

第 3 章 正弦稳态电路分析

在第 1 章中对直流电阻电路进行了分析，即激励均为直流，电路元件为电阻；第 2 章对动态电路进行了分析，电路中加入了动态元件，激励也不限于直流。本章将讨论激励为正弦信号时，动态电路的响应问题，也就是正弦激励下的电路分析问题。通常称正弦激励下电路的稳定状态为正弦稳态。在实际应用中，正弦稳态分析都是极其重要的，如电力系统中的电压、电流及电源几乎都为正弦函数形式，大多数问题都可以用正弦稳态分析来解决，还有许多电气设备的设计、性能指标都是按正弦稳态来考虑的。因此，对正弦稳态电路进行分析和研究是十分有必要的。

本章首先介绍正弦量及其相量表示，以及两类约束的相量形式；其次介绍正弦稳态电路的分析方法及功率计算；再次介绍谐振电路和理想变压器电路的分析；最后介绍三相电路的特点和分析。

3.1 正弦稳态电路中的基本概念

3.1.1 正弦量

1. 正弦量的定义

正弦量是指具有正弦或余弦函数形式的信号，在 2.2 节描述典型信号中已经做了初步介绍。这里将大小和方向随时间做正弦规律变化的电压、电流等电学量统称正弦交流电或正弦量。

正弦电流和电压在任意时刻的大小称为瞬时值，用小写字母表示，可分别表示为

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \theta_i) \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \theta_u) \end{aligned} \tag{3.1-1}$$

其波形如图 3-1 所示。描述一个正弦量主要包含振幅、角频率和相位三个要素。

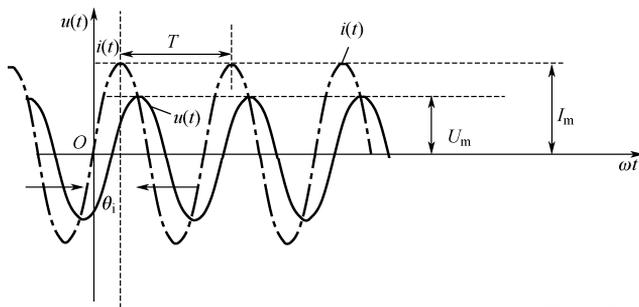


图 3-1 正弦量波形

例 3-1 已知正弦交流电的频率是 50Hz, 试求该正弦交流电的周期和角频率各是多少?

解: 由已知 $f=50\text{Hz}$, 根据频率 f 、周期 T 和角频率 ω 三者之间的关系可得

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0.02\text{s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad/s}$$

例 3-2 已知正弦电压的振幅为 5V, 周期为 100ms, 初相为 $\frac{\pi}{4}$ 。试写出正弦电压的函数表达式。

解:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{100 \times 10^{-3}} = 20\pi$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u)$$

$$= 5 \cos(20\pi t + \frac{\pi}{4}) \text{ V}$$

2. 正弦量的相位差

在同频正弦电源激励下, 线性时不变电路的稳态响应仍是同频率的正弦信号, 这些信号的三要素中频率相同, 不同的是振幅和初相。设同频率的两个正弦电流分别为

$$i_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \theta_1) \quad i_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \theta_2) \quad (3.1-2)$$

它们之间的相位之差为

$$\varphi = (\omega t + \theta_1) - (\omega t + \theta_2) = \theta_1 - \theta_2 \quad (3.1-3)$$

因此, 称同频率的两个正弦量的相位之差, 即初相之差, 为相位差。它描述了同频率正弦量之间的相位关系。通常规定 $|\varphi| \leq \pi$ 。

根据相位差的大小, 可以对波形的相位关系进行如下分析。

(1) 若 $\varphi > 0$, 即 $\varphi = \theta_1 - \theta_2 > 0 \Rightarrow \theta_1 > \theta_2$, 如图 3-2 (a) 所示, $i_1(t)$ 比 $i_2(t)$ 先到达最大值, 称 $i_1(t)$ 超前 $i_2(t)$ 一个 φ 角, 或者称 $i_2(t)$ 滞后 $i_1(t)$ 一个 φ 角。

(2) 若 $\varphi < 0$, 即 $\varphi = \theta_1 - \theta_2 < 0 \Rightarrow \theta_1 < \theta_2$, 如图 3-2 (b) 所示, $i_1(t)$ 比 $i_2(t)$ 后到达最大值, 称 $i_1(t)$ 滞后 $i_2(t)$ 一个 φ 角, 或者称 $i_2(t)$ 超前 $i_1(t)$ 一个 φ 角。

(3) 若 $\varphi = 0$, 即 $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$, 如图 3-2 (c) 所示, 则 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 同时到达最大值和零值, 称 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 同相。

(4) 若 $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, 即 $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \pm \frac{\pi}{2}$, 如图 3-2 (d) 所示, 则称 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$

相位正交。

(5) 若 $\varphi = \pm \pi$, 即 $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \pm \pi \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \pm \pi$, 如图 3-2 (f) 所示, 则称 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 相位反相。

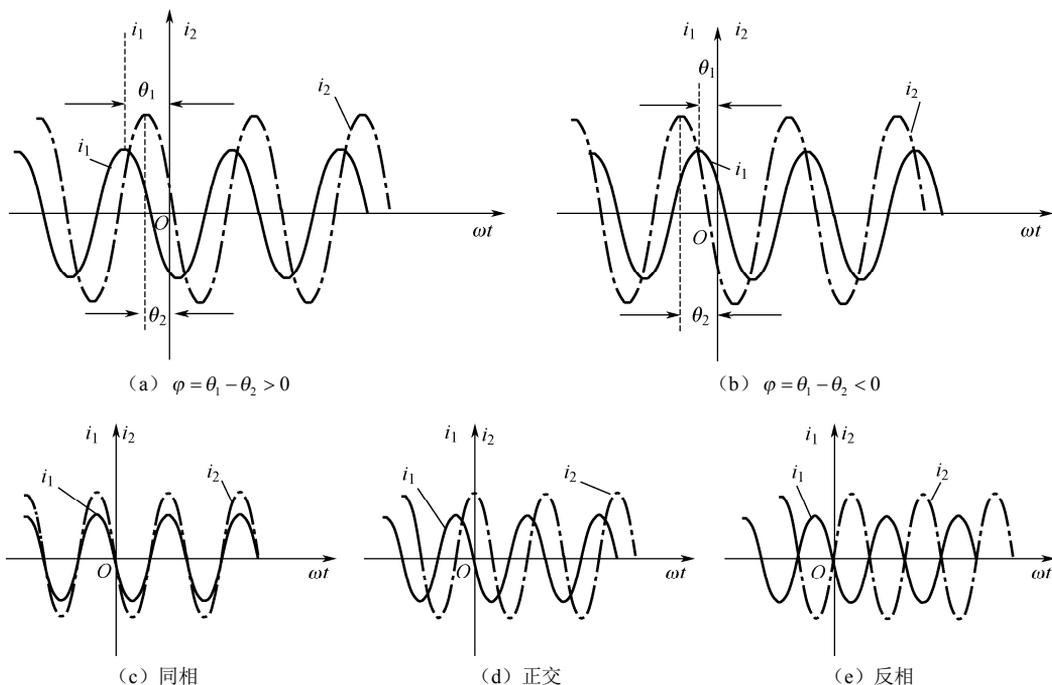


图 3-2 同频正弦量的相位差

例 3-3 已知正弦电压 $u(t)=10\cos(10^3t+60^\circ)$ ，正弦电流 $i(t)=2\cos(10^3t+120^\circ)$ ，求 $u(t)$ 与 $i(t)$ 之间的相位差。

解： 相位差 $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = 60^\circ - 120^\circ = -60^\circ$ ，即电压 $u(t)$ 滞后 $i(t)$ 60° 角，或者说电流超前电压 60° 角。

例 3-4 已知正弦电压和电流分别为 $u(t)=10\sqrt{2}\cos(314t-45^\circ)$ V， $i(t)=5\cos(314t-90^\circ)$ A，求正弦电压与电流的相位差，画出波形图。

解： 正弦电压与电流的相位差为

$$\varphi = \theta_u - \theta_i = -45^\circ - (-90^\circ) = 45^\circ$$

即 $u(t)$ 超前 $i(t)$ 45° 角，或者称 $i(t)$ 滞后 $u(t)$ 45° 角。电压和电流的波形如图 3-3 所示。

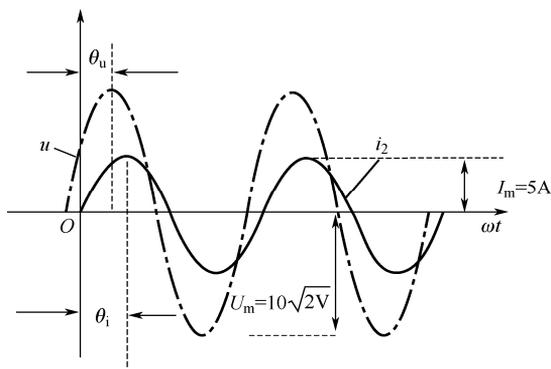


图 3-3 例 3-4 图

电子工业出版社有限公司
版权所有 盗版必究

3. 正弦量的有效值

周期信号有一个非常重要的量就是有效值。在对正弦信号进行研究时，除了随时间变化的瞬时值，有时在工程上为了衡量其效应还需要研究其平均效果，因此引出了有效值的概念。有效值的概念源于对交流电源传递给阻性负载的功率效率进行测量的需要。

以周期电流 $i(t)$ 为例，它的有效值 I 定义为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3.1-4)$$

即为 $i(t)$ 的方均根值，有效值通常用大写字母来表示。

正弦电压或电流的有效值是振幅值的 0.707 倍，即对正弦交流电，有

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707I_m \quad (3.1-5)$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707U_m \quad (3.1-6)$$

引入有效值后，正弦电流和电压也可以写成如下形式。

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \theta_i) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \theta_u) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta_u) \end{aligned} \quad (3.1-7)$$

例 3-5 如图 3-4 所示稳态电路中， $u_s(t) = 20 \cos 10^6 t$ mV，则电流 $i(t)$ 的有效值是多少。

$$\text{解： } i(t) = \frac{u_s(t)}{R} = \frac{20 \cos 10^6 t}{10} = 2 \cos 10^6 t \text{ mA}$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ mA}$$

有效值的概念在实际电路中应用十分广泛，电力公司一般用的就是有效值，而不是峰值标称电压或电流的大小，如民用日常生活中的电压 220V，指的就是有效值。在功率分析中，用有效值来表示电压、电流非常方便，这在后面几节中会继续讨论。



图 3-4 例 3-5 图

3.1.2 正弦量的相量表示及计算

在交流电路分析中，常常需要对正弦电压或电流进行代数运算，在时域进行这样的分析比较烦琐耗时，甚至有时是十分困难的。为了方便地对正弦激励的线性电路进行分析，美国的电机工程师斯坦梅茨（Charles Proteus Steinmetz, 1865—1923）于 1893 年提出了利用相量求解此类问题的方法。相量概念的提出，为分析由正弦激励的线性电路提供了一种简单可行的方法，在学习此方法之前，需要复习有关复数的知识。

1. 复数的表示及运算

复数 A 可以有以下几种数学表达式。

(1) 直角坐标形式： $A = a + jb$

其中 $j = \sqrt{-1}$ （这里用 j 表示虚数单位主要是区别于电流的表示 i ）， a 和 b 分别为复数 A 的实部和虚部，用 Re 和 Im 分别表示取实部和虚部，则可表示为 $a = \text{Re}[A]$ ， $b = \text{Im}[A]$ 。

(2) 三角形式: $A = |A|(\cos\theta + j\sin\theta)$

式中, $|A|$ 是复数 A 的模值, θ 为复数 A 的辐角。

$$\begin{cases} |A| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan \frac{b}{a} \end{cases}, \begin{cases} a = |A|\cos\theta \\ b = |A|\sin\theta \end{cases}$$

(3) 指数形式或极坐标形式: $A = |A|e^{j\theta}$ 或 $A = |A|\angle\theta$

复数的直角坐标形式和极坐标形式之间的关系可以用图 3-5 来表示, 图中横轴表示复数的实部, 纵轴表示复数的虚部。

从图 3-5 中可以看出, 复数还可在复平面内用一条有向线段表示。

在进行复数运算时, 复数的加减运算采用直角坐标形式更为方便, 而乘除运算则采用极坐标或指数形式更为方便。如给定:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 + jb_1 = |A_1|\angle\theta_1 \\ A_2 &= a_2 + jb_2 = |A_2|\angle\theta_2 \end{aligned}$$

则复数的四则运算采用如下形式更佳。

加法: $A_1 + A_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

减法: $A_1 - A_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

乘法: $A_1 A_2 = |A_1|\angle\theta_1 \times |A_2|\angle\theta_2 = |A_1||A_2|\angle(\theta_1 + \theta_2)$

除法: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{|A_1|\angle\theta_1}{|A_2|\angle\theta_2} = \frac{|A_1|}{|A_2|}\angle(\theta_1 - \theta_2)$

例 3-6 计算如下复数的值。

(1) $20\angle 60^\circ + 10\angle -30^\circ$; (2) $\frac{3+4j}{1+j}$ 。

解: (1) 由于是加减运算, 因此选用直角坐标形式计算更为方便, 首先将极坐标形式转换为直角坐标形式。

$$20\angle 60^\circ = 20(\cos 60^\circ + j\sin 60^\circ) = 20 \times (0.5 + j0.866) = 10 + j17.32$$

$$10\angle -30^\circ = 10[\cos(-30^\circ) + j\sin(-30^\circ)] = 10 \times (0.866 - j0.5) = 8.66 - j5$$

将上述两式结果相加得

$$\begin{aligned} &20\angle 60^\circ + 10\angle -30^\circ \\ &= (10 + j17.32) + (8.66 - j5) \\ &= (10 + 8.66) + j(17.32 - 5) \\ &= 18.66 + j12.32 = 22.36\angle 33.43^\circ \end{aligned}$$

(2) 对于乘除运算, 选用复数的指数形式或极坐标形式计算更为方便, 因此需要将原算式中的直角坐标形式转换为指数形式或极坐标形式, 这里选用极坐标形式。

$$3+4j = \sqrt{3^2+4^2}\angle\arctan\frac{4}{3} = 5\angle 53^\circ$$

$$1+j = \sqrt{1+1}\angle\arctan 1 = \sqrt{2}\angle 45^\circ$$

然后按照复数除法规则, 复数相除, 模相除, 辐角相减, 可以得到

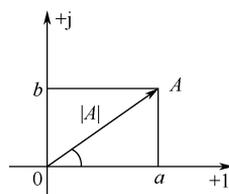


图 3-5 复数图

$$\frac{3+4j}{1+j} = \frac{5\angle 53^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} = \frac{5}{2}\sqrt{2}\angle(53^\circ - 45^\circ) = \frac{5}{2}\sqrt{2}\angle 8^\circ$$

通过本题的练习可知, 进行加减运算时, 复数采用直角坐标形式比较方便, 而当进行乘除运算时, 复数可采用指数或极坐标形式。

2. 正弦量的相量表示

相量表示的依据是欧拉公式, 即

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

根据欧拉公式, 正弦量可写为

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \theta_i) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}Ie^{j(\omega t + \theta_i)}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2}Ie^{j\theta_i}e^{j\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (3.1-8)$$

式中, $\dot{I} = Ie^{j\theta_i} = I\angle\theta_i$ 为有效值相量, $\dot{I}_m = \sqrt{2}Ie^{j\theta_i} = I_m\angle\theta_i$ 为振幅相量。相量中包含了正弦量三要素中的两个要素——幅值(或有效值)和初相, 即相量是正弦信号的幅度与相位的复数表示。相量字母符号上的“•”表示相量与一般的复数不同, 它表示一个正弦量从时域到频域的变换。

引入相量后, 正弦电流、电压可以在时域和频域内存在以下对应关系。

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \theta_i) \leftrightarrow \dot{I}_m = I_m e^{j\theta_i} = I_m \angle \theta_i \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \theta_u) \leftrightarrow \dot{U}_m = U_m e^{j\theta_u} = U_m \angle \theta_u \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} i(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) \leftrightarrow \dot{I} = Ie^{j\theta_i} = I\angle\theta_i \\ u(t) &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta_u) \leftrightarrow \dot{U} = Ue^{j\theta_u} = U\angle\theta_u \end{aligned}$$

上式表明, 正弦量转换为相量形式时, 需要将正弦量三要素中的频率信息去掉, 只保留幅度与初相即可得到对应的相量形式, 反之亦然。通过这种变换, 即可实现正弦量与相量之间的相互表示。这种对应关系, 实质上是一种“变换”, 正弦量的时域瞬时表示形式可以变换为与时间无关的频域相量形式; 反之亦然, 相量(加上已知的频率信息)可以变换为正弦量的瞬时形式。需要注意的是: 这种互相变换的形式, 只适用于单一频率的情况下, 即只有当两个或多个正弦量具有相同的频率时, 才能应用相量进行计算。

例 3-7 已知 $\dot{I} = 5\angle 30^\circ \text{A}$, 试写出电流的瞬时值表达式。

解: 根据相量和正弦量之间的转换关系, 可以得到电流的瞬时值表达式为

$$i(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ) \text{A}$$

例 3-8 已知正弦电压的周期为 $T = 10^6 \text{s}$, 电压相量为 $\dot{U} = 5\sqrt{2}\angle 30^\circ \text{V}$, 试写出电压的瞬时值表达式。

解: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10^6} = 2\pi \times 10^{-6} \text{ rad/s}$

由于电压相量为 $\dot{U} = 5\sqrt{2}\angle 30^\circ \text{V}$, 可得电压的瞬时值表达式为

$$\begin{aligned} u(t) &= 5\sqrt{2} \times \sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ) \text{V} \\ &= 10\cos(2\pi \times 10^{-6}t + 30^\circ) \text{V} \end{aligned}$$

相量图:

与复数相同,相量在复平面上可用一条有向线段表示,这种表示相量的图称为相量图。同样需要注意的是:只有同频率的相量才能在同一复平面内表示出来。相量图在分析正弦稳态电路时,提供了另一种解题思路,在计算较为复杂或无法直接计算结果时,可借助相量图来分析电路。画相量图时可省掉虚轴,用虚线代替实轴,如图3-6所示。

例 3-9 已知 $u(t) = 20\cos(314t - 45^\circ)\text{V}$, 试用相量表示 $u(t)$, 并画出相量图。

解: 由电压的瞬时值表达式得到有效值相量为

$$\dot{U} = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 10\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{V}$$

其相量图如图3-7所示。

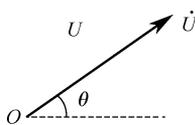


图 3-6 相量图

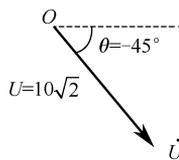


图 3-7 例 3-9 图

3. 正弦量的相量运算

引入相量的概念后,可大大简化同频正弦量的运算。相量运算与复数运算相同,下面列出同频正弦量运算与相应的相量之间的对应关系。

(1) 时域正弦信号相加减对应于频域相量相加减。

$$i(t) = i_1(t) \pm i_2(t) \leftrightarrow \dot{I} = \dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 \quad (3.1-9)$$

(2) 时域正弦信号幅值扩大 A 倍对应于频域相量乘以 A 。

$$Ai(t) \leftrightarrow A\dot{I} \quad (3.1-10)$$

例 3-10 已知正弦量 $u_1(t) = 6\sqrt{2}\cos(50t - 30^\circ)\text{V}$, $u_2(t) = 8\sqrt{2}\cos(50t + 60^\circ)\text{V}$, 求 $u_1(t) + u_2(t)$ 的值。

解: u_1 和 u_2 为同频交流电,取它们的有效值和初相即构成相量。它们的和或差仍为同频率的正弦量,可用相量法进行计算。

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= 6 \angle -30^\circ \text{V} = 3\sqrt{3} - j3 \text{V} \\ \dot{U}_2 &= 8 \angle 60^\circ \text{V} = 4 + j4\sqrt{3} \text{V} \\ \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6 \angle -30^\circ + 8 \angle 60^\circ \\ &= (3\sqrt{3} - j3) + (4 + j4\sqrt{3}) \\ &= 9.196 + j3.928 \\ &= 10 \angle 23.13^\circ \text{V} \end{aligned}$$

将上述结果转换回时域得到时域表达式为

$$u_1(t) + u_2(t) = 10\sqrt{2}\cos(50t + 23.13^\circ)\text{V}$$

在电路分析中,常会遇到正弦量的加减运算,可以像上述例题所示,将时域的正弦量的计算变换为对应的频域相量计算,通过这种变换可以使计算变得简单。在频域求出结果后,可以再通过相量和正弦量的变换,将结果转换回时域,得到最终的时域表达式。

3.2 正弦稳态电路方程建立的依据

3.2.1 两类约束关系的相量形式

两类约束关系是分析电路问题的基本依据。在频域中对电路进行分析时，同样需要依据两类约束关系。因此，本节将主要讨论两类约束关系在频域中的形式，首先分析拓扑约束即基尔霍夫电压定律和基尔霍夫电流定律的相量形式，然后分析元件约束即基本元件两端伏安关系的相量形式。

1. 基尔霍夫定律的相量形式

KCL 的内容为：对于集总参数电路中的任意节点，任一时刻流入或流出该节点电流的代数和为零。其数学表示式为

$$\sum_{k=1}^m i_k(t) = 0 \quad (3.2-1)$$

对于线性时不变电路，在单一频率 ω 的正弦激励下（正弦电源可以有多个，但频率必须相同）进入稳态后，各处的电压、电流都将为同频率的正弦波。设正弦稳态电路中某节点连接有 m 条支路，其中第 k 条支路电流为 $i_k(t) = I_{km} \cos(\omega t + \theta_{ik})$ ，则该节点的 KCL 时域方程式可表示为

$$\sum_{k=1}^m i_k(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Re}[\sqrt{2} \dot{I}_k e^{j\omega t}] = 0 \quad (3.2-2)$$

其中

$$\dot{I}_k = I_k e^{j\theta_{ik}} = I_k \angle \theta_{ik} \quad (3.2-3)$$

式 (3.2-3) 为流出该节点的第 k 条支路正弦电流 $i_k(t)$ 对应的相量。根据前面所述的相量概念及其运算规则，可推导出 KCL 的相量形式，即

$$\sum_{k=1}^m \dot{I}_k = 0 \quad (3.2-4)$$

同理可以证明，基尔霍夫电压定律同样对相量成立：在正弦稳态电路中，沿任一回路，KVL 可表示为

$$\sum_{k=1}^m \dot{U}_k = 0 \quad (3.2-5)$$

式中， \dot{U}_k 为回路中第 k 条支路的电压相量。因此，在正弦稳态电路中，基尔霍夫定律可直接用相量写出。有了基尔霍夫电压和电流定律的相量形式，可以利用它来解决正弦稳态情况下的电路分析问题，方便简化计算。

2. 基本元件伏安特性的相量形式

对正弦稳态电路进行分析时,基本元件电阻、电感和电容两端的伏安关系,需要将各个元件的电压-电流关系从时域转换到频域用相量的形式来表示并进行分析。

(1) 电阻元件 R 。

设电阻两端的电压、电流采用关联参考方向,若流经电阻的电流为

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) \leftrightarrow \dot{I} = I e^{j\theta_i} = I \angle \theta_i \quad (3.2-6)$$

由欧姆定律可知其两端电压为

$$\begin{aligned} u(t) &= Ri \\ &= R\sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) \\ &= \sqrt{2}RI \cos(\omega t + \theta_i) \\ &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta_u) \end{aligned}$$

将上式由时域变换为频域,得

$$\dot{U} = U e^{j\theta_u} = U \angle \theta_u \quad (3.2-7)$$

由上述分析可得电阻两端电压的相量形式为

$$\dot{U} = RI \angle \theta_i = RI \quad (3.2-8)$$

式(3.2-8)表明,电阻两端的伏安关系在频域的相量形式与时域的情况相同。它反映了电阻上电压电流的大小关系和相位关系,即

$$\begin{cases} U = RI \\ \theta_u = \theta_i \end{cases} \quad (3.2-9)$$

从式(3.2-9)可以看出 $\theta_u = \theta_i$,即电阻两端电压和电流同相。

电阻元件的时域模型和相量模型如图3-8所示。比较图3-8(a)和图3-8(b)可以看出,图3-8(b)与图3-8(a)拓扑结构相同,但图3-8(b)中电压、电流均用相量表示,故称为相量模型。电阻的相量图如图3-9所示。

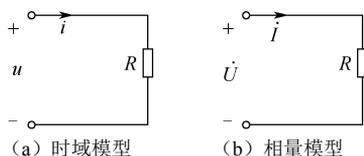


图 3-8 电阻模型

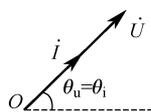


图 3-9 电阻的相量图

(2) 电感元件 L 。

设有一个电感元件 L ,其两端的电压、电流采用关联参考方向,其中流经电感的电流为

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) \quad (3.2-10)$$

则电感两端的电压为

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di}{dt} \\ &= -\sqrt{2}\omega LI \sin(\omega t + \theta_i) \\ &= \sqrt{2}\omega LI \cos(\omega t + \theta_i + 90^\circ) \end{aligned}$$

可得电压的相量为

$$\dot{U} = \omega LI \angle(\theta_i + 90^\circ) = \omega LI \angle\theta_i \times 1 \angle 90^\circ = j\omega L \dot{I} \quad (3.2-11)$$

式 (3.2-11) 为电感元件伏安特性的相量形式。其中元件参数 $j\omega L$ 为电感的阻抗。式 (3.2-11) 反映了电感元件上电压电流的大小关系和相位关系, 即

$$\begin{cases} U = \omega LI \\ \theta_u = \theta_i + 90^\circ \end{cases} \quad (3.2-12)$$

式中, U 和 θ_u 分别为电感电压的有效值和初相角, I 和 θ_i 分别为电感电流的有效值和初相角。从上述的求解过程可知, 电感电压和电感电流是同频率的正弦量, 但是电感电压相位超前电感电流 90° ($\theta_u = \theta_i + 90^\circ$)。它们的幅值之间的关系为

$$\frac{U}{I} = \omega L = X_L \quad (3.2-13)$$

式中, $X_L = \omega L$ 为电感的电抗, 简称感抗, 表示电感对电流呈现的阻力大小。感抗值与 ω 和 L 成正比, 单位为 Ω 。因此电感元件上电压电流的关系还可以表示为

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I} = jX_L \dot{I} \quad (3.2-14)$$

$$\begin{cases} U = \omega LI = X_L I \\ \theta_u = \theta_i + 90^\circ \end{cases} \quad (3.2-15)$$

根据电感元件的伏安特性, 得到电感的时域模型和相量模型如图 3-10 所示, 电感上电压、电流的相量图如图 3-11 所示。

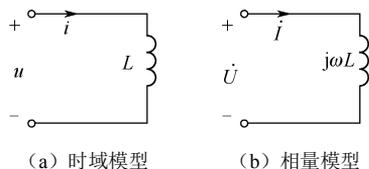


图 3-10 电感模型

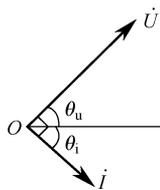


图 3-11 电感的相量图

(3) 电容元件 C 。

设有一个电容元件 C , 其两端的电压、电流采用关联参考方向, 其中电容两端的电压为

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta_u) \quad (3.2-16)$$

则流经电容的电流为

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du}{dt} = -\sqrt{2}\omega C U \sin(\omega t + \theta_u) \\ &= \sqrt{2}\omega C U \cos(\omega t + \theta_u + 90^\circ) \end{aligned}$$

转化为相量形式为

$$\dot{I} = \omega C U \angle(\theta_u + 90^\circ) = \omega C U \angle\theta_u \times 1 \angle 90^\circ = j\omega C \dot{U}$$

或写为

$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I} \quad (3.2-17)$$

(3.2-17) 式为电容元件伏安特性的相量形式。其中元件参数 $\frac{1}{j\omega C}$ 为电容的阻抗。电容元件伏安特性反映电容上电压电流的大小关系和相位关系，即

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\omega C} I \\ \theta_u = \theta_i - 90^\circ \end{cases} \quad (3.2-18)$$

式中， U 和 θ_u 分别为电容电压的有效值和初相角， I 和 θ_i 分别为电容电流的有效值和初相角。从上述的求解过程可知，电容电压和电容电流是同频率的正弦量，但是电容电流相位超前电容电压 90° ($\theta_u = \theta_i - 90^\circ$)。它们的幅值之间的关系为

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} = X_C \quad (3.2-19)$$

式中， $X_C = \frac{1}{\omega C}$ 为电容的电抗，简称容抗，表示电容对电流呈现的阻力大小。容抗值与 ω 和 C 成反比，单位为 Ω 。因此电容元件上电压、电流的关系还可以表示为

$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I} = -jX_C \dot{I} \quad (3.2-20)$$

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\omega C} I = X_C I \\ \theta_u = \theta_i - 90^\circ \end{cases} \quad (3.2-21)$$

根据电容元件的伏安特性，可以得到电容的时域模型和频域模型如图 3-12 所示，电容的相量图如图 3-13 所示。

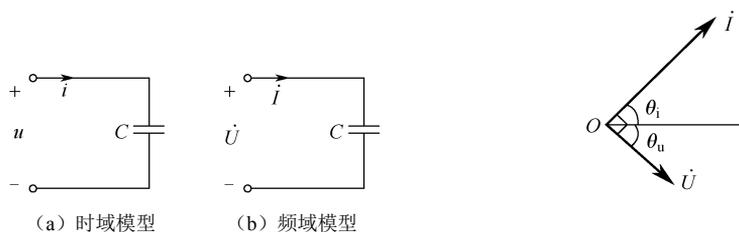


图 3-12 电容模型

图 3-13 电容的相量图

例 3-11 将电压 $u(t) = 12\sqrt{2} \cos(60t + 30^\circ) \text{V}$ 作用在电感元件两端，已知 $L=1\text{H}$ ，求流经电感的电流。

解：根据已知电压的瞬时表达式，可得到电压的相量形式和角频率 ω 。

$$\begin{aligned} u(t) = 12\sqrt{2} \cos(60t + 30^\circ) \text{V} &\Leftrightarrow \dot{U} = 12\angle 30^\circ \text{V} \\ \omega &= 60 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

根据电感元件两端的伏安关系

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}$$

可得

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = \frac{12\angle 30^\circ}{j60 \times 1} = \frac{12\angle 30^\circ}{60\angle 90^\circ} = \frac{1}{5} \angle -60^\circ \text{A}$$

将电流转换到时域得到电流的瞬时表达式为

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}}{5} \cos(60t - 60^\circ) \text{ A}$$

对比电感两端电流和电压的瞬时表达式可以发现：

$$\theta_u - \theta_i = 30^\circ - (-60^\circ) = 90^\circ$$

即电感元件两端的电压超前于流经电感的电流 90° ，这与前面分析的结论是一致的。

3.2.2 阻抗与导纳

在 3.2.1 节讨论了电阻、电感和电容这 3 个基本元件两端伏安关系的相量形式如下：

电阻两端伏安关系的相量形式为

$$\dot{U} = R\dot{I}$$

电感两端伏安关系的相量形式为

$$\dot{U} = j\omega L\dot{I}$$

电容两端伏安关系的相量形式为

$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

将电阻、电感和电容元件伏安关系进行整理，其中电阻两端伏安关系用电压相量除以电流相量，可以得到方程式为

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R \quad (3.2-22)$$

同样可以得到电感和电容两端的方程式分别为

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j\omega L \quad (3.2-23)$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{1}{j\omega C} \quad (3.2-24)$$

而上述 3 个表达式分别就是电阻、电感和电容 3 个元件的阻抗。

1. 阻抗 Z

定义：无源二端网络（图 3-14）的阻抗定义为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle(\theta_u - \theta_i) = R + jX = |Z| \angle \varphi \quad (3.2-25)$$

阻抗的单位为 Ω ，式 (3.2-25) 中， R 为阻抗的电阻分量， X 为阻抗的电抗分量。电抗分量 X 可以为正值也可以为负值。若 X 为正值，则端口电压超前电流，阻抗为感性；若 X 为负值，则端口电压滞后电流，阻抗为容性；若 X 为零，端口电压与电流同相，阻抗虚部为零，只有实部电阻分量，因此阻抗为电阻性。阻抗模 $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{U}{I}$ ，阻抗角

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \theta_u - \theta_i。$$

若电路中含有 n 个阻抗串联（图 3-15），则总阻抗值为 n 个阻抗值之和，即

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \quad (3.2-26)$$

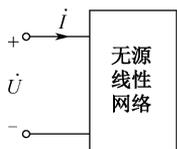
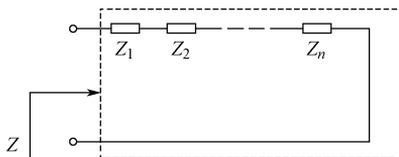


图 3-14 无源二端网络

图 3-15 n 个阻抗串联

2. 导纳 Y

在分析电路时，尤其是在含有并联电路的分析中，采用阻抗的倒数运算起来比较方便，这个阻抗的倒数就是导纳，其为流过电路的电流相量和电路两端的电压相量之比。

定义：二端网络的导纳定义为

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{U} \angle(\theta_i - \theta_u) = G + jB = |Y| \angle \varphi' \quad (3.2-27)$$

导纳的单位为西门子 (S)，其中： G 为导纳的电导分量， B 为导纳的电纳分量。导纳模 $|Y| = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{I}{U}$ ，导纳角 $\varphi' = \arctan \frac{B}{G} = \theta_i - \theta_u = -\varphi$ 。

与阻抗类似，若电路中有 n 个导纳并联，则总导纳为

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \quad (3.2-28)$$

由阻抗和导纳的定义可知

$$Z = \frac{1}{Y} \quad (3.2-29)$$

即阻抗和导纳互为倒数。

例 3-12 如图 3-16 所示的无源网络 N ，若 $u(t) = 40\cos(10^3t - 80^\circ)\text{V}$ ， $i(t) = 0.2\cos(10^3t - 35^\circ)\text{A}$ 。求其端口阻抗 Z 。

解：根据题意，可知电压、电流相量为

$$\dot{U} = 20\sqrt{2} \angle -80^\circ \text{ V} \quad \dot{I} = \frac{\sqrt{2}}{10} \angle -35^\circ \text{ A}$$

其阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{20\sqrt{2} \angle -80^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{10} \angle -35^\circ} = 200 \angle -45^\circ \Omega$$

例 3-13 如图 3-17 所示电路中，已知 $i_s(t) = 10\sqrt{2} \cos(2t - 36.9^\circ)\text{A}$ ， $u(t) = 50\sqrt{2} \cos 2t\text{V}$ ，求 R 和 L 。

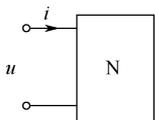


图 3-16 例 3-12 图

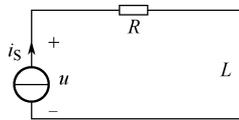


图 3-17 例 3-13 图

解：根据题意，可知电压、电流相量为

$$\dot{U} = 50 \angle 0^\circ \text{ V} \quad \dot{I} = 10 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

其阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{50\angle 0^\circ}{10\angle -36.9^\circ} = 5\angle 36.9^\circ = (4+j3)\Omega$$

电路中电阻和电感元件为串联，故阻抗为

$$Z = R + jX_L = R + j\omega L$$

对比系数可以得到 $R = 4\Omega$, $L = \frac{3}{\omega} = \frac{3}{2} = 1.5\text{H}$

例 3-14 电路如图 3-18 所示，已知 $u_s(t) = \cos(2t + 30^\circ)\text{V}$ ，试求电路的总阻抗。

解：本题共包含两个电阻元件和两个电感元件，通过分析电路结构可知，1H 的电感元件和 2Ω 的电阻元件是并联关系，然后与 4Ω 电阻元件和 2H 的电感元件相串联，最终得到电路的总阻抗。

根据题意，可知 $\omega = 2\text{rad/s}$ ，因此

$$X_{L1} = j\omega L_1 = j2\Omega$$

$$X_{L2} = j\omega L_2 = j4\Omega$$

则电路的总阻抗为

$$\begin{aligned} Z &= 4 + j4 + j2 // 2 \\ &= 4 + j4 + \frac{j2 \times 2}{j2 + 2} \\ &= (5 + j5)\Omega \end{aligned}$$

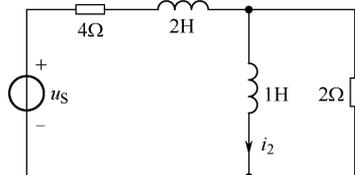


图 3-18 例 3-14 图

3.3 正弦稳态电路分析方法

3.3.1 相量模型及相量法

1. 相量模型

在前面的分析中，电路模型大多都是在时域进行讨论的，这种描述时间域电压、电流相互作用关系的电路模型称为时域模型。在正弦稳态情况下，将时域模型中的正弦量用相量代换，无源元件参数用阻抗或导纳来表示，这样得到的模型称为电路的相量模型。相量模型和时域模型具有相同的拓扑结构。

2. 相量法

运用相量和相量模型来分析正弦稳态电路的方法称为相量法。电路分析的依据仍然是两类约束关系，由前面的分析可知，两类约束关系的相量形式与直流电路中的形式一致，因此直流电路中的各种定理、公式和方法，如叠加定理、网孔法、节点法、等效电源定理等同样适用于正弦稳态电路分析。在正弦稳态电路中，运用相量法分析电路的具体步骤如下。

- (1) 根据已知条件，画出电路的相量模型。
- (2) 选择适当的求解方法，根据两类约束的相量形式建立电路的相量方程。

(3) 解方程求得待求的电流或电压相量，并根据频域相量形式写出其对应时域正弦量表达式。

以上是通用的相量法求解过程，在必要时还需要借助相量图来辅助求解。相量法实质上是一种域之间的“变换”，它通过时域和频域的变换，把正弦稳态中时域求微分方程的问题，“变换”为在频域中解复数代数方程的问题，从而简化了计算过程，降低了计算复杂度。

3.3.2 相量法的应用——方程法和等效法

在直流电阻电路部分，分析和讨论过应用等效的方法对电路进行简化，等效的方法有电阻的串并联、端口伏安关系法、模型互换法、等效电源定理等。在正弦稳态情况下，这些方法都是可以直接应用的，其区别在于需要一个从时域到频域的转换，并进行相量运算。同样，直流电阻电路中的方程法，如网孔法和节点法也同样适用于正弦稳态电路的分析。

例 3-15 电路如图 3-19 所示，已知 $u_s(t) = \cos(2t + 30^\circ) \text{ V}$ ，试求电流 i_2 。

解：根据题意已知

$$\dot{U}_s = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 30^\circ \text{ V}$$

在例 3-14 中，已经分析过图 3-19 所示电路的总阻抗为

$$\begin{aligned} Z &= 4 + j4 + j2 / / 2 \\ &= 5 + j5 \Omega \end{aligned}$$

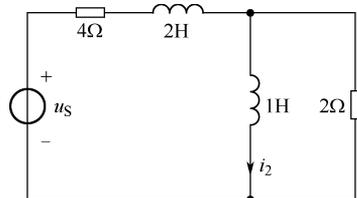


图 3-19 例 3-15 图

因此可先计算电路总电流，再根据分流公式得到电流 i_2 。

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_s}{Z} \times \frac{2}{j2 + 2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \angle 30^\circ}{5 + j5} \times \frac{2}{j2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{20} \angle -60^\circ \text{ A}$$

可得电流 i_2 的时域表达式为

$$i_2(t) = 0.1 \cos(2t - 60^\circ) \text{ A}$$

例 3-16 正弦稳态电路如图 3-20 (a) 所示，已知 $u_s(t) = 100\sqrt{2} \cos 10t \text{ V}$ ，试求各支路电流 $i_c(t)$ 、 $i_2(t)$ 、 $i_1(t)$ 、电容电压 $u_c(t)$ 。

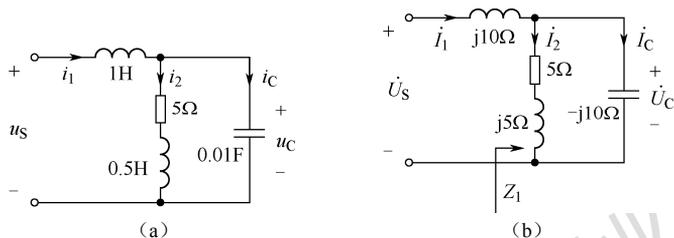


图 3-20 例 3-16 图

解：(1) 作出相量模型，如图 3-20 (b) 所示。

(2) 端口等效阻抗为

电子工业出版社有限公司 盗版必究 版权所有

$$Z = j10 + Z_1 = j10 + \frac{-j10(5 + j5)}{5 - j5} = 10 + j10\Omega, \quad Z_1 = 10\Omega$$

(3) 各待求变量:

支路电流 $i_1(t)$ 为

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{100\angle 0^\circ}{10 + j10} = \frac{10}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ \text{A}$$

$$i_1(t) = 10\cos(10t - 45^\circ)\text{A}$$

电容电压 $u_C(t)$ 为

$$\dot{U}_C = \frac{Z_1 \dot{U}_s}{Z} = \frac{10 \times 100\angle 0^\circ}{10 + j10} = \frac{100}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ \text{A}$$

$$u_C(t) = 100\cos(10t - 45^\circ)\text{V}$$

支路电流 $i_C(t)$ 为

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{-j10} = \frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ \text{A}$$

$$i_C(t) = 10\cos(10t + 45^\circ)\text{V}$$

支路电流 $i_2(t)$ 为

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_C}{5 + j5} = 10\angle -90^\circ \text{A}$$

$$i_2(t) = 10\sqrt{2}\cos(10t - 90^\circ)\text{A}$$

例 3-17 试求如图 3-21 所示电路中的 i 。

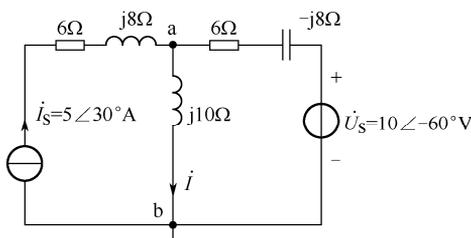


图 3-21 例 3-17 图 1

解: 此题可用多种方法求解,如节点电压法、网孔电流法、戴维南定理、叠加定理等,下面以节点法和戴维南定理求解为例。

解法一: 节点电压法。

设 b 为参考节点,如图 3-21 所示。节点电位为 \dot{U}_a , 则有

$$\dot{U}_a = \frac{5\angle 30^\circ + \frac{100\angle -60^\circ}{6 - j8}}{\frac{1}{j10} + \frac{1}{6 - j8}} = 226.3\angle 23.67^\circ \text{V}$$

所以

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_a}{j10} = 22.63\angle -66.33^\circ \text{A}$$

注意: 与电流源串联的阻抗不能出现在节点方程中。

解法二： 戴维南定理。

第一步，移去待求支路，得电路如图 3-22 所示，现要求出所剩有源一端口网络的戴维南等效电路。

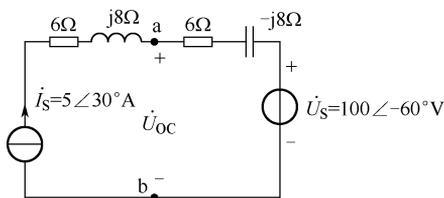


图 3-22 例 3-17 图 2

从 ab 端口看进去的开路电压 \dot{U}_{OC} 为

$$\begin{aligned}\dot{U}_{OC} &= \dot{I}_s(6 - j8) + 100\angle -60^\circ = 50\angle -23.1^\circ + 100\angle -60^\circ \\ &= 143.17\angle -47.9^\circ\end{aligned}$$

从 ab 端口看进去的戴维南等效阻抗 Z_0 为

$$Z_0 = 6 - j8\Omega$$

第二步，画出戴维南等效电路，并接上所移支路，如图 3-23 所示，可求得

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_{OC}}{Z_0 + j10} = \frac{143.17\angle -47.9^\circ}{6 - j8 + j10} = 22.63\angle -66.33^\circ\text{A}$$

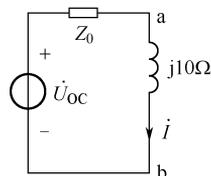


图 3-23 例 3-17 图 3

3.3.3 相量法的应用——相量图法

相量可以用复平面上的一个矢量来表示，这种表示相量的图称为相量图。引入相量后，两个同频正弦量的电压、电流之间的加减运算可以通过相量计算来完成，也可以在相量图上按矢量加减法则进行。相量图法是分析正弦稳态电路的一种辅助方法，可通过相量图求得待求未知相量。相量图法特别适用于正弦稳态电路中 RLC 串联、并联和简单的混联电路的分析。对于单一频率激励下的正弦稳态电路的响应分析时，若采用相量图法求解，其一般步骤如下。

(1) 画出电路相量模型。

(2) 选择合适的参考相量，并设该相量的初相为零。对于串联电路，通常选择回路电流相量作为参考相量，而对于并联电路，则通常选择电压相量作为参考相量。

(3) 从参考相量出发，将电路中的元件约束和拓扑约束关系在相量图上体现出来，即分析元件伏安特性和有关电流电压之间的关系并画出相量图。

(4) 利用相量图表示几何关系，求得所需的电流、电压相量。

其中，选择合适的参考相量是相量图法中很关键的一步。

例 3-18 如图 3-24 所示电路中， $R = X_L = X_C$ ，并已知电流表 A_1 的读数为 10A，问 A_2 和 A_3 的读数分别为多少？

解： 这是一个 RLC 并联电路，可以借助相量图来求解。在并联电路中，选取并联电压作为参考相量，设

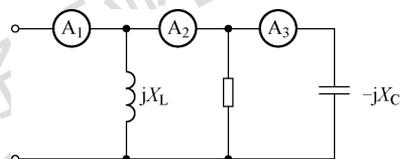


图 3-24 例 3-18 图

$$\dot{U} = U \angle 0^\circ \text{V}$$

设各支路电流和端口电压如图 3-25 所示。

由已知条件 $R = X_L = X_C$ ，且并联电压相同，所以流经三条并联支路的电流大小是相同的，即

$$I_L = I_R = I_3$$

然后再依据 KCL 方程，即依据并联电路各支路电流的关系，得

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_R + \dot{I}_3$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_L + \dot{I}_2$$

根据各元件上电压电流的相位关系及电路中 KCL 和 KVL 方程画出相量图，如图 3-26 所示。

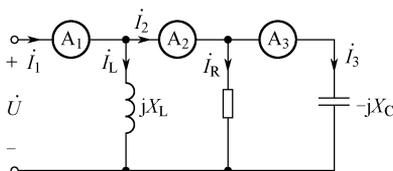


图 3-25 电路图

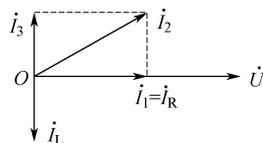


图 3-26 相量图

由相量图，且已知电流表 A_1 的读数为 10A ，可得

$$I_1 = I_R = I_L = I_3 = 10\text{A}$$

$$I_2 = \sqrt{I_R^2 + I_3^2} = 10\sqrt{2}\text{A}$$

因此电流表 A_3 的读数为 10A ， A_2 的读数为 $10\sqrt{2}\text{A}$ 。

3.4 正弦稳态电路中的功率问题

电路分析的基本变量是电压、电流和功率。前面分析了正弦稳态电路中的电压和电流的计算，下面讨论如何由电压、电流进行正弦交流电路的功率分析。交流功率分析具有十分重要的意义，在许多电气设备、通信系统和电力系统中功率都是一个十分重要的物理量。在正弦交流电路中，由于电感和电容的存在，使功率出现能量的往返现象，因此一般交流电路功率的分析比纯电阻功率的分析要复杂得多。本节首先给出平均功率、无功功率、视在功率和功率因数的概念及计算，然后讨论如何提高功率因数，最后分析正弦稳态电路中最大功率传输的问题。

3.4.1 正弦稳态电路的功率

设图 3-27 所示无源二端网络端口电压、电流采用关联参考方向，它们的瞬时表达式与对应的相量为

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) \leftrightarrow \dot{I} = I e^{j\theta_i} = I \angle \theta_i$$

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta_u) \leftrightarrow \dot{U} = Ue^{j\theta_u} = U \angle \theta_u$$

则二端网络有以下几种功率表现形式。

(1) 瞬时功率 $p(t)$ (W)。

元件吸收的瞬时功率 $p(t)$ 等于该元件两端的瞬时电压和流经此元件的瞬时电流的乘积, 可表示为

$$p(t) = u(t)i(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta_u) \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) \quad (3.4-1)$$

利用积化和差三角公式, 可得

$$p(t) = UI \cos(\theta_u - \theta_i) + UI \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i) \quad (3.4-2)$$

瞬时功率波形如图 3-28 所示, 可见瞬时功率是随时间而变化的量, 因此难以测量, 使用不方便。

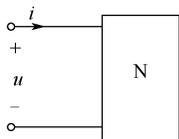


图 3-27 无源二端网络

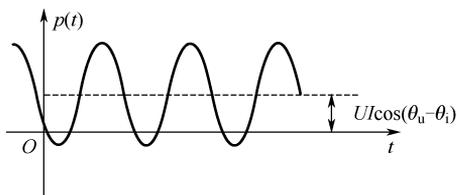


图 3-28 瞬时功率波形图

由于瞬时功率 $p(t)$ 是随时间而变换的量, 难以测量, 实用意义不大, 为了更直观地反映正弦稳态电路中的能量消耗与交换, 工程上常用平均功率、无功功率和视在功率。其中, 平均功率容易测得, 功率表测得的就是平均功率。

(2) 平均功率 P (W)。

为了方便直观地反映电路消耗的功率大小, 常采用瞬时功率在一个周期内的平均值来表示。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (3.4-3)$$

平均功率是指一个周期内的瞬时功率的平均值, 其中 T 为正弦电压或电流的周期。

将瞬时功率 $p(t)$ 的表达式代入上式, 可得平均功率 P 为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)] dt \\ &= UI \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.4-4)$$

式中, $\lambda = \cos \varphi$ 为无源网络的功率因数, $\varphi = \theta_u - \theta_i$ 为无源网络的功率因数角。从式 (3.4-4) 可以看出, 平均功率的大小取决于电压、电流的有效值和相位差。平均功率的单位为瓦 (W)。

平均功率有时也称为有功功率, 它反映了网络能量消耗情况, 因此平均功率还可用网络内部所有电阻消耗的平均功率之和表示, 即

$$P = \sum P_R \quad (3.4-5)$$

(3) 无功功率 Q (Var)。

二端网络中既存在能量消耗, 也存在能量交换, 平均功率反映网络能量消耗情况, 而

能量交换的情况，则用无功功率来衡量。

无功功率定义为网络能量交换的最大速率，即

$$Q = UI \sin \varphi \quad (3.4-6)$$

无功功率的单位为乏 (Var)，它反映能量交换情况，同样，无功功率还可用网络内电感、电容吸收的无功功率代数和来表示，即

$$Q = \sum Q_L + \sum Q_C \quad (3.4-7)$$

(4) 视在功率 $S(\text{VA})$ 。

视在功率表示电源设备的容量，同时还表示了可能输出的最大平均功率。它定义为

$$S = UI \quad (3.4-8)$$

视在功率的单位为伏安 (VA)。对比平均功率、无功功率和视在功率的公式，不难发现

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3.4-9)$$

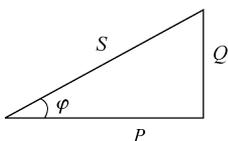


图 3-29 功率三角形

为便于记忆，常引入一个功率三角形来辅助记忆，它与阻抗三角形为相似三角形，如图 3-29 所示。

注意：电路中平均功率和无功功率守恒，即

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad (3.4-10)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (3.4-11)$$

但视在功率不守恒，即

$$S \neq S_1 + S_2 + \dots + S_n \quad (3.4-12)$$

例 3-19 某负载阻抗 $Z = 2 + j2\Omega$ ，与 $i_s(t) = 5\sqrt{2} \cos 2t \text{A}$ 的电流源相连，试求电源提供给该网络的视在功率、网络的有功功率、无功功率、功率因数。

解：由已知条件，可以得到电压、电流的有效值为

$$I_s = 5 \text{A}, \quad U = |Z| I_s = \sqrt{2^2 + 2^2} \times 5 = 10\sqrt{2} \text{V}$$

功率因数角为

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = 45^\circ$$

将以上条件代入功率的公式，可得

视在功率： $S = UI_s = 10\sqrt{2} \times 5 = 50\sqrt{2} \text{VA}$

平均功率： $P = UI_s \cos \varphi = 10\sqrt{2} \times 5 \cos(45^\circ) = 50 \text{W}$

无功功率： $Q = UI_s \sin \varphi = 10\sqrt{2} \times 5 \sin(45^\circ) = 50 \text{Var}$

功率因数： $\lambda = \cos \varphi = \cos(45^\circ) = 0.707$

例 3-20 如图 3-30 (a) 所示正弦稳态电路中，若 $u_s(t) = 100\sqrt{2} \cos 10^6 t \text{V}$ ， $C = 0.1 \mu\text{F}$ ， $L = 10 \mu\text{H}$ ， $R = 10 \Omega$ 。

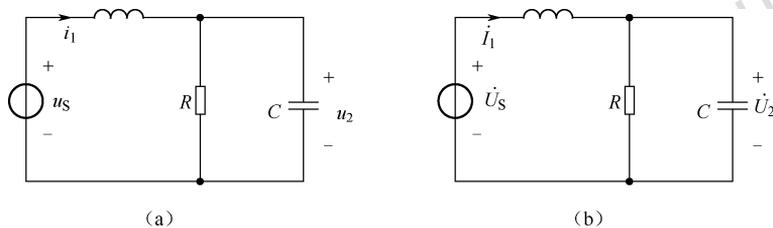


图 3-30 例 3-20 图

(1) 求 $i_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 的表达式。

(2) 求电路消耗的平均功率。

解：(1) 求 $i_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 的表达式。

画出相量图如图 3-30 (b) 所示，在图示参考方向下，有

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{j10 + 10 // (-j10)} = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 + j5} = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_2 = (10 // j10) \dot{I}_1 = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ \times \frac{20}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 100 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$i_1(t) = 20 \cos(10^6 t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$u_2(t) = 100\sqrt{2} \cos(10^6 t - 90^\circ) \text{ V}$$

(2) 求电路消耗的平均功率。

平均功率可由电阻上所消耗的功率来计算。

$$P = \frac{U_2^2}{10} = \frac{100^2}{10} = 1000 \text{ W}$$

3.4.2 正弦稳态最大功率传输条件

在电阻电路中讨论过电阻性网络为负载提供功率的最大功率传输问题，采用戴维南或诺顿等效电路表示供电电路，则得到结论，当负载电阻等于戴维南等效内阻时，获得最大功率。其分析思路在正弦稳态电路中也同样适用。

在工程上，常会涉及正弦稳态电路功率传输问题，需要研究负载在什么条件下可获得最大平均功率（有功功率）的问题。

如图 3-31 (a) 所示，二端网络 N 外接可调负载 Z_L ，根据戴维南定理可将图化简为图 3-31 (b) 所示，并设等效电源电压和内阻抗已知，其中 $Z_0 = R_0 + jX_0$ 。



图 3-31 二端网络及等效电路

由图 3-31 (b) 可知，流经负载的电流为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{OC}}{(R_0 + R_L) + j(X_0 + X_L)} \quad (3.4-13)$$

负载所吸收的平均功率为

$$P_L = R_L I^2 = \frac{R_L U_{OC}^2}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2} \quad (3.4-14)$$

假设负载的实部和虚部分别可调，要使负载功率最大，由式 (3.4-14) 可知，必须满足负载获得最大功率的条件为

$$Z_L = Z_0^* \quad (3.4-15)$$

即需满足

$$\begin{cases} R_L = R_0 \\ X_L = -X_0 \end{cases} \quad (3.4-16)$$

当负载阻抗 Z_L 等于戴维南阻抗 Z_0 的共轭复数时，负载可获最大平均功率，这个条件称为**共轭匹配**，此时负载获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0} \quad (3.4-17)$$

例 3-21 试求图 3-32 中负载阻抗 Z_L 为何值时获得的功率最大，并求出此最大功率。

解： 去掉负载后的开路电压为

$$\begin{aligned} \dot{U}_{OC} &= \frac{50\angle 120^\circ}{j10 - j4 - j2} \times (-j2) \\ &= 25\angle -60^\circ \text{V} \end{aligned}$$

戴维南等效内阻为

$$\begin{aligned} Z_S &= (3 + j7) + (-j2) // (j10 - j4) \\ &= 3 + j7 + \frac{(j10 - j4) \times (-j2)}{j10 - j4 - j2} \\ &= (3 + j4)\Omega \end{aligned}$$

故当 $Z_L = Z_S^* = 3 - j4\Omega$ 时，负载获得最大功率，且最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4 \times 3} = \frac{625}{12} \approx 52.083 \text{W}$$

例 3-22 如图 3-33 所示的电路， $\dot{I}_S = 3\angle 0^\circ \text{A}$ ，求负载 Z_L 获得最大功率时的阻抗值及负载吸收功率。

解： ab 两端的开路电压 \dot{U}_{OC} 为

$$\dot{U}_{OC} = (2 // j2)\dot{I}_S = (1 + j)3 = 3\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{V}$$

ab 以左等效阻抗 Z_{ab} 为

$$Z_{ab} = 3 + 2 // j2 = 3 + 1 + j = (4 + j)\Omega$$

因此当 $Z_L = Z_{ab}^* = (4 - j)\Omega$ 时，负载 Z_L 获得最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{(3\sqrt{2})^2}{4 \times 4} = \frac{9}{8} \text{W}$$

从上面两个例题可以看出，求解最大功率传输类问题的思路是首先求出除负载外的戴维南或诺顿等效电路，然后取负载阻抗 Z_L 值等于戴维南阻抗 Z_0 的共轭复数，最终得到负载上获得的最大功率值 $P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0}$ 。

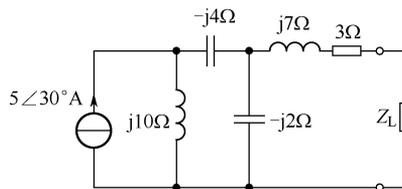


图 3-32 例 3-21 图

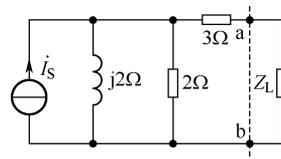


图 3-33 例 3-22 图

电子工业出版社有限公司 版权所有 盗版必究

3.5 谐振电路

3.5.1 谐振电路的基本概念

对于含有电容、电感动态元件和电阻元件的正弦稳态电路，其两端电压和通过的电流一般不是同相位的，其端口可能呈现容性、感性和电阻性。在满足一定条件时，电路端口的电压与电流同相，电路呈电阻性，电路的这种特殊现象称为谐振。处于谐振状态的电路称为谐振电路。谐振电路在电子技术工程实际中应用广泛，可以实现选频、滤除干扰信号等功能，同时谐振时会在电路中的某些元件中产生较大的电压或电流，可造成元器件的损坏，这也是需要注意和避免的情况。因此，对谐振电路的研究是十分必要的。本节主要以串联谐振为例，介绍谐振的概念和电路特点。

RLC 串联谐振电路如图 3-34 所示。

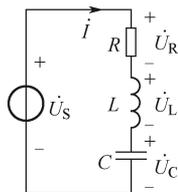


图 3-34 串联谐振电路

1. 谐振条件

在 RLC 串联的相量电路模型中，由 KVL 得

$$\begin{aligned}\dot{U}_S &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C \\ &= [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]i = Zi\end{aligned}\quad (3.5-1)$$

电路端口等效阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}_S}{i} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})\quad (3.5-2)$$

由于电路对外呈阻性，因此谐振的条件是网络的等效阻抗虚部为零，即

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}\quad (3.5-3)$$

可得谐振频率

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0\quad (3.5-4)$$

或

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_0\quad (3.5-5)$$

从上式可以看出，电路的谐振频率仅由回路元件参数 L 或 C 决定，仅当激励源的频率等于电路的谐振频率时，电路才发生谐振现象。

2. 串联谐振电路的特点

下面研究发生串联谐振时电路的特性。电路的基本变量是电压和电流，因此主要讨论谐振电路的阻抗、电压、电流和品质因数这几个量。

由于电路端口等效阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (3.5-6)$$

当电路达到谐振时，谐振频率 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，阻抗虚部为零，电路的等效阻抗最小。

谐振时阻抗 $Z_0 = R$ ，为纯电阻。

谐振时回路电流为

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_s}{Z_0} = \frac{\dot{U}_s}{R} \quad (3.5-7)$$

由于谐振时等效阻抗最小，因此从上式可以看出谐振时电流 I_0 的值最大，且相位和端口电压 \dot{U}_s 相同。

此时电阻上的电压分别为

$$\dot{U}_{R0} = R\dot{I}_0 = \dot{U}_s \quad (3.5-8)$$

即谐振时电源电压全部加在等效电阻上，LC 串联电路对外电路而言电压为零，可视为短路。

谐振时电感电压和电容电压为

$$\dot{U}_{L0} = j\omega_0 L \dot{I}_0 = j\omega_0 L \frac{\dot{U}_s}{R} = j \frac{\omega_0 L}{R} \dot{U}_s \quad (3.5-9)$$

$$\dot{U}_{C0} = \frac{1}{j\omega_0 C} \dot{I}_0 = -j \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\dot{U}_s}{R} \quad (3.5-10)$$

由于谐振时满足

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

等式左右两端同除以 R 可得

$$\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = Q \quad (3.5-11)$$

式中， Q 为电路的品质因数。

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{\sqrt{L}}{R} \quad (3.5-12)$$

品质因数是谐振电路一个十分重要的物理量，用来评量谐振电路的“品质”。由于 Q 值与电阻 R 取值成反比，因此串联谐振电路适用于小内阻电源条件下工作。

将品质因数 Q 代入电感电压和电容电压的公式，可得

$$\dot{U}_{L0} = j\omega_0 L \dot{I}_0 = j\omega_0 L \frac{\dot{U}_s}{R} = j \frac{\omega_0 L}{R} \dot{U}_s = jQ \dot{U}_s \quad (3.5-13)$$

$$\dot{U}_{C0} = \frac{1}{j\omega_0 C} \dot{I}_0 = -j \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\dot{U}_s}{R} = -jQ \dot{U}_s \quad (3.5-14)$$

在分析谐振时的电阻电压时，可知此时电源电压全部加在等效电阻上，而电感和电容元件上的电压又是什么情况？电感和电容元件上的电压是否为零？

结合式 (3.5-13) 和式 (3.5-14) 可以发现，谐振时电感电压和电容电压不仅数值不为零，而且是端口电压的 Q 倍。电感电压和电容电压大小相等，方向相反，LC 支路电压相加和为零，即 $\dot{U}_{C0} + \dot{U}_{L0} = 0$ ，这表明串联谐振时电源只供电阻电压，电容电压与电感电压

互相抵消, LC 支路相当于短路。故串联谐振又称为电压谐振。

通常实际串联谐振电路的品质因数 Q 都有几十、几百的数值。由于谐振时电容或电感上电压是端口电压的 Q 倍, 因此这时电容或电感上电压比输入电压大几十、几百倍, 这种情况对微弱信号的传输与处理是很有益的。但是在电力系统中却会因产生过高电压而损坏电器, 因此在电力工程中一般应避免发生串联谐振, 而在无线电工程中则常利用串联谐振获得较高电压。

3.5.2 谐振电路的频率特性分析

1. 频率特性

由于在 RLC 串联谐振电路中, 响应相量为 i , 激励相量为 \dot{U}_s , 根据网络函数的定义可以得到策动点导纳函数为

$$H_Y(j\omega) = \frac{i}{\dot{U}_s} = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + j\frac{\omega_0 L}{R}(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{Y_0}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \quad (3.5-15)$$

其中, $Y_0 = H(j\omega_0) = H_0 = \frac{1}{R}$, 归一化处理得谐振函数

$$N(j\omega) = \frac{H_Y(j\omega)}{Y_0} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \quad (3.5-16)$$

对应幅频特性和相频特性为

$$|N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} \quad (3.5-17)$$

$$\theta(\omega) = -\arctan(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) \quad (3.5-18)$$

频率特性曲线如图 3-35 所示。

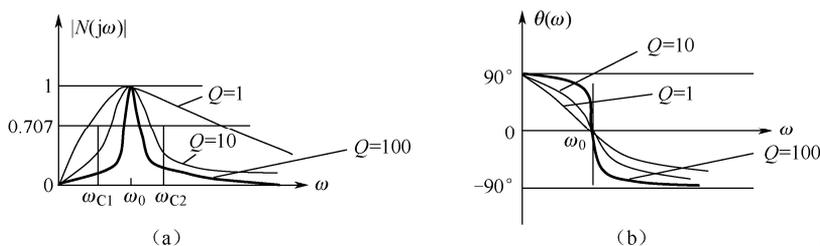


图 3-35 频率特性曲线

2. 通频带与选择性

截止频率: 通带和阻带的分界点称为截止频率, 即为 $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j\omega)|_{\max}$ 方程确定的频率 ω_C 。

通带与阻带：当 $\omega < \omega_c$ 时，输出电压的幅值不小于最大输出信号幅值的 70.7%，工程上认为这部分信号能顺利通过该网络。故把 $0 \sim \omega_c$ 频率范围称为通带。其余频率范围称为阻带。

选择性：谐振电路具有选出所需信号而同时抑制不需要信号的能力，称为电路的选择性。

由截止频率的定义可知，当 $|N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |N(j\omega)|_{\max}$ 时可确定上、下截止频率 ω_{c1} 和 ω_{c2} 为

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (3.5-19)$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (3.5-20)$$

通频带为
通频带宽

$$\omega_{c1} \sim \omega_{c2}$$

$$BW = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{\omega_0 \frac{L}{R}} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.5-21)$$

或

$$B_f = \frac{f_0}{Q} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L} \quad (3.5-22)$$

从幅频特性曲线，即图 3-35 (a) 可以看出，串联谐振电路具有带通滤波器的特性。电路的 Q 值越高，串联谐振幅频特性曲线就越尖锐，电路的选择性就越好，对杂波和干扰信号的抑制能力就越强。相反，则选择性就越差。但同时考虑到实际信号都占有一定的频带宽度，若 Q 值取值过高，带通滤波器的带宽则过窄，会过多地削弱信号中的主要频率分量，从而引起严重失真。因此， Q 值的取值需要综合两方面的考虑，工程上需要折中考虑。

例 3-23 图 3-36 所示 RLC 串联的正弦电路，当 $\omega = 2 \times 10^4 \text{ rad/s}$ 时发生谐振，已知 $R = 4\Omega$, $L = 10\text{mH}$ ，端口总电压有效值 $U = 2\text{mV}$ 。求 Q 和 BW 值及电路所标变量的有效值。

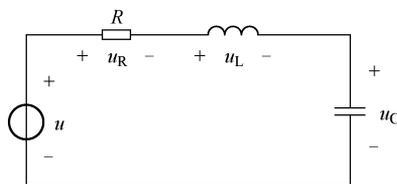


图 3-36 例 3-23 图

解：根据题意，由串联谐振特性可知

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{2 \times 10^4 \times 10 \times 10^{-3}}{4} = 50$$

$$BW = \frac{R}{L} = \frac{4}{10 \times 10^{-3}} = 400 \text{ rad/s}$$

由已知端口总电压有效值 $U = 2\text{mV}$ ，且根据谐振时特性 $\dot{U}_R = R\dot{I}_0 = \dot{U}$ ，可知

$$U_R = 2\text{mV}$$

由于谐振时电感电压和电容电压是端口电压的 Q 倍，因此

$$U_L = QU = U_C = 50 \times 2 = 100\text{mV} = 0.1\text{V}$$

例 3-24 串联谐振电路实验所得电流谐振曲线如图 3-37 所示，其中 $f_0 = 500 \text{ kHz}$, $f_1 = 498 \text{ kHz}$, $f_2 = 502 \text{ kHz}$ 。已知回路中电感 $L = 500 \mu\text{H}$ ，试求回路品质因数 Q 及回路的电阻 R 。

解：由电流谐振曲线可知

电路的中心频率为

$$f_0 = 500 \text{ kHz}$$

电路的通频带宽为

$$B_f = f_2 - f_1 = 4 \text{ kHz}$$

由于串联谐振电路中

$$B_f = \frac{f_0}{Q} = \frac{1}{2\pi L} R$$

故电路的品质因数

$$Q = \frac{f_0}{B_f} = \frac{500 \times 10^3}{4 \times 10^3} = 125$$

又对于串联谐振电路有 $B_f = \frac{R}{2\pi L}$ ，可求得谐振电阻为

$$R = 2\pi L B_f = 2\pi \times 500 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^3 \approx 12.57 \Omega$$

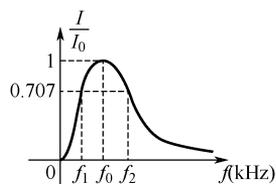


图 3-37 例 3-24 图

3.6 理想变压器

前面已经介绍了一些电路元件，本节将介绍一个新的电路元件——变压器，变压器是利用电磁感应的原理来改变交流电压的装置。变压器的种类很多，这里只讨论理想变压器。

3.6.1 理想变压器的概念及其性质

1. 电路模型及伏安特性

理想变压器是一个端口的电压与另一个端口的电压成正比，且没有功率损耗的一种无源二端口网络。它是实际变压器抽象出来的一种理想化模型，其电路模型如图 3-38 所示。

理想变压器唯一的参数是匝数比 $n = \frac{N_1}{N_2}$ 。其中， N_1 、 N_2 分别表示变压器初、次级线圈的匝数，用点“•”表示它的同名端。

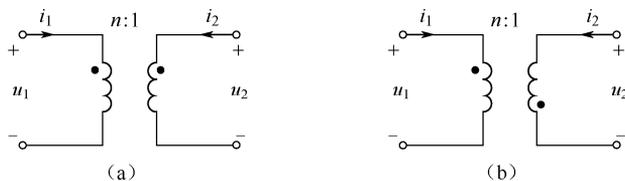


图 3-38 理想变压器电路模型

设端口电压、电流采用关联参考方向，则同名端如图 3-38 (a) 所示的理想变压器的伏安特性为

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases} \quad (3.6-1)$$

即电压电流比为

电子工业出版社有限公司
版权所有 盗版必究

$$\begin{cases} \frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \\ \frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n} \end{cases} \quad (3.6-2)$$

从上式可以看出变压器具有变电压、变电流的特性。

若同名端如图 3-38 (b) 所示, 则理想变压器的伏安特性为

$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = \frac{1}{n}i_2 \end{cases} \quad (3.6-3)$$

由上述伏安特性可知, 理想变压器在所有时刻 t , 均有

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0 \quad (3.6-4)$$

由上式可知, 在任意时刻 t , 从初级及次级线圈的输入功率的总和为零。即理想变压器不消耗能量也不储存能量, 没有任何损耗, 是一种无记忆元件。需要注意的是: 在电路模型中, 理想变压器虽然用线圈作为电路符号, 但并不意味着任何电感的作用, 并不代表 L_1 、 L_2 。

2. 主要特性

理想变压器除具有前面分析的变电压、变电流的特性之外, 它还起着变换阻抗的作用, 即理想变压器主要特性为变电压、变电流、变阻抗。

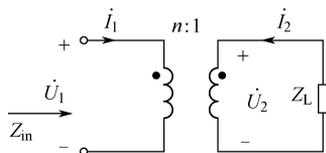


图 3-39 理想变压器变阻抗特性

如图 3-39 所示电路, 在理想变压器的次级接负载阻抗 Z_L , 则初级的输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-\frac{1}{n}\dot{I}_2} = n^2 \frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_2} = n^2 Z_L \quad (3.6-5)$$

因此利用改变匝数比的方法来改变输入阻抗。

3.6.2 含理想变压器的电路分析

常用方程法和阻抗变换性质对含理想变压器电路进行分析。下面举例说明。

例 3-25 如图 3-40 (a) 所示电路, 已知电源电压 $U=500V$, 求电流 I 。

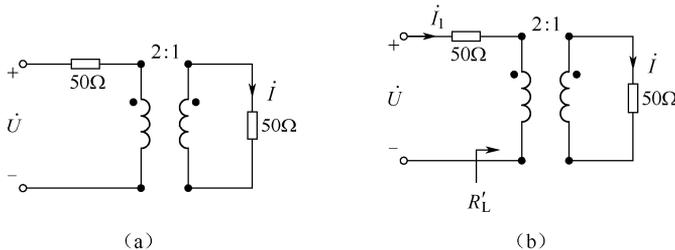


图 3-40 例 2-25 图

解: 如图 3-40 (b) 所示, 设初级线圈电流为 I_1 , 且用 R_L' 表示负载从次级线圈反映到初级线圈的负载值, 并由理想变压器阻抗变换性质得

$$R_L' = n^2 R_L = 2^2 \times 50 = 200\Omega$$

因此初级电流为

$$I_1 = \frac{500}{50 + 200} = 2\text{A}$$

因为是异名端，所以由理想变压器的伏安特性

$$I_1 = \frac{1}{n} I$$

可知次级电流为

$$I = nI_1 = 2 \times 2 = 4\text{A}$$

例 3-26 如图 3-41 (a) 所示电路， $\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ\text{V}$ ，为使 R_L 能获得最大功率，求匝数比 n 和 R_L 吸收的功率。

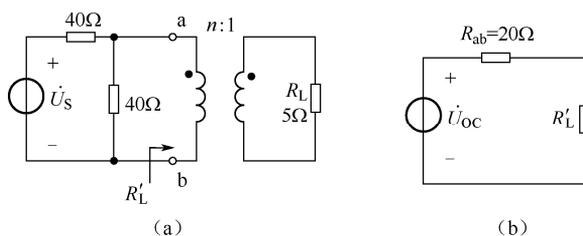


图 3-41 例 3-26 图

解：从图 3-41 (a) 中 ab 两端的左右两侧做等效，可得图 3-41 (b) 所示电路。 R'_L 为负载 R_L 在初级线圈的等效阻抗。由理想变压器阻抗变换性质得

$$R'_L = n^2 R_L = 5n^2$$

ab 端以左的戴维南等效电路参数为

$$R_{ab} = 40 // 40 = 20\Omega$$

$$\dot{U}_{OC} = \dot{U}_s \times \frac{40}{40 + 40} = 5\angle 0^\circ\text{V}$$

由最大功率传递条件可得

$$R'_L = R_{ab}$$

$$5n^2 = 20$$

$$n = 2$$

此时， R_L 能获得最大功率，且其最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4 \times R_{ab}} = \frac{5^2}{4 \times 20} = \frac{5}{16}\text{W}$$

上述的求解思路是将次级线圈负载变换到初级线圈再求解，也可以先把初级线圈的戴维南等效负载和开路电压变换到次级线圈去求解，再在次级线圈用戴维南等效电路求解最大功率，这与上述求解的思路大体相同，不同之处在于初次级线圈之间的变换方向不同，即最终戴维南等效电路是在初级线圈还是在次级线圈回路进行求解。

3.7 三相电路

三相电路是由三相电源、三相负载和三相传输线路组成的电路。三相电路在发电、输电线路及大功率用电设备等各国的电力系统中得到了广泛的应用。三相制之所以得到普遍应用，主要有以下几个原因：首先世界各国几乎所有的电厂生产和配送都是三相电，当需要单项或双相时，可从三相系统中提取，如日常生活中采用的单相交流电就是取自三相中的一相；其次在输配电方面，三相电路可以节约铜线，三相变压器比单相变压器经济；最后是三相电动机结构简单、运转平稳。因此三相系统是目前应用最经济、最广泛的多相系统。本节首先介绍三相电源，然后重点分析和研究对称三相电路。

3.7.1 对称三相电源

1. 对称三相电源简介

对称三相电源是由三相交流发电机组产生的，由 3 个同频率、等振幅而相位依次相差 120° 的正弦电源按一定连接方式组成。各相电压源电压分别为 $u_A(t)$ 、 $u_B(t)$ 和 $u_C(t)$ ，依次称为 A 相、B 相和 C 相的电压。

由于三相电压相位彼此相差 120° ，因此若设 A 相电源初相位为零，则三相电压的瞬时表达式为

$$\begin{aligned} u_A(t) &= \sqrt{2}U_p \cos \omega t \\ u_B(t) &= \sqrt{2}U_p \cos(\omega t - 120^\circ) \\ u_C(t) &= \sqrt{2}U_p \cos(\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \quad (3.7-1)$$

这种 ABC 各相电压依次达到最大值的情况，称为正相序或 ABC 顺序，其波形如图 3-42 所示；反之，称为负相序或 ACB 顺序。

各相电压依次达到最大值的先后次序称为相序。本书以正相序讨论三相电路问题。

由上述瞬时表达式得到三相电压的相量表达式为

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= U_p \angle 0^\circ \\ \dot{U}_B &= U_p \angle -120^\circ \\ \dot{U}_C &= U_p \angle 120^\circ \end{aligned} \quad (3.7-2)$$

其相量图如图 3-43 所示。

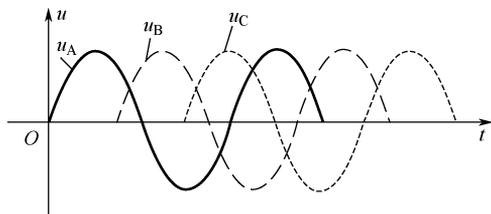


图 3-42 ABC 各相电压波形图

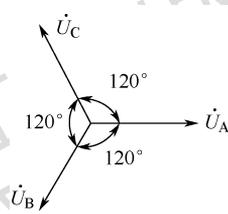


图 3-43 三相电源电压相量图

根据三相电压的瞬时表达式和相量图可以得到对称三相电压的一个重要特点为

$$u_A(t) + u_B(t) + u_C(t) = 0 \quad (3.7-3)$$

对应的相量形式为

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0 \quad (3.7-4)$$

即在任一瞬间, 对称三相电压之和恒等于 0。

2. 对称三相电源的连接

三相系统中的三相电源有两种连接方式: Y 形(星形)和 Δ 形(三角形), 如图 3-44 所示。

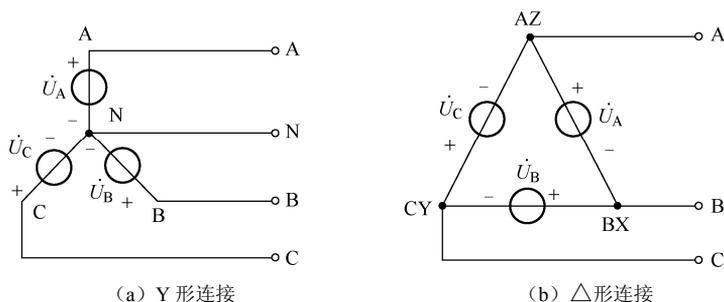


图 3-44 三相电源两种连接方式

(1) 三相电源的 Y 形连接。

如图 3-44 (a) 所示连接方式称为 Y 形连接。连在一起的三相定子绕组的末端用 N 表示, 这一连接点称为中点, 中点 N 引出的导线称为中线, A、B、C 三端引出的三根导线称为端线, A、B、C 各端线与中线 N 间的电压 \dot{U}_A 、 \dot{U}_B 、 \dot{U}_C 称为相电压, 各端线 AB、BC、CA 间的电压 \dot{U}_{AB} 、 \dot{U}_{BC} 、 \dot{U}_{CA} 称为线电压。

各相电压具有相同的幅度和频率, 相位彼此相差 120° , 这组相电压是对称的, 可表示为

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= U_p \angle 0^\circ \\ \dot{U}_B &= U_p \angle -120^\circ \\ \dot{U}_C &= U_p \angle 120^\circ \end{aligned} \quad (3.7-5)$$

线电压也是对称的、相位彼此相差 120° 的电压, 线电压的大小可由相电压来表示和求解。

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B = U_p \angle 0^\circ - U_p \angle -120^\circ = \sqrt{3}U_p \angle 30^\circ = U_1 \angle 30^\circ \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C = U_p \angle -120^\circ - U_p \angle 120^\circ = \sqrt{3}U_p \angle -90^\circ = U_1 \angle -90^\circ \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A = U_p \angle 120^\circ - U_p \angle 0^\circ = \sqrt{3}U_p \angle 150^\circ = U_1 \angle 150^\circ \end{aligned} \quad (3.7-6)$$

其中, U_1 、 U_p 分别为线电压和相电压的有效值, 其相量图如图 3-45 所示。

从相量图和计算表达式可以看出, 在 Y 形连接的三相对称电源中, 线电压对称, 相电压也对称, 并且 $U_1 = \sqrt{3}U_p$, 线电压超前对应相电压 30° 。

(2) 三相电源的 Δ 形连接

如图 3-44 (b) 所示依次相连的这种连接方式称为三角

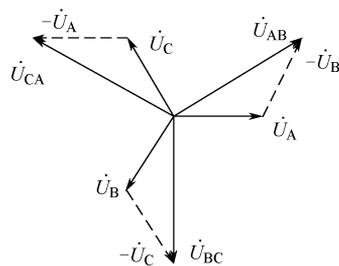


图 3-45 相电压和线电压相量图

形连接。 Δ 形连接没有中点，线电压等于相电压。三相电源的 Δ 形连接必须注意定子绕组的正确接法，不能接反，否则会在回路中产生很大的电流，造成严重后果。

3.7.2 对称三相电路分析

任何一个电路系统都是由电源、负载和中间连接环节三部分组成的，三相电路亦然，上节讨论了电源部分即三相对称电源，下面讨论三相电路的负载和中间环节，并对整个三相电路进行分析求解。

与电源的连接方式类似，根据终端应用的不同，三相负载可连接成Y形（星形）或 Δ 形（三角形），当三个负载的参数相同时，称为对称三相负载。三相对称负载与三相对称电源连接后就组成了三相对称电路。由于电源和负载的接法不同，因此三相电路可分为以下4种情况：Y-Y，Y- Δ ， Δ -Y， Δ - Δ 。这里主要讨论Y-Y形对称三相电路。

如图3-46所示电路电源为Y形对称三相电源，Z为负载阻抗， Z_N 为中线阻抗，由于负载阻抗大小和相位相等，且连接方式也为Y形，因此为Y-Y形连接。

相电压：负载上的电压，其有效值常记为 U_p 。

相电流：负载上的电流，其有效值常记为 I_p 。

线电流：端线上的电流，其有效值常记为 I_l 。

在如图3-46所示电路中，可列出NN'两个节点的节点方程，得到以下结论。

$$\dot{U}_{NN'} = 0 \tag{3.7-7}$$

且

$$\dot{i}_{NN'} = \frac{\dot{U}_{NN'}}{Z_N} = 0 \tag{3.7-8}$$

由 $\dot{U}_{NN'} = 0$ 可知，N'、N为等电位点。故分析这类电路时，可以用短路线连上N'、N，即用短路线代替中线阻抗 Z_N ，将图3-46变为图3-47的情况进行分析。

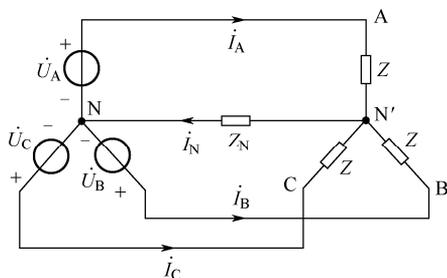


图 3-46 Y-Y 形电路图

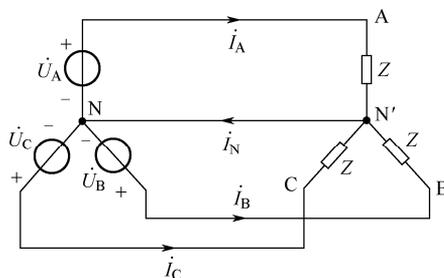


图 3-47 Y-Y 形电路图 ($\dot{U}_{NN'} = 0$)

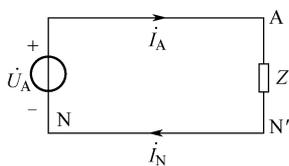


图 3-48 单相电路 (A 相)

在图3-47中，负载相电压等于电源的相电压，相电流等于线电流，即 $I_p = I_l$ ， $U_p = \frac{1}{\sqrt{3}}U_l$ 。且每一相负载和其对应的单相电源构成一个闭合回路。因此线（相）电流可分别在A相回路（如图3-48所示，由A相电源 \dot{U}_A 、A相负载Z、A端线和中线组成）、B相回路、C相回路中分别求得。

若设电源电压 $\dot{U}_A = U_p \angle 0^\circ$ ，负载 $Z = R + jX = |Z| \angle \varphi$ ，则

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{U_p}{|Z|} \angle -\varphi = I_p \angle -\varphi \quad (3.7-9)$$

再由三相电路对称性可知

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_B}{Z} = I_p \angle (-120^\circ - \varphi) \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_C}{Z} = I_p \angle (120^\circ - \varphi) \end{aligned} \quad (3.7-10)$$

其中， $I_p = \frac{U_p}{|Z|}$ 。以上计算方法称为单相算法。

由 $\dot{I}_N = 0$ 的结论，可将中线断开，即将图 3-46 变为图 3-49 的情况进行分析。

结合图 3-46、图 3-47、图 3-49 的分析可知，在负载 Y 形连接的对称三相电路中，有无中线，且中线上有无负载对电路是不会有影响的。利用这个结论可以用单相算法简化 Y-Y 形三相电路的分析计算。

下面讨论三相电路的功率问题。根据平均功率的概念及计算方法，总平均功率可通过每相负载的平均功率之和进行计算，也可通过每相负载中电阻部分消耗的平均功率之和进行计算，即

$$P = 3U_p I_p \cos \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi = 3I_p^2 R \quad (3.7-11)$$

根据无功功率和视在功率的概念及计算方法，其表达式为

$$\text{无功功率: } Q = 3U_p I_p \sin \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi \quad (3.7-12)$$

$$\text{视在功率: } S = 3U_p I_p = \sqrt{3} U_l I_l \quad (3.7-13)$$

例 3-27 Y-Y 连接的三相电路，其负载连接如图 3-50 所示。已知 $Z = (5 + j5) \Omega$ ， $\dot{U}_{AB} = 380 \angle 0^\circ \text{ V}$ 。求各线（相）电流及三相负载的总平均功率 P 。

解：对称三相电路，可先计算一相再通过对称性求解其余的量。由题已知 $\dot{U}_{AB} = 380 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，可推出

$$\dot{U}_A = 220 \angle -30^\circ \text{ V}$$

在 A 相的回路中可得

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{220 \angle -30^\circ}{5 + j5} = 22\sqrt{2} \angle -75^\circ \text{ A}$$

根据对称性，得

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A \angle -120^\circ = 22\sqrt{2} \angle 165^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A \angle 120^\circ = 22\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ A}$$

三相负载的总平均功率 P 可通过每相负载中电阻部分消耗的平均功率之和进行计算，得

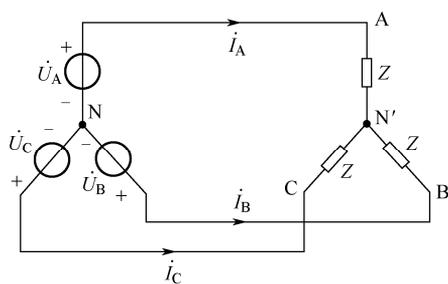


图 3-49 Y-Y 形电路图 ($\dot{I}_N = 0$)

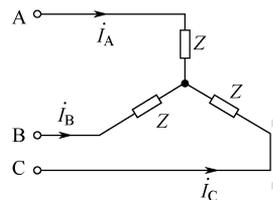


图 3-50 例 3-27 图

$$P = 3I_p^2 R = 3 \times (22\sqrt{2})^2 \times 5 = 14520 \text{ W}$$

综合上面的例题可以得到结论：三相电路可以看成 3 个同频率正弦电源共同作用下的正弦电流电路，用复杂交流电路分析方法，结合三相电路的对称性，可以解决三相电路的分析问题。

练习题

3-1 已知正弦交流电的频率为 60Hz，试求该正弦交流电的角频率。

3-2 已知正弦电压 $u(t) = 311\cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$ ，求正弦电压的振幅、角频率和初相。

3-3 写出下列正弦电压和电流的瞬时表达式。

(1) $U_m = 10 \text{ V}$ ， $f = 50 \text{ Hz}$ ， $\theta_u = 60^\circ$ ；

(2) $I = 5 \text{ A}$ ， $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ ， $\theta_i = 45^\circ$ 。

3-4 已知某电路的电压和电流分别为 $u(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t) \text{ V}$ ， $i(t) = 10\cos(2t - 37^\circ) \text{ A}$ ，求正弦电压与电流的相位差，画出波形图。

3-5 正弦电压的振幅 $U_m = 2 \text{ V}$ ，角频率 $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ ，初相角 $\theta_u = 60^\circ$ ，写出其瞬时表达式，并求电压的有效值 U 。

3-6 试用相量来表示下列正弦量。

(1) $u(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 37^\circ) \text{ V}$ ；

(2) $i(t) = 50\cos(\omega t - 15^\circ) \text{ A}$ 。

3-7 写出下列相量所代表的正弦信号，设角频率为 ω 。

(1) $\dot{I}_m = (2 + j2) \text{ A}$ ；

(2) $\dot{I} = (4 - j2) \text{ A}$ 。

3-8 将电压 $u(t) = 20\cos(100t + 30^\circ) \text{ V}$ 作用在 0.1 H 电感两端，电感两端电压电流为关联参考方向，试求流过该电感的稳态电流。

3-9 将电压 $u(t) = 8\cos(10^3 t - 45^\circ) \text{ V}$ 作用在 $50 \mu\text{F}$ 电容两端，电容两端电压电流为关联参考方向，试求流过该电容的稳态电流。

3-10 如图 3-51 所示的无源的二端网络 N 中，若端口电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 分别有以下两种情况，求各种情况下的阻抗和导纳。

(1) $u(t) = 50\cos\pi t \text{ V}$ ， $i(t) = 5\cos\pi t \text{ A}$ ；

(2) $u(t) = 12\cos(10t + 60^\circ) \text{ V}$ ， $i(t) = 6\cos(10t + 30^\circ) \text{ A}$ 。

3-11 如图 3-52 所示正弦电路稳态中，已知 $R = 2\Omega$ ， $X_L = 4\Omega$ ， $X_C = 3\Omega$ ，求该电路的等效阻抗。

3-12 求图 3-53 中 ab 端的阻抗和导纳，其中 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 。

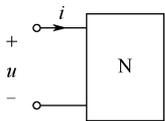


图 3-51 题 3-10 图

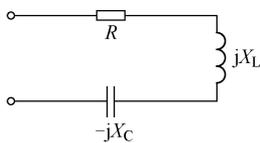


图 3-52 题 3-11 图

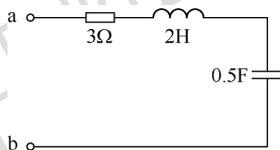


图 3-53 题 3-12 图

3-13 如图 3-54 所示电路, 设伏特计内阻为无限大, 已知伏特计读数依次为 3V、6V、10V, 求电源电压的有效值。

3-14 如图 3-55 所示电路, 若 $\dot{U} = 10 + j5\text{V}$, $\dot{I} = 2 + j1\text{A}$, 求电路 N 吸收的功率 P 。

3-15 如图 3-56 所示电路, 若 $u(t) = 10\cos(\omega t + 15^\circ)\text{V}$, $i(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t + 75^\circ)\text{A}$, 求电路 N 吸收的平均功率 P 。

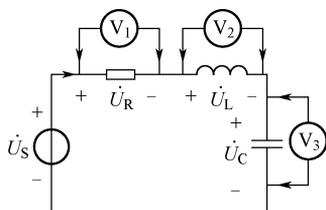


图 3-54 题 3-13 图

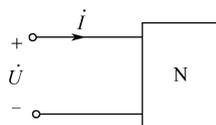


图 3-55 题 3-14 图

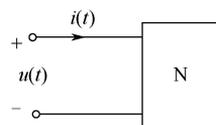


图 3-56 题 3-15 图

3-16 如图 3-57 所示电路 Z_L 的实、虚部单独可调, 求 Z_L 调整为何值时才能获得最大功率, 其最大功率为多少?

3-17 RLC 串联谐振电路的谐振频率为 10^3rad/s , 通频带为 50rad/s , 谐振时阻抗为 200Ω , 试求 L 和 C 。

3-18 RLC 串联谐振电路如图 3-58 所示, 试求通频带 BW。

3-19 如图 3-59 所示电路中, 电源电压 $U = 10\text{V}$, 角频率 $\omega = 3000\text{rad/s}$, 调节电容使电路达到谐振, 谐振时, 电流 $i_0 = 100\text{mA}$, 电容电压 $U_{C0} = 200\text{V}$ 。试求 R 、 L 、 C 及回路的品质因数 Q 。

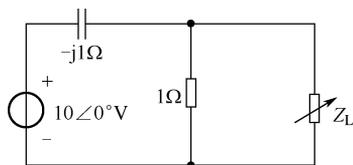


图 3-57 题 3-16 图

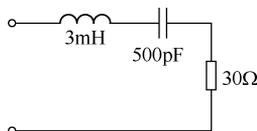


图 3-58 题 3-18 图

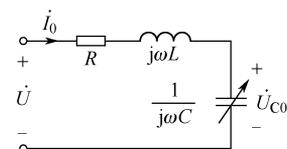


图 3-59 题 3-19 图

3-20 如图 3-60 所示理想变压器电路, 如 $\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ\text{V}$, 求电流 i 。

3-21 如图 3-61 所示理想变压器电路, 若 $I_s = 2\text{A}$, 求电压 U 。

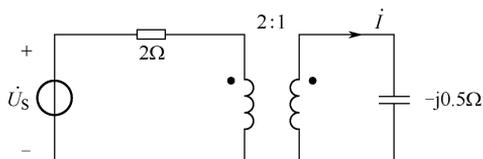


图 3-60 题 3-20 图

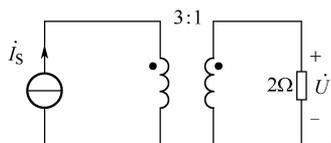


图 3-61 题 3-21 图

3-22 理想变压器电路如图 3-62 所示, 求电压 U 。

3-23 Y 形连接的三相交流电源, 若线电压 $u_{BC} = 380\sqrt{2}\cos\omega t\text{V}$, 试求相电压 u_B 。

3-24 对称三相电源接于 Y 对称负载, $\dot{U}_{AB} = 380\angle 0^\circ\text{V}$, $\dot{I}_A = 10\angle 0^\circ\text{A}$, 求每相阻抗的值。

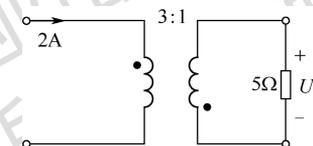


图 3-62 题 3-22 图

3-25 对称三相电路中, 已知 $\dot{U}_{AB} = 380\angle 0^\circ\text{V}$, $\dot{I}_A = 2\angle -30^\circ\text{A}$, 求三相电路有功功率 P 。

练习题答案

3-1 $\omega = 120\pi \text{ rad/s} \approx 377 \text{ rad/s}$ 。

3-2 $U_m = 311\text{V}$, $\omega = 314 \text{ rad/s}$, $\theta_u = 30^\circ$ 。

3-3 (1) $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u) = 10 \cos(100\pi t + 60^\circ)\text{V}$;

(2) $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) = 5\sqrt{2} \cos(10^3 t + 45^\circ)\text{A}$ 。

3-4 $\varphi = 37^\circ$, 即 $u(t)$ 超前 $i(t)$ 37° 角, 或者称 $i(t)$ 滞后 $u(t)$ 37° 角。

3-5 $u(t) = 2 \cos(10^3 t + 60^\circ)\text{V}$, 电压有效值 $U = \sqrt{2}$ 。

3-6 (1) $\dot{U} = 10\angle 37^\circ\text{V}$; (2) $\dot{i} = 25\sqrt{2}\angle -15^\circ\text{A}$ 。

3-7 (1) $i(t) = 2\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ)\text{A}$; (2) $i(t) = 2\sqrt{10} \cos(\omega t - 26.57^\circ)\text{A}$ 。

3-8 $i(t) = 2 \cos(100t - 60^\circ)\text{A}$

3-9 $i(t) = 0.4 \cos(10^3 t + 45^\circ)\text{A}$

3-10 (1) $Z = 10\Omega$, $Y = \frac{1}{10}\text{S}$;

(2) $Z = 2\angle 30^\circ\Omega$, $Y = 0.5\angle -30^\circ\text{S}$ 。

3-11 $Z = 2 + j$ 。

3-12 $Z = 3\sqrt{2}\angle 45^\circ\Omega$, $Y = \frac{1}{Z} = \frac{\sqrt{2}}{6}\angle -45^\circ\text{S}$ 。

3-13 $U_s = 5\text{V}$ 。

3-14 25W 。

3-15 $5\sqrt{2}\text{W}$ 。

3-16 当 $Z_L = Z_0^* = \frac{1+j}{2}\Omega$ 时, 获得的最大功率为 $P_{L\max} = 25\text{W}$ 。

3-17 4H , $0.25\mu\text{F}$ 。

3-18 10^4 rad/s 。

3-19 (1) 100Ω ;

(2) 0.667H ;

(3) $0.167\mu\text{F}$;

(4) 20 。

3-20 $5\sqrt{2}\angle 45^\circ\text{A}$ 。

3-21 12V 。

3-22 -30V 。

3-23 $220\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ)\text{V}$ 。

3-24 $22\angle -30^\circ\Omega$ 。

3-25 1320W 。