=1/1$。可见 $f(t)$ 为周期信号，其周期为 $T=1T_1=1T_2=0.2\pi(\mathrm{s})$。

此题也可用下述方法判断，即

$$f(t)=\sqrt{2}\cos(10t-45°)$$

可见 $f(t)$ 为周期信号，其周期为 $T=2\pi/10=0.2\pi(\mathrm{s})$。

(4) 子信号 $\sin 2t$ 与 $\cos \pi t$ 的周期分别为 $T_1=2\pi/2=\pi(\mathrm{s})$，$T_2=2\pi/\pi=2(\mathrm{s})$，故有 $T_1/T_2=\pi/2$，可见 $T_1/T_2$ 不是整数比，故 $f(t)$ 不是周期信号。

(5) $f(t)$ 是一个二次曲线函数，显然不是周期信号。

(6) 子信号 $\sin 2\pi t$ 与 $\cos 5\pi t$ 的周期分别为 $T_1=\dfrac{2\pi}{2\pi}=1(\mathrm{s})$，$T_2=\dfrac{2\pi}{5\pi}=\dfrac{2}{5}(\mathrm{s})$，故有 $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{1}{2/5}=\dfrac{5}{2}$。可见 $f(t)$ 为周期信号，其周期为 $T=2T_1=5T_2=2(\mathrm{s})$。

（7）因 $f(t)=(\sin 2t)^2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 4t$，故 $f(t)$ 为周期信号，其周期 $T=2\pi/4=0.5\pi(\mathrm{s})$。

（8）因 $f(t)$ 的振幅是随时间按指数规律变化的，故 $f(t)$ 不是周期信号。

（9）因 $f(t)$ 不是无始无终的信号，而是有始无终的信号，故不是周期信号。

## 1.2　常用的连续时间信号及其时域特性

在此之前的有关课程中，我们已经认识了一些常用的信号，如直流信号、正弦信号、指数信号等，本节将介绍其他几种常用的连续时间信号，常用的离散时间信号将在第 7 章引入。

**1. 单位阶跃信号**

单位阶跃信号一般用 $U(t)$ 表示，有的书上也有用 $\varepsilon(t)$ 表示的。其函数定义式为

$$U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

也可定义为

$$U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1/2 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

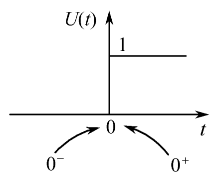



图 1-4

二维码 1-1

其波形如图 1-4 所示。可见，$U(t)$ 在 $t=0$ 时刻发生了阶跃，从 $U(0^-)=0$ 阶跃到 $U(0^+)=1$，阶跃的幅度为 1。

$U(t)$ 的 MATLAB 仿真见二维码 1-1。

$U(t)$ 具有使任意非因果信号 $f(t)$ 变为因果信号的功能，即将 $f(t)$ 乘以 $U(t)$，所得 $f(t)U(t)$ 即为因果信号，如图 1-5 所示。

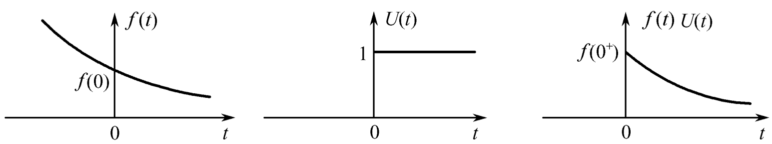



图 1-5

**【例 1-2】**　试画出下列函数的波形：

（1）$f(t)=U(t^2+3t+2)$　　　　（2）$f(t)=U(\sin\pi t)$

**解：**（1）令 $\tau=t^2+3t+2=\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，$\tau$ 是 $t$ 的一元二次函数，$\tau$ 随 $t$ 的变化曲线如图 1-6(a) 所示。故有

$$f(t)=U(\tau)=\begin{cases}1 & \tau>0\\ 0 & \tau<0\end{cases}$$

$f(t)$ 的波形如图 1-6(b) 所示。

（2）$f(t)=U(\sin\pi t)=\begin{cases}1 & \sin\pi t>0\\ 0 & \sin\pi t<0\end{cases}$

故得 $f(t)$ 的波形如图 1-7 所示。可见，$f(t)$ 为一周期信号，其周期 $T=2\mathrm{s}$。

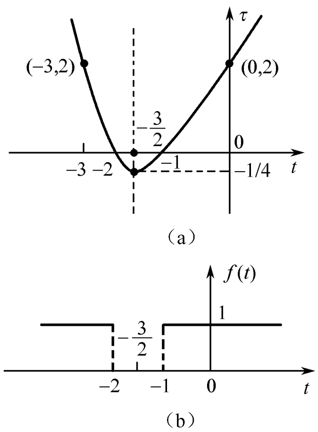


图 1-6

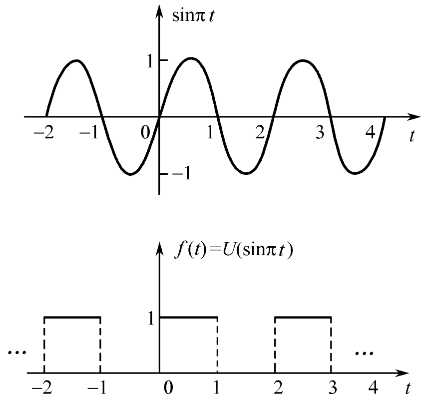


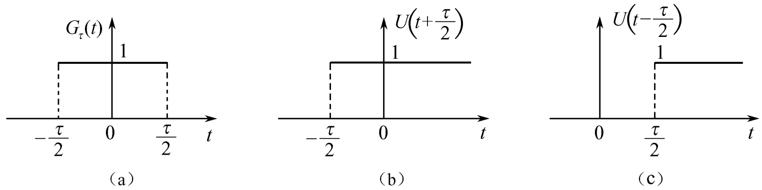
图 1-7

**2. 单位门信号**

门宽为 $\tau$、门高为 1 的单位门信号常用符号 $G_\tau(t)$ 表示，其函数定义式为

$$G_\tau(t)=\begin{cases}1 & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\[2ex] 0 & t>\dfrac{\tau}{2},t<-\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

其波形如图 1-8(a) 所示。门函数的 MATLAB 仿真见二维码 1-2。




二维码 1-2

图 1-8

单位门信号可用两个分别在 $t=-\dfrac{\tau}{2}$ 和 $t=\dfrac{\tau}{2}$ 出现的单位阶跃信号之差表示，如图1-8(b) 和 (c) 所示。即

$$G_\tau(t)=U\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-U\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

**3. 单位冲激信号**

(1) 定义

单位冲激信号用 $\delta(t)$ 表示，其函数定义式为

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

且面积为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$$

其图形如图 1-9(a) 所示，即用一粗箭头表示，箭头旁边标以(1)，表示 $\delta(t)$ 图形下的面积为 1，称为冲激函数的强度，简称冲激强度。

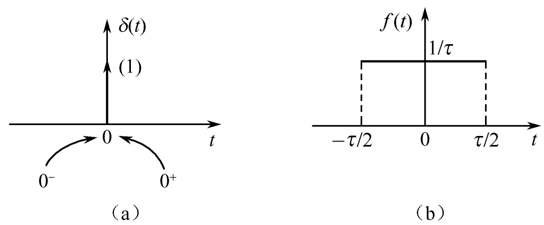



图 1-9

单位冲激信号可理解为门宽为 $\tau$、门高为 $1/\tau$ 的门函数 $f(t)$ [见图 1-9(b)] 在 $\tau \to 0$ 时的极限,即

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}f(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

且
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\tau\to 0}f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=1$$

**推广:**

① 设 $t_0$ 为正的实常数,则有

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

且
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=1$$

其图形如图 1-10(a) 所示,即 $\delta(t)$ 在时间上延迟了 $t_0$。

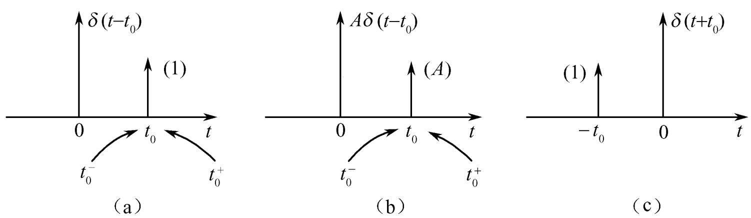



图 1-10

② 若冲激函数图形下的面积为 $A$,则可写为

$$A\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

且
$$\int_{-\infty}^{\infty}A\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=A\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=A$$

即冲激强度为 $A$,其图形如图 1-10(b) 所示,箭头旁标以($A$)。

③ 若 $\delta(t)$ 在时间上超前了 $t_0$,则应写为 $\delta(t+t_0)$,其图形如图 1-10(c) 所示。

(2) 性质

① 设 $f(t)$ 为任意有界函数,且在 $t=0$ 与 $t=t_0$ 时刻连续,其函数值分别为 $f(0)$ 和 $f(t_0)$,则有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$
$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

即时间函数 $f(t)$ 与单位冲激函数相乘,就等于单位冲激函数出现时刻,$f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$ 与单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 相乘,亦即使冲激函数的强度变为 $f(t_0)$,如图 1-11 所示。

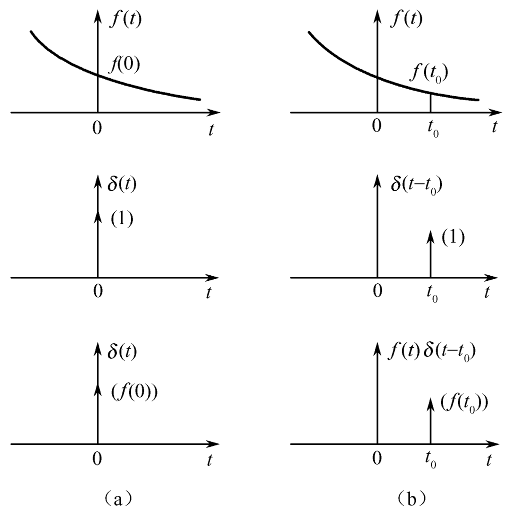


图 1-11

② 抽样性(筛选性)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$$

即任意的有界时间函数$f(t)$与$\delta(t)$或$\delta(t-t_0)$相乘后在无穷区间($t\in R$)的积分值,等于单位冲激函数出现时刻$f(t)$的函数值$f(t_0)$。此即为冲激函数的抽样性,也称筛选性,$f(0)$或$f(t_0)$即为$f(t)$在抽样时刻的抽样值,$f(t)$为被抽样的函数。

③ $\delta(t)$为偶函数,即有

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

**证明**:给上式等号两端同乘以$f(t)$并进行积分,即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-t)f(t)\,\mathrm{d}t \overset{t'=-t}{=} \int_{\infty}^{-\infty}\delta(t')f(-t')\,\mathrm{d}(-t') = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')f(-t')\,\mathrm{d}t'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')f(0)\,\mathrm{d}t' = f(0)$$

又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

故得

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

［证毕］

**推广**:

$$\delta(t-t_0)=\delta[-(t-t_0)]$$

④ $\delta(at)=\dfrac{1}{a}\delta(t)$($a$为大于零的实常数)

**证明**:设$t'=at$,则$t=\dfrac{1}{a}t'$,$\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}t'$;且当$t=-\infty$时,$t'=-\infty$;当$t=\infty$时,$t'=\infty$。故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')\,\frac{1}{a}\mathrm{d}t' = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{a}$$

又

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}\delta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$$

故得

$$\delta(at)=\frac{1}{a}\delta(t)$$

**推广：**

① $\delta(at-t_0)=\delta\left[a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right]=\frac{1}{a}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right)$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}f(0)$

③ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-t_0)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}f\left(\frac{t_0}{a}\right)$

**4. $\delta(t)$ 与 $U(t)$ 的关系**

$\delta(t)$ 与 $U(t)$ 互为微分与积分的关系，即

$$U(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \delta(t)=\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$$

现证明第一式：当 $t<0$ 时有 $\delta(t)=0$，故有

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}0\times\mathrm{d}\tau=0$$

当 $t>0$ 时有 $\quad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{0^-}0\times\mathrm{d}\tau+\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{0^+}^{t}0\times\mathrm{d}\tau=0+1+0=1$

故得 $\quad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}0 & t<1\\ 1 & t>0\end{cases}=U(t)$ ［证毕］

而 $\delta(t)=\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$ 的成立是不言而喻的，无须证明。

**推广：** $\quad U(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau$

$$\delta(t-t_0)=\frac{\mathrm{d}U(t-t_0)}{\mathrm{d}t}$$

**【例 1-3】** 试画出 $f(t)=\delta[\sin\pi t]\ (t\geqslant 0)$ 的波形。

**解：**$f(t)=\delta[\sin\pi t]=\begin{cases}\infty & \sin\pi t=0\\ 0 & \sin\pi t\neq 0\end{cases}$

其波形如图 1-12 所示。

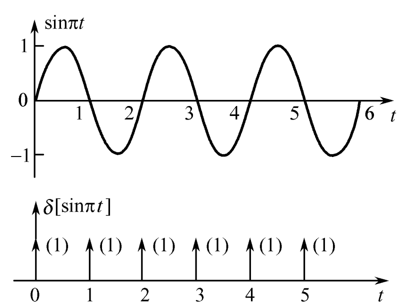



图 1-12

**【例 1-4】** 求下列积分。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\delta(-2t)\mathrm{d}t$ $\qquad$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\delta(1-2t)\mathrm{d}t$

**解：**(1) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\times\frac{1}{2}\delta(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(0^2+2\times 0+3)\times\frac{1}{2}\delta(t)\mathrm{d}t=1.5$$

(2) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\delta\left[-2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\delta\left[2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2t+3)\times\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+3\right]\times\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{17}{8}$$

**5. 单位冲激偶信号**

(1) 定义

$\delta(t)$ 的一阶导数 $\delta'(t)$ 称为单位冲激偶信号,即

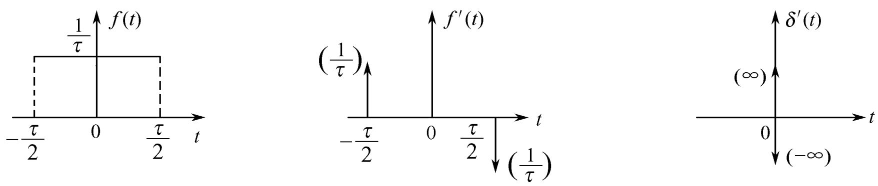
$$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)$$

$\delta'(t)$ 可理解为门宽为 $\tau$、门高为 $1/\tau$ 的门函数的一阶导数在 $\tau\to 0$ 时的极限。设门宽为 $\tau$、门高为 $1/\tau$ 的门函数为

$$f(t)=\frac{1}{\tau}\left[U\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-U\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

其波形如图 1-13(a) 所示。故有

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=f'(t)=\frac{1}{\tau}\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{\tau}\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$




(a) (b) (c)

图 1-13

$f'(t)$ 的波形如图 1-13(b) 所示。可见 $f'(t)$ 是位于 $t=\pm\tau/2$ 时刻的强度均为 $1/\tau$ 的正、负两个冲激信号。又因有

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}f(t)$$

故
$$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lim_{\tau\to 0}f(t)\right]=\lim_{\tau\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\lim_{\tau\to 0}f'(t)$$

$\delta'(t)$ 的波形如图 1-13(c) 所示。可见 $\delta'(t)$ 是在 $t=0$ 时刻出现的方向相反、强度均为 $\infty$ 的一对正、负冲激信号。

(2) 性质

① $\delta'(t)$ 为奇函数,即有 $\delta'(t)=-\delta'(-t)$。

$$\delta'(t-t_0)=-\delta'[-(t-t_0)]=-\delta'(t_0-t)$$

② $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0$ (因 $\delta'(t)$ 为奇函数)

③ $\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau=\delta(t)$

④ $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

**证明:**
$$[f(t)\delta(t)]'=f'(t)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$$

有
$$[f(0)\delta(t)]'=f'(0)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$$

即
$$f(0)\delta'(t)=f'(0)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$$

故得
$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

这是一个很重要和很有用的公式。

**推广:**

① $f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t = -f'(0)$

③ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t = -f'(t_0)$

**【例 1-5】** 已知$f(t)=3t^2+2t+1$,求下列积分。

(1)$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t$ (2)$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(1-t)\mathrm{d}t$

**解:**(1) 原式 $=-f'(0)=-(3t^2+2t+1)'\big|_{t=0}=-(6t+2)\big|_{t=0}=-2$

(2) 原式$=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-1)\mathrm{d}t = f'(1)$

$$=(3t^2+2t+1)'\big|_{t=1}=(6t+2)\big|_{t=1}=8$$

**【例 1-6】** 求下列积分:$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\tau}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$。

**解:**原式 $=\int_{-\infty}^{t}[\mathrm{e}^{-0}\delta'(\tau)+\mathrm{e}^{-0}\delta(\tau)]\mathrm{d}\tau=\delta(t)+U(t)$

**6. 单位符号信号**

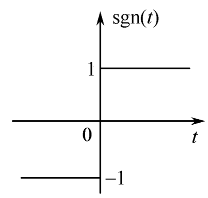


图 1-14

单位符号信号用 sgn(t) 表示,其函数定义式为

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

或写成 $\mathrm{sgn}(t)=U(t)-U(-t)=2U(t)-1$

其波形如图 1-14 所示。符号信号也称正负号信号。

**【例 1-7】** 试画出函数$f(t)=\mathrm{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{2}t\right)$的波形。

**解:**

$$f(t)=\mathrm{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{2}t\right)=\begin{cases}1 & \cos\frac{\pi}{2}t>0\\ -1 & \cos\frac{\pi}{2}t<0\end{cases}$$

$\cos\frac{\pi}{2}t$ 与$f(t)$ 的波形如图 1-15 所示。

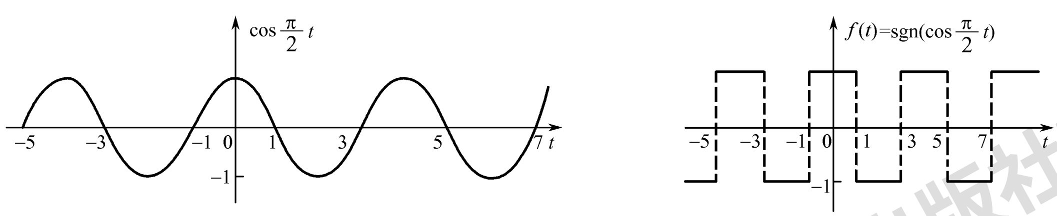


图 1-15

**7. 抽样信号**

抽样信号的函数定义式为

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}=\mathrm{Sa}(t)\quad t\in R$$

其波形如图 1-16 所示。抽样信号有如下性质:

① 为实变量 $t$ 的偶函数,即有 $f(t)=f(-t)$;

② $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=f(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$;

③ 当 $t=k\pi\,(k=\pm 1,\ \pm 2,\cdots)$ 时,$f(t)=0$,即 $t=k\pi$ 为 $f(t)$ 出现零值点的时刻;

④ $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\pi$;

⑤ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f(t)=0$。

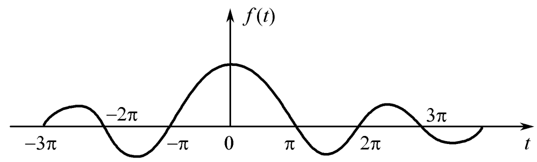



图 1-16

# 1.3 连续时间信号时域变换与运算

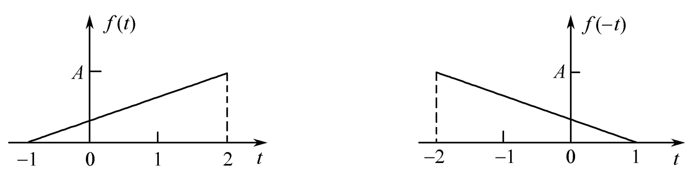
信号在时域中的变换有折叠、时移、展缩、倒相等。信号在时域中的运算有相加、相乘、数乘(幅度变化)、微分、积分等。实际信号的运算也属于相应的变换,只是与数学运算有对应的关系。本节只讨论连续时间信号时域变换与运算,离散时间信号的时域变换与运算将在第 7 章介绍。

## 1.3.1 时域变换

### 1. 折叠

信号的时域折叠就是将信号 $f(t)$ 的波形以纵轴为轴翻转 180°。

设信号 $f(t)$ 的波形如图 1-17(a) 所示。将 $f(t)$ 以纵轴为轴折叠,即得折叠信号 $f(-t)$。$f(-t)$ 的波形如图 1-17(b) 所示。可见,欲求得 $f(t)$ 的折叠信号 $f(-t)$,必须将 $f(t)$ 中的 $t$ 换为 $-t$,同时 $f(t)$ 定义域中的 $t$ 也必须换为 $-t$。




(a)　(b)

图 1-17

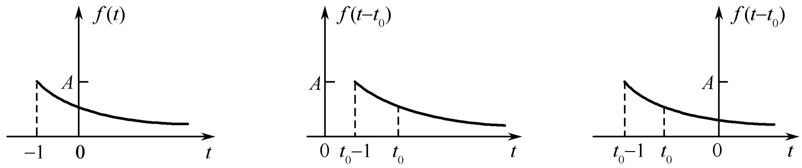
信号的折叠变换,就是将"未来"与"过去"互换,这显然是不能用硬件实现的,所以并无实际意义,但它具有理论意义。

### 2. 时移

信号的时移就是将信号 $f(t)$ 的波形沿时间轴 $t$ 左、右平行移动,但波形的形状不变。

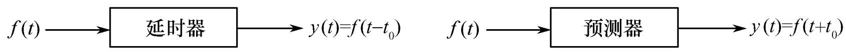
设信号 $f(t)$ 的波形如图 1-18(a) 所示。将 $f(t)$ 沿 $t$ 轴平移 $t_0$,即得时移信号 $f(t-t_0)$,$t_0$ 为实常数。当 $t_0>0$ 时,为沿 $t$ 轴的正方向移动(右移);当 $t_0<0$ 时,为沿 $t$ 轴的负方向移动(左移)。$f(t-t_0)$ 的波形如图 1-18(b) 和(c) 所示。可见,欲求得 $f(t)$ 的时移信号 $f(t-t_0)$,必须将 $f(t)$ 中的 $t$ 换为 $t-t_0$,同时 $f(t)$ 定义域中的 $t$ 也必须换为 $t-t_0$。

信号的时移变换用时移器(也称延时器) 实现,如图 1-19 所示。图中 $f(t)$ 是延时器的输入信号,$y(t)=f(t-t_0)$ 是延时器的输出信号。可见 $y(t)$ 较 $f(t)$ 延迟了时间 $t_0$。




（a）（b）（c）

图 1-18




（a）延时器（延时$t_0$）（b）预测器

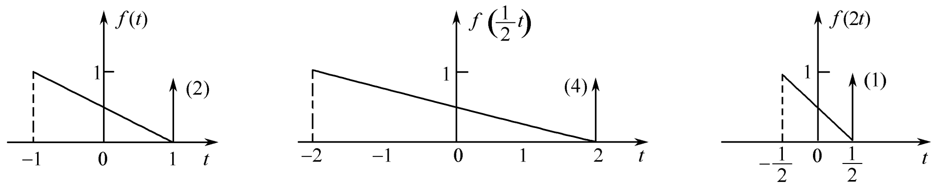
图 1-19

需要指出的是，当$t_0>0$时，延时器为因果系统，是可以用硬件实现的；当$t_0<0$时，延时器是非因果系统，此时的延时器变成预测器。延时器与预测器都是信号处理中常见的系统。

**3. 展缩**

信号的时域展缩就是将信号$f(t)$在时间$t$轴上展宽或压缩，但纵轴上的值不变。

设信号$f(t)$的波形如图 1-20(a) 所示。以变量$at$置换$f(t)$中的$t$，$f(at)$即为信号$f(t)$的展缩信号。其中$a$为正实常数。若$0<a<1$，则表示将$f(t)$的波形在时间$t$轴上展宽到$1/a$倍(纵轴上的值不变)，如图 1-20(b) 所示(图中取$a=1/2$)；若$a>1$，则表示将$f(t)$的波形在时间$t$轴上压缩到$1/a$(纵轴上的值不变)，如图 1-20(c) 所示(图中取$a=2$)。




（a）（b）（c）

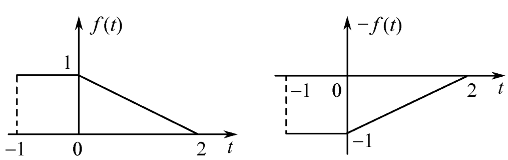
图 1-20

需要注意的是，在用$at$置换$f(t)$中的$t$时，必须同时将$f(t)$定义域中的$t$也换为$at$。

**4. 倒相**

设信号$f(t)$的波形如图 1-21(a) 所示。将$f(t)$的波形以横轴(时间$t$轴)为轴翻转 180°，即得倒相信号$-f(t)$，其波形如图 1-21(b) 所示。可见，信号进行倒相时，横轴(时间$t$轴)上的值不变，仅是纵轴上的值改变了正负号，正值变成了负值，负值变成了正值。倒相也称反相。

信号的倒相用倒相器来实现，如图 1-22 所示。图中$f(t)$为倒相器的输入信号，$y(t)=-f(t)$为倒相器的输出信号。




（a）（b）

图 1-21


图 1-22

**【例 1-8】** 已知信号 $f(1-2t)$ 的波形如图 1-23(a) 所示。试画出 $f(t)$ 的波形。

**解:** 信号 $f(1\text{-}2t)$ 很显然是将信号 $f(t)$ 经过折叠、时移、展缩三种变换后而得到的,但这三种变换的次序则可以是任意的,故共有六种途径。下面用其中的两种途径求解。

方法一:时移 → 折叠 → 展缩

$$f(1-2t)=f\left[-2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\xrightarrow{\text{左时移}\frac{1}{2}}f\left[-2\left(t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=f(-2t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(2t)\xrightarrow{\text{展宽 1 倍}}f\left(2\times\frac{1}{2}t\right)=f(t)$$

其波形依次如图 1-23(b),(c),(d) 所示。

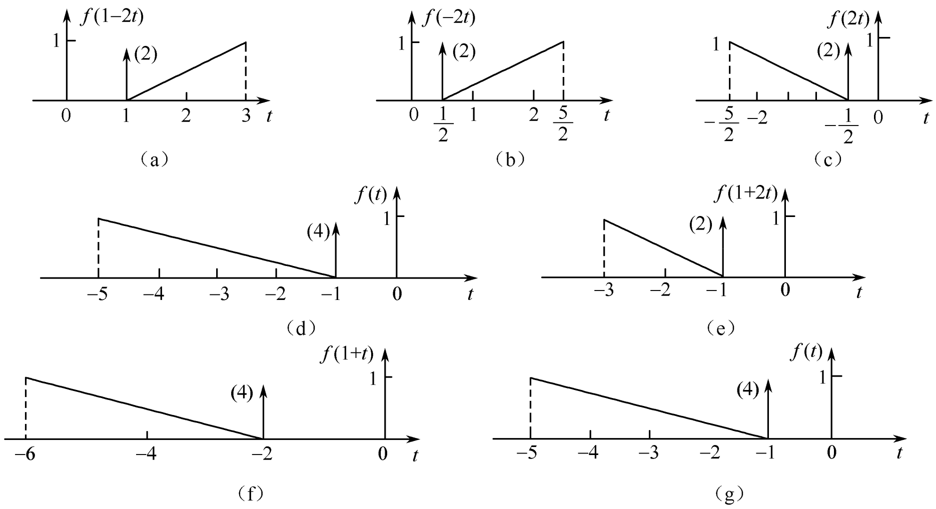


图 1-23

方法二:折叠 → 展缩 → 时移

$$f(1-2t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(1+2t)\xrightarrow{\text{展宽 1 倍}}f\left(1+2\times\frac{1}{2}t\right)$$

$$=f(1+t)\xrightarrow{\text{右时移}}f[1+(t-1)]=f(t)$$

其波形依次如图 1-23(e),(f),(g) 所示。

可见两种途径所得结果完全相同。读者可用其余四种途径再求解之。

## 1.3.2 时域运算

### 1. 相加

将 $n$ 个信号 $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)$ 相加,得相加信号 $y(t)$,即

$$y(t)=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t) \quad n=1,2,3\cdots$$

信号的时域相加运算用加法器实现,如图 1-24 所示。

信号在时域中相加时,横轴(时间 $t$ 轴) 的值不变,仅是与时间 $t$ 轴的值相对应的纵坐标值相加。两个连续时间信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 相加后的信号 $f(t)$ 的波形如图 1-25 所示。

### 2. 相乘

将两个信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 相乘,得相乘信号 $y(t)$,即

$$y(t)=f_1(t)f_2(t)$$

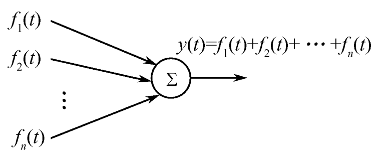



图 1-24

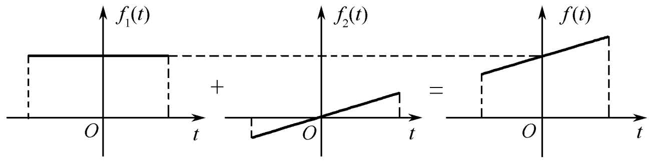



图 1-25

信号的时域相乘运算用乘法器实现,如图 1-26 所示。

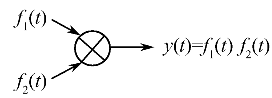



图 1-26

信号在时域中相乘时,横轴(时间 $t$ 轴)的值不变,仅是与时间 $t$ 轴的值相对应的纵坐标值相乘。两个连续时间信号相乘后的信号波形如图 1-27 所示。

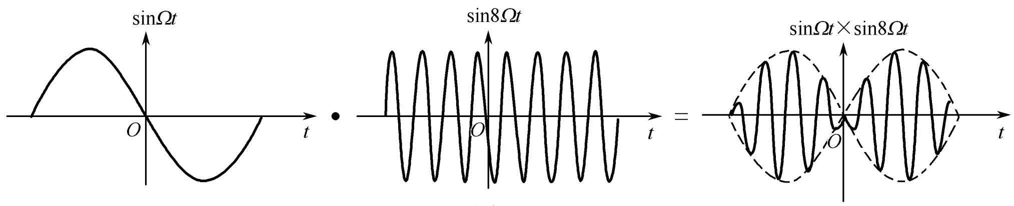



图 1-27

信号处理系统中的抽样器和调制器,都是实现信号相乘运算功能的系统。乘法器也称调制器。

**3. 数乘**

将信号 $f(t)$ 乘以实常数 $a$,称为对信号 $f(t)$ 进行数乘运算,即

$$y(t)=af(t)$$

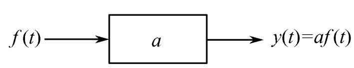



图 1-28

信号的时域数乘运算用数乘器实现,如图 1-28 所示。数乘器也称比例器或标量乘法器。

信号的时域数乘运算,实质上就是在对应的横坐标值上将纵坐标的值扩大到 $a$ 倍($a>1$ 时为扩大;$0<a<1$ 时为缩小)。

**4. 微分**

将信号 $f(t)$ 求一阶导数,称为对信号 $f(t)$ 进行微分运算,所得信号

$$y(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=f'(t)$$

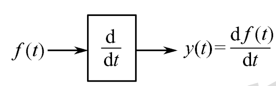



图 1-29

称为信号 $f(t)$ 的微分信号。信号的时域微分运算用微分器实现,如图 1-29 所示。

需要注意的是,当 $f(t)$ 中含有间断点时,则 $f'(t)$ 中在间断点上将有冲激函数存在,其冲激强度为间断点处函数 $f(t)$ 跳变的幅度值。

**5. 积分**

将信号 $f(t)$ 在区间 $(-\infty,t)$ 内求一次积分,称为对信号 $f(t)$ 进行积分运算,所得信号 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 称为信号 $f(t)$ 的积分信号。信号的时域积分运算用积分器实现,如图 1-30 所示。

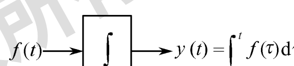



图 1-30

【**例 1-9**】 已知图 1-31(a) 所示半波正弦信号 $f(t)$。(1) 求 $f''(t)$，画出其波形；(2) 求 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$。

**解**：(1) 因为
$$f(t) = \sin t[U(t) - U(t-\pi)]$$
故
$$f'(t) = \cos t[U(t) - U(t-\pi)]$$
$$f''(t) = \delta(t) - \sin t[U(t) - U(t-\pi)] + \delta(t-\pi)$$
$f'(t)$，$f''(t)$ 的波形如图 1-31(b)，(c) 所示。

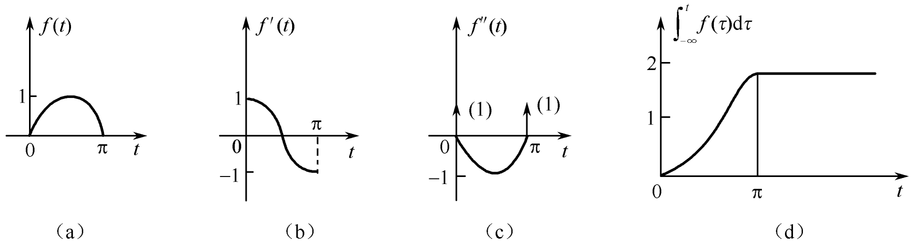



图 1-31

(2) 当 $t < 0$ 时，$f(t) = 0$，故
$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}\tau = 0$$
当 $0 \leqslant t < \pi$ 时，$f(t) = \sin t$，故
$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} f(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} \sin\tau\mathrm{d}\tau = 0 + [-\cos\tau]_0^t = 1 - \cos t$$
当 $t \geqslant \pi$ 时，$f(t) = 0$，故
$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{\pi} \sin\tau\mathrm{d}\tau + \int_{\pi}^{t} 0\mathrm{d}\tau = 0 + [-\cos\tau]_0^{\pi} + 0 = 2$$
故
$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \cos t & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ 2 & t \geqslant \pi \end{cases}$$
其波形如图 1-31(d) 所示。

【**例 1-10**】 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 1-32(a) 所示。(1) 求积分 $\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau)\mathrm{d}\tau$，并画出波形；(2) 求微分 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(6-2t)]$，并画出波形。

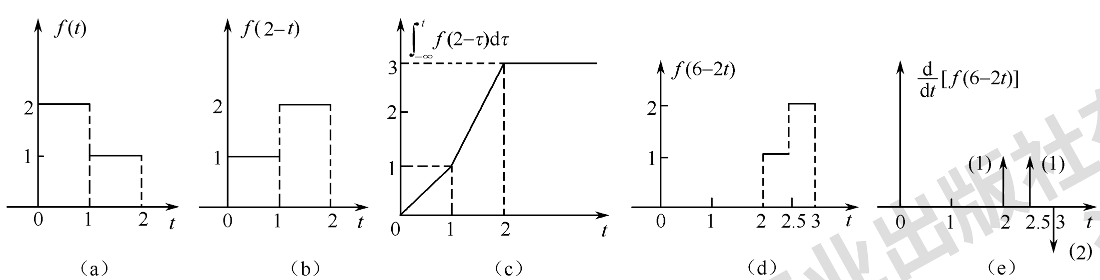



图 1-32

**解**：(1) 因为 $f(2-t) = f[-(t-2)]$，故得 $f(2-t)$ 的波形如图 1-32(b) 所示。

当 $t < 0$ 时，$f(2-t) = 0$，故
$$\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} 0\mathrm{d}\tau = 0$$

当 $0 < t < 1$ 时,$f(2-t)=1$,故

$$\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} 1\mathrm{d}\tau = t$$

当 $1 < t < 2$ 时, $f(2-t)=2$,故

$$\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{1} 1\mathrm{d}\tau + \int_{1}^{t} 2\mathrm{d}\tau = 0 + 1 + (2t-2) = 2t-1$$

当 $t > 2$ 时,$f(2-t)=0$,故

$$\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{1} 1\mathrm{d}\tau + \int_{1}^{2} 2\mathrm{d}\tau + \int_{2}^{t} 0\mathrm{d}\tau = 0+1+2+0=3$$

故得
$$\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 2t-1 & 1 < t < 2 \\ 3 & t > 2 \end{cases}$$

其波形如图 1-32(c) 所示。

(2) 因 $f(6-2t) = f[-2(t-3)]$,故得 $f(6-2t)$ 的波形如图 1-32(d) 所示,其函数表达式为

$$f(6-2t) = U(t-2) + U(t-2.5) - 2U(t-3)$$

故得
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(6-2t)] = \delta(t-2) + \delta(t-2.5) - 2\delta(t-3)$$

其波形如图 1-32(e) 所示。

**【例 1-11】** 画出信号 $f(t)=(t-1)U(t^2-1)$ 和 $f'(t)$ 的波形,并写出 $f'(t)$ 的函数式。

**解**:$(t-1)$ 和 $U(t^2-1)$ 的波形分别如图 1-33(a)、(b) 所示;$f(t)=(t-1)U(t^2-1)$ 的波形如图 1-33(c) 所示;$f'(t)$ 的波形如图 1-33(d) 所示。由图 1-33(d) 可直接写出 $f'(t)$ 的函数式为

$$f'(t) = 2\delta(t+1) + U(t^2-1) = 2\delta(t+1) + U(t-1) + U(-t-1)$$

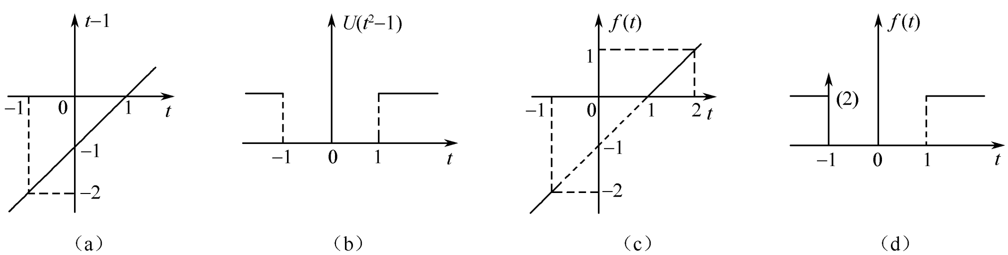



图 1-33

# 1.4 系统的定义与分类

## 1.4.1 系统的定义

系统是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。它能够对信号完成某种变换或运算功能。从数学角度来说,系统可定义为实现某种功能的运算。设符号 $T$ 表示系统的运算,将输入信号(又称激励)$f(t)$ 作用于系统,得到输出信号(又称响应)$y(t)$, 如图 1-34 所示。

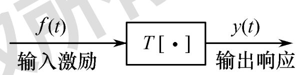



图 1-34

图中符号 $T[\cdot]$ 称为算子,表示将输入激励信号 $f(t)$ 进行某种变换或运算后即得到输出响应信号 $y(t)$。即

$$y(t)=T[f(t)]$$

例如,在 1.3.1 节和 1.3.2 节中引入的延时器、预测器、倒相器、加法器、乘法器、数乘器、微分器、积分器等都是系统,因为它们都能够对信号实现一定的变换或运算功能。

任一个大系统(如通信系统、控制系统、电力系统、计算机系统等)都可分解为若干个互相联系、互相作用的子系统。各子系统之间通过信号联系,信号在系统内部及各子系统之间流动。

### 1.4.2 系统的分类

根据不同的分类原则,系统可分为以下几种。

#### 1. 动态系统与静态系统

若系统在 $t_0$ 时刻的响应 $y(t_0)$ 不仅与 $t_0$ 时刻作用于系统的激励有关,而且与区间$(-\infty,t_0)$内作用于系统的激励有关,这样的系统称为动态系统,也称具有记忆能力的系统(简称记忆系统)。凡含有记忆元件(如电感器、电容器、磁心等)与记忆电路(如延时器)的系统均为动态系统。

若系统在 $t_0$ 时刻的响应 $y(t_0)$ 只与 $t_0$ 时刻作用于系统的激励有关,而与区间$(-\infty,t_0)$内作用于系统的激励无关,这样的系统称为静态系统或非动态系统,也称无记忆系统。只含有电阻元件的电路即为静态系统。

#### 2. 线性系统与非线性系统

凡能同时满足齐次性与叠加性的系统称为线性系统。满足叠加性仅是线性系统的必要条件。

凡不能同时满足齐次性与叠加性的系统称为非线性系统。

若电路中的无源元件全部是线性元件,则这样的电路系统一定是线性系统,但不能说含有非线性元件的电路系统就一定是非线性系统。

#### 3. 时不变系统与时变系统

设激励 $f(t)$ 产生的响应为 $y(t)$,若激励 $f(t-t_0)$ 产生的响应为 $y(t-t_0)$,如图 1-35 所示,此性质即称为时不变性,也称非时变性或定常性、延迟性。它说明,当激励 $f(t)$ 延迟时间 $t_0$ 时,其响应 $y(t)$ 也同样延迟时间 $t_0$,且波形不变。

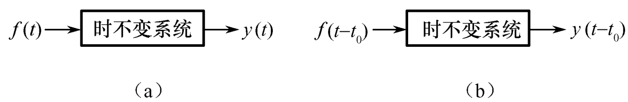



图 1-35

凡能满足时不变性的系统称为时不变系统(也称非时变系统或定常系统),否则为时变系统。

若系统中元件的参数不随时间变化,则这样的系统一定是时不变系统。

#### 4. 因果系统与非因果系统

当 $t>0$ 时作用于系统的激励,在 $t<0$ 时不会在系统中产生响应,此性质称为因果性。它说明激励是产生响应的原因,响应是激励产生的结果。无原因即不会有结果,例如我们绝不会在昨天就听见了今天打钟的钟声。

凡具有因果性的系统称为因果系统;凡不具有因果性的系统称为非因果系统。

任何时间系统都具有因果性,因而都是因果系统。这是因为时间具有单方向性,时间是一去不复返的。非时间系统是否具有因果性,则要看它的自变量是否具有单方向性。一个较复杂的光学

系统,即使其输入的物是单侧的,其输出的像也可能是双侧的,它就不具有因果性。在用计算机对数据进行事后处理时,可以由输入和输出之间的相对延时实现某些非因果操作。

时间因果系统是可以用硬件实现的,故也称可实现系统。时间非因果系统是不能用硬件实现的,故也称不可实现系统。

时间非因果系统在客观世界中是不存在的,但研究它的数学模型却有助于对时间因果系统的分析,可以借助延时的处理方法来逼近时间非因果系统。因此,在系统分析中,对时间非因果系统的研究也有一定意义。

由于一般都是以 $t=0$ 时刻作为计算时间的起点,从而定义了从零时刻开始的信号称为因果信号。所以,在因果信号的激励下,因果系统的响应信号也必然是因果信号。

**5. 连续时间系统与离散时间系统**

若系统的输入信号与输出信号均为连续时间信号,则这样的系统称为连续时间系统,也称模拟系统,简称连续系统。由 R,L,C 等元件组成的电路都是连续时间系统的例子。

若系统的输入信号与输出信号均为离散时间信号,则这样的系统称为离散时间系统,简称离散系统。数字计算机是典型的离散时间系统。

由连续时间系统与离散时间系统组合而成的系统称为混合系统。

**6. 集总参数系统与分布参数系统**

仅由集总参数元件组成的系统称为集总参数系统。含有分布参数元件的系统称为分布参数系统(如传输线、波导等)。

系统的分类还有其他许多方法,其中有些将在本书有关章节中引入。本书仅限于研究在确定性信号激励下的集总参数、线性、时不变系统(以后简称线性系统),包括连续时间系统与离散时间系统。

**【例 1-12】** 若 $T[f(t)]=af(t)+b=y(t)$,问该系统是否为线性系统?

**解:** 因为
$$T[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]=a[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]+b$$
而
$$\begin{aligned}k_1y_1(t)+k_2y_2(t)&=k_1T[f_1(t)]+k_2T[f_2(t)]\\&=k_1[af_1(t)+b]+k_2[af_2(t)+b]\\&=a[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]+bk_1+bk_2\end{aligned}$$
显然
$$T[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]\neq k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$$
故系统为非线性系统。

**【例 1-13】** 判断系统:$\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0y(t)=b_0f(t)+b_1\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 是否为线性系统?

**解:** 设 $f_1(t)\rightarrow y_1(t)$,$f_2(t)\rightarrow y_2(t)$;由已知方程得
$$k_1\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t)+a_0y_1(t)\right]=k_1\left[b_0f_1(t)+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)\right]\tag{1}$$
$$k_2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t)+a_0y_2(t)\right]=k_2\left[b_0f_2(t)+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)\right]\tag{2}$$
将式(1) + 式(2) 得
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(t)}[k_1y_1(t)+k_2y_2(t)]+a_0[k_1y_1(t)+k_2y_2(t)]$$
$$=b_0[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]+b_1\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]\right\}$$

即 $$k_1f_1(t)+k_2f_2(t)\longrightarrow k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$$
故系统是线性系统。

**【例 1-14】** 判断下列系统的因果性:

(1) $T[f(t)]=y(t)=f(t-2)$　　(2) $T[f(t)]=y(t)=f(t+2)$

**解:**(1) 因为 $$y(t)=f(t-2)$$
输出值只取决于输入的过去值, 如 $t=6$ 时,输出 $y(6)=f(4)$,故为因果系统。

(2) 因为 $$y(t)=f(t+2)$$
输出值取决于输入的将来值,如 $t=6$ 时,$y(6)=f(8)$,故为非因果系统。

## 1.5　线性时不变系统的性质

在系统理论中,线性时不变系统(Linear time-invariant system)的分析占有特殊的重要地位,其一些重要的性质在电路基础课中已有所介绍,在此再予以总结,以便给读者一个完整的概念。

(1) 齐次性

若激励 $f(t)$ 产生的响应为 $y(t)$,则激励 $Af(t)$ 产生的响应为 $Ay(t)$,如图 1-36 所示。此性质即为齐次性,其中 $A$ 为任意常数。


图 1-36

(2) 叠加性

若激励 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 产生的响应分别为 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$,则激励 $f_1(t)+f_2(t)$ 产生的响应为 $y_1(t)+y_2(t)$,如图 1-37 所示。此性质称为叠加性。

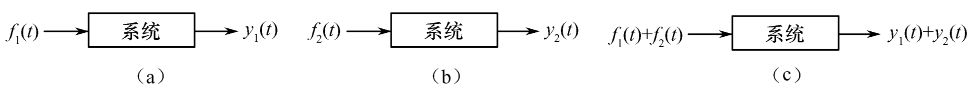



图 1-37

(3) 线性

若激励 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 产生的响应分别为 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$,则激励 $A_1f_1(t)+A_2f_2(t)$ 产生的响应为 $A_1y_1(t)+A_2y_2(t)$,如图 1-38 所示。此性质称为线性。

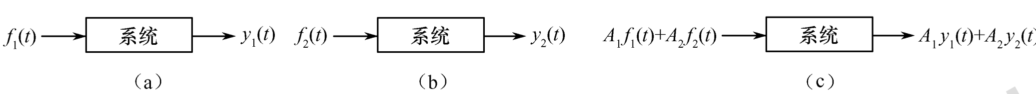



图 1-38

(4) 时不变性

若激励 $f(t)$ 产生的响应为 $y(t)$,则激励 $f(t-t_0)$ 产生的响应为 $y(t-t_0)$,如图 1-39 所示。此性质称为时不变性,也称定常性或延迟性。它说明当激励 $f(t)$ 延迟时间 $t_0$ 时,其响应 $y(t)$ 也延迟时间 $t_0$,且波形不变。

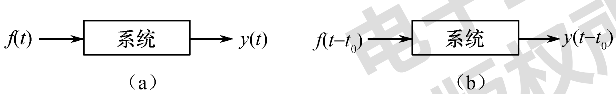



图 1-39

(5) 微分性

若激励 $f(t)$ 产生的响应为 $y(t)$，则激励 $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 产生的响应为 $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$，如图 1-40 所示。此性质即为微分性。

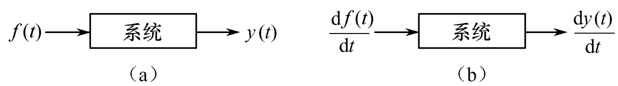



图 1-40

(6) 积分性

若激励 $f(t)$ 产生的响应为 $y(t)$，则激励 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 产生的响应为 $\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$，如图 1-41 所示。此性质称为积分性。

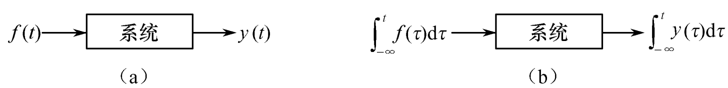



图 1-41

## 1.6 线性系统分析概论

本书仅限于研究确定信号激励下的集总参数、线性、时不变系统，简称线性系统，包括连续时间系统与离散时间系统。

对系统的研究包含三个方面：系统分析、系统综合与系统诊断。给定系统的结构、元件特性，研究系统对激励信号所产生的响应，这称为系统分析，如图 1-42(a) 所示。若已知系统的响应，而要求出系统的结构与元件特性，这称为系统综合，如图 1-42(b) 所示。若给定系统的结构与系统的响应，而要求出系统元件的特性变化，这称为系统诊断，如图 1-42(c) 所示。系统分析、综合与诊断，三者密切相关，但又有各自的体系和研究方法。学习系统分析是学习系统综合与诊断的基础。本书仅限于对系统分析的研究。

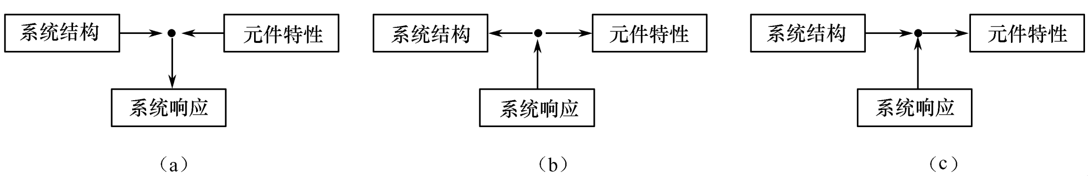



图 1-42

信号分析与系统分析密不可分。对信号进行传输与加工处理，必须借助于系统；离开了信号，系统将失去意义。分析系统就是分析某一特定信号，分析信号与信号的相互作用。所以信号分析是系统分析的基础。

线性系统分析的方法可归结为两种：

(1) 输入／输出法与状态变量法；

(2) 时域法与变域法(傅里叶变换法，拉普拉斯变换法，$Z$ 变换法)。

本书将按先输入／输出法后状态变量法，先时域法后变域法，先连续时间系统后离散时间系统

的顺序,研究线性时不变系统的基本分析方法,并结合电子系统与控制系统中的一般问题,较深入地介绍这些方法在信号传输与处理以及控制系统方面的基本应用。

本课程的基本任务是:

(1) 研究信号分析的方法,研究信号的时间特性与频率特性以及两者之间的关系;

(2) 研究线性时不变系统(包括连续时间系统与离散时间系统) 在任意信号激励下响应的各种求解方法,从而认识系统的基本特性。

读者在学习本课程时应注意以下原则:物理语言描述与数学语言描述并重;信号分析与系统分析并重;输入/输出法与状态变量法并重;时域分析法与变域分析法并重;连续时间系统与离散时间系统并重;学理论、做习题与做实验并重。

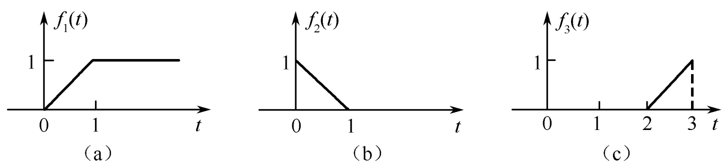
二维码 1-3

本章要点和秘笈见二维码 1-3。

**习题 1**

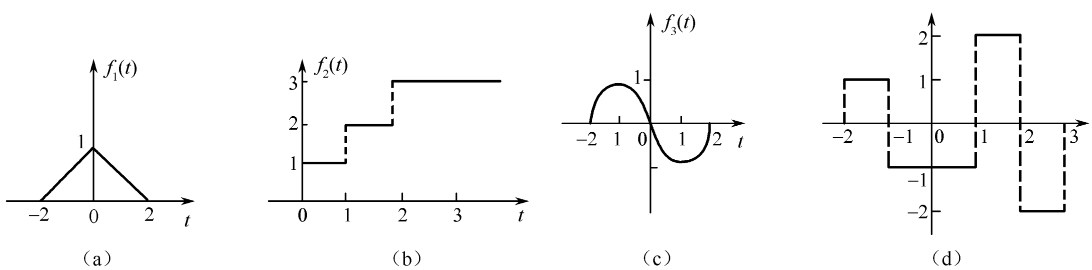
1-1 画出下列各信号的波形:(1) $f_1(t) = (2 - e^{-t})U(t)$; (2) $f_2(t) = e^{-t}\cos 10\pi t \times [U(t-1) - U(t-2)]$。

1-2 已知各信号的波形如图题 1-2 所示,试写出它们各自的函数式。




图题 1-2

1-3 写出图题 1-3 所示各信号的函数表达式。




图题 1-3

1-4 画出下列各信号的波形:

(1) $f_1(t) = U(t^2 - 1)$; (2) $f_2(t) = (t-1)U(t^2-1)$; (3) $f_3(t) = U(t^2 - 5t + 6)$; (4) $f_4(t) = U(\sin\pi t)$。

1-5 判断下列各信号是否为周期信号,若是周期信号,求其周期 $T$。

(1) $f_1(t) = 2\cos\left(3t - \dfrac{\pi}{4}\right)$; (2) $f_2(t) = \left[\sin\left(t - \dfrac{\pi}{6}\right)\right]^2$; (3) $f_3(t) = 3\cos 2\pi t U(t)$。

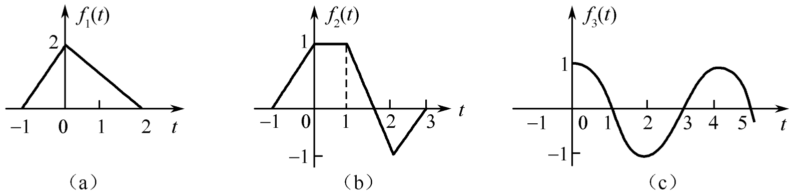
1-6 化简下列各式:

(1) $\int_{-\infty}^{t}\delta(2\tau - 1)\mathrm{d}\tau$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)\delta(t)\right]$; (3) $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos t\delta(t)]\sin t\mathrm{d}t$。

1-7 求下列积分:

(1) $\int_{0}^{\infty}\cos[\omega(t-3)]\delta(t-2)\mathrm{d}t$; (2) $\int_{0}^{\infty}e^{j\omega t}\delta(t+3)\mathrm{d}t$; (3) $\int_{0}^{\infty}e^{-2t} \times \delta(t_0 - t)\mathrm{d}t$。

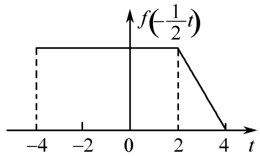
1-8 试求图题 1-8 中各信号一阶导数的波形,并写出其函数表达式,其中 $f_3(t) = \cos\dfrac{\pi}{2}t[U(t) - U(t-5)]$。



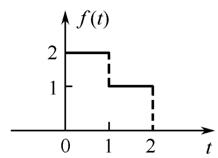

图题 1-8

1-9　已知信号$f\left(-\dfrac{1}{2}t\right)$的波形如图题 1-9 所示，试画出 $y(t) = f(t+1)U(-t)$ 的波形。

1-10　已知信号$f(t)$的波形如图题 1-10 所示，试画出信号$\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau)\mathrm{d}\tau$ 与信号$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(6-2t)]$的波形。




图题 1-9




图题 1-10

1-11　已知$f(t)$是已录制的声音磁带，则下列叙述中错误的是（　　　　）。

A. $f(-t)$ 是表示将磁带倒转播放产生的信号　　B. $f(2t)$ 表示磁带以二倍的速度加快播放

C. $f(2t)$ 表示磁带放音速度降低一半播放　　D. $2f(t)$ 表示将磁带音量放大一倍播放

1-12　试判断下列各方程所描述的系统是否为线性的、时不变的、因果的系统。式中$f(t)$为激励，$y(t)$为响应。

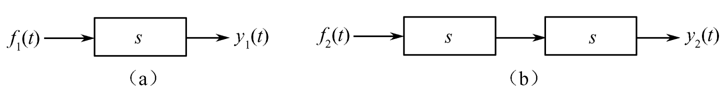
（1）$y(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$　（2）$y(t) = f(t)U(t)$　（3）$y(t) = \sin[f(t)]U(t)$　（4）$y(t) = f(1-t)$

（5）$y(t) = f(2t)$　（6）$y(t) = [f(t)]^2$　（7）$y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$　（8）$y(t) = \int_{-\infty}^{5t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$

1-13　已知系统的激励$f(t)$与响应$y(t)$的关系为：$y(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau$，则该系统为（　　　　）。

A. 线性时不变系统　B. 线性时变系统　C. 非线性时不变系统　D. 非线性时变系统

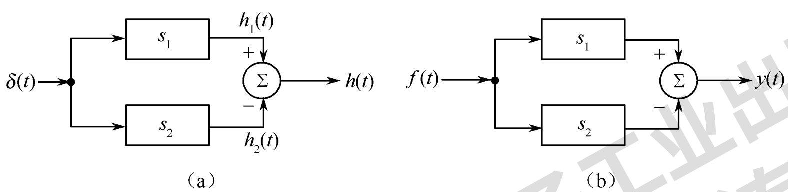
1-14　图题 1-14(a) 所示为线性时不变系统，已知当激励$f_1(t) = U(t)$时，其响应为$y_1(t) = U(t) - 2U(t-1) + U(t-2)$。若激励为$f_2(t) = U(t) - U(t-2)$，求图题 1-14(b) 所示系统的响应$y_2(t)$。




图题 1-14

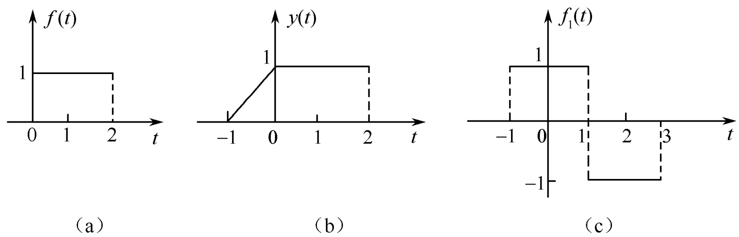
1-15　图题 1-15(a) 所示为线性时不变系统，已知 $h_1(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$，$h_2(t) = \delta(t-2) - \delta(t-3)$。

（1）求响应 $h(t)$；　（2）当$f(t) = U(t)$时，如图题 1-15(b) 所示 求相应响应 $y(t)$。




图题 1-15

1-16　已知线性时不变系统激励$f(t)$的波形如图题 1-16(a) 所示，所产生的响应$y(t)$的波形如图题 1-16(b) 所示。试求当激励$f_1(t)$的波形如图题 1-16(c) 所示时，该系统所产生的响应$y_1(t)$的波形。




图题 1-16

1-17　已知线性时不变系统在信号 $\delta(t)$ 激励下的零状态响应为 $h(t)=U(t)-U(t-2)$。试求该系统在信号 $U(t-1)$ 激励下的零状态响应 $y(t)$，并画出 $y(t)$ 的波形。

1-18　线性非时变系统具有非零的初始状态，已知激励为 $f(t)$ 时的全响应为 $y_1(t)=2e^{-t}U(t)$；在相同的初始状态下，当激励为 $2f(t)$ 时的全响应为 $y_2(t)=(e^{-t}+\cos\pi t)U(t)$。求在相同的初始状态下，当激励为 $4f(t)$ 时的全响应 $y_3(t)$。