

## 第3章



# 多单元永磁同步电动机的 转矩特性及转矩波动

### 3.1 引言

多单元永磁同步电动机尤其适合在供电电压受限时实现整机的大功率运行,通过多个单元电动机的协同控制,使得每个单元电动机输出相同的电磁转矩。当部分单元电动机或驱动器出现开路故障时,可将故障单元驱动器直接切除,剩余的单元电动机仍能正常运行,因此多单元永磁同步电动机具有一定的容错运行能力。虽然各单元电动机间在电气上是相互隔离,但因绕组存在共磁路问题,所以各单元电动机绕组间存在一定的磁耦合性,且每个单元电动机内部各相绕组间互感磁路呈现非循环对称。在部分单元电动机容错运行时,耦合磁路不对称将引起互感参数的不对称,并产生电磁转矩波动,这将引起整机容错运行时转矩平稳性下降。本章针对多单元永磁同步电动机的机械特性和容错时的转矩波动进行详细阐述。

### 3.2 多单元永磁同步电动机的转矩特性

本章仍以前文的 5 单元永磁同步电动机为研究对象,先从部分单元永磁同步电动机运行时电磁转矩推导着手,最终得到整机运行时的电磁转矩解析公式,并进行相关数值分析和试验验证。

#### 3.2.1 部分单元电动机运行时的基本电磁转矩方程

在部分单元电动机运行时,单元驱动器所采用的电动机控制模型仍是基于交直轴( $d_q$ 轴)变换后的数学模型,假定在电流闭环后,单元电动机绕组均为标准正弦量,即各单元电动机定子绕组的相电流幅值、频率均相等,且三相电流相位互差  $120^\circ$  电角度,此时一个单元电动机的绕组电流可写为

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \sin(\omega t) \\ I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

式中,  $I_m$  为相电流幅值;  $\omega$  为电频率;  $t$  为时间。

根据电动机中的机电能量转换公式可知, 电动机运行时的电磁转矩方程可写为

$$T_e = p \frac{1}{2} \mathbf{I}_1^T \frac{dL_1}{d\theta} \mathbf{I}_1 + p \mathbf{I}_1^T \frac{dM_{sr}}{d\theta} \mathbf{I}_f + p \frac{1}{2} \mathbf{I}_f^T \frac{dL_2}{d\theta} \mathbf{I}_f \quad (3-2)$$

式中, 等式右侧第一项为磁阻转矩, 该转矩可以是恒定转矩或波动转矩; 等式右侧第二项为定子、转子间磁场相互作用产生的基本电磁转矩; 等式最后一项为永磁同步电动机的齿槽定位力矩, 该转矩在本章中不做详细论述。

从对单元电动机绕组间互感不对称可知, 在三相对称电流条件下, 磁阻转矩将不再是恒定常数, 而是随转角变化的周期函数, 本章将对该转矩波动的幅值、频率等展开详细论述。

本节仅对基本电磁转矩项进行推导计算。在此以 1 号单元电动机、2 号单元电动机和 4 号单元电动机运行作为研究工况, 此时的 3 个单元电动机运行的基本电磁转矩表达式如下所示。

$$\begin{bmatrix} T_{e1} \\ T_{e2} \\ 0 \\ T_{e4} \\ 0 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ 0 \\ \mathbf{I}_4 \\ 0 \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{sr} \end{bmatrix} \mathbf{I}_f \quad (3-3)$$

式中,  $p$  为电动机的极对数。

由于单元电动机的基本转矩方向、数值均一致, 所以可将部分单元电动机运行时的基本电磁转矩表示为几个单元电动机电磁转矩代数和的形式, 将式 (3-1) 代入式 (3-3) 进行化简, 可以得到

$$T_e = \sum_{i=1}^3 T_{ei} = \frac{9}{2} p I_m M_{af} I_f \quad (3-4)$$

### 3.2.2 全部单元电动机运行时的基本电磁转矩方程

当所有单元电动机共同运行时, 多单元电动机可等效为一台普通三相永磁同步电动机, 并不存在电感不对称引起的磁阻转矩波动。转矩中仅包含齿槽定位力矩和基本电磁转矩, 其中, 齿槽定位力矩与运行单元电动机的数量无关, 基本电磁转矩可写为

$$\begin{bmatrix} T_{e1} \\ T_{e2} \\ T_{e3} \\ T_{e4} \\ T_{e5} \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_5 \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{sr} \end{bmatrix} \mathbf{I}_f \quad (3-5)$$

将定子、转子间互感表达式(2-2)和绕组电流表达式(3-1)代入式(3-5)进行化简,可得到5单元电动机共同运行时的基本转矩方程表达式,其表达式如下所示。

$$T_e = \frac{15}{2} p I_m M_{af} I_f \quad (3-6)$$

对比式(3-4)与式(3-6)不难发现,相同电流条件下,整机运行时的基本电磁转矩是3个单元电动机运行时的5/3倍。

至此,可以推导得到 $N$ 个单元电动机运行时的基本电磁转矩方程为

$$T_e = \sum_{i=1}^N T_{ei} = \sum_{i=1}^N \frac{3}{2} p I_m M_{af} I_f \quad (3-7)$$

式中, $N$ 为运行的单元电动机个数。

可以看出,部分单元电动机运行时,电动机的基本电磁转矩仅与绕组相电流和运行的单元电动机数量有关,而与运行单元电动机的空间位置无关。所以,当某些单元电动机或驱动器出现开路故障时,在将其直接切除后,剩余的单元电动机仍可输出自身额定功率。若在设计之初,各单元电动机再具有一定的连续过载能力,则当部分单元电动机过载运行时,整机输出功率并不会损失特别多,仍可保证负载在故障状态下降级使用的可靠性和安全性。

### 3.2.3 多单元永磁同步电动机基本电磁转矩计算及试验

#### 1. 部分单元空载时的反电动势计算与试验

各单元电动机空间绝对位置和相对位置并不影响基本电磁转矩,本书针对5单元永磁同步电动机的自身特点,建立多单元永磁同步电动机整机的二维有限元模型,计算出多单元永磁同步电动机额定转速空载运行时的整机磁场分布和单元电动机内三相绕组的线反电动势波形,并与相关试验进行了横向对比。通过反电动势计算和测试结果对比,可以验证各单元电动机绕组磁链的准确性,保证了后续基本电磁转矩计算的准确性。

空载运行时,各单元电动机间、各相间无互感影响,各单元对应相绕组反电动势波形完全一致。经过有限元仿真计算,5单元永磁同步电动机空载磁密云图如图3-1所示。

在空载转速为100r/min时,一个单元电动机三相绕组的线反电动势计算曲线如图3-2所示。

将多单元电动机转子匀速拖动至某个恒定转速,测试了一个单元电动机空载时线反电动势系数试验曲线,如图3-3所示。



图 3-1 5 单元永磁同步电动机空载磁密云图

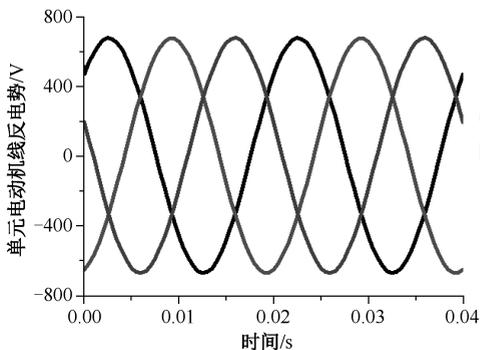


图 3-2 一个单元电动机在 100r/min 时三相绕组的线反电动势计算曲线

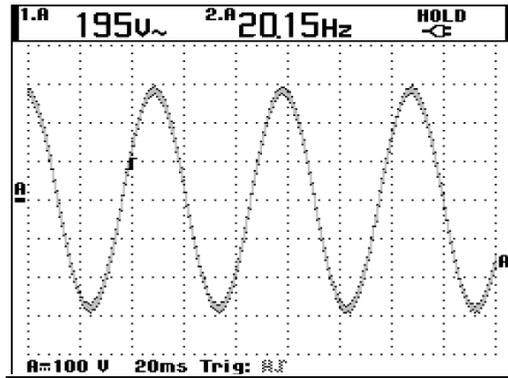


图 3-3 一个单元电动机空载时线反电动势系数试验曲线

多单元电动机有限元模型的线峰值反电动势系数计算值为  $64.60 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad}$ ，反电动势系数试验测试值为  $65.32 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad}$ 。通过对比，可以看出空载时多单元电动机的磁场数值计算与实际测试值极为接近，计算误差为  $1.1\%$ 。

通过计算和测试，验证了数值分析结果的准确性和正确性。

## 2. 部分单元的基本电磁转矩计算与试验

为验证空间绝对位置和相对位置与基本电磁转矩之间的关系，采用了有限元数值分析和相关试验验证的方法，对多单元永磁同步电动机展开分析。在数值分析模型中，令不同空间位置的单元电动机匹配运行，计算出不同定子电流时的电动机基本电磁转矩分量。与之相对应的是，在电动机试验中，也采用不同空间位置的单元电动机匹配运行，测试其输出转矩，进行数值计算结果与测试结果的横向对比。

当不同空间位置、不同数量的单元电动机运行时，不同电流下基本电磁转矩的有限元计算结果与试验数据对比如图 3-4 所示。

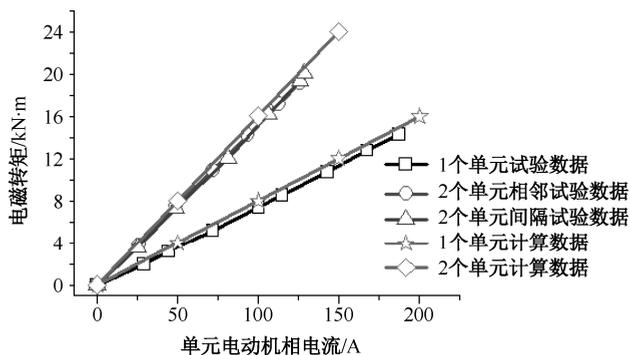


图 3-4 不同电流下基本电磁转矩的有限元计算结果与试验数据对比

从图 3-4 可以看出，在两个单元电动机运行时，无论两个单元电动机在空间上是相邻排布还是间隔排布，在相同电流条件下，基本电磁转矩完全一致。且在相同电流条件下， $N$  个单元电动机运行时的转矩是一个单元电动机运行时的  $N$  倍，验证了多单元电动机基本电磁转矩与运行单元电动机个数呈线性的关系。通过计算结果与试验数据的横向对比，可以看出，有限元

模型的结果非常接近于试验测试数据,本书所建立的多单元永磁同步电动机有限元模型是准确无误的。

在多单元永磁同步电动机有限元模型中,不同电流、不同数量的单元电动机运行时单元电动机电磁转矩如图 3-5 所示。

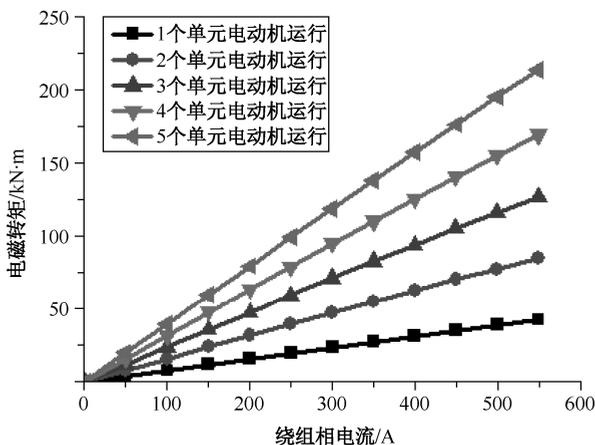


图 3-5 不同情况时单元电动机电磁转矩与电流关系计算曲线

通过数值计算可以看出,在相同绕组电流时,多单元电动机的基本电磁转矩与运行的单元电动机个数呈正比。且随着绕组电流的增加,电磁转矩具有良好的线性度。在设计之初,为保证在部分单元电动机容错运行时仍具有一定的过载能力,在此可将铁心饱和度适当降低。在容错运行时,仅部分单元电动机运行可适当增加绕组电流,提升容错运行性时整机输出功率,同时还满足一定的转矩-电流线性度要求,可更适用于伺服精度要求较高的负载场合。

### 3.3 多单元永磁同步电动机容错运行时的转矩波动分析

多单元永磁同步电动机具备一定的容错运行能力,当某几个单元电动机或驱动器发生开路故障后,可以直接将该单元电动机整体切除,其余单元电动机仍可保持正常运行。在部分单元电动机运行时,因单元电动机内部电感矩阵不对称,在三相对称电流条件下,电动机运行时将会产生电磁转矩波动。

同时,转矩波动的幅值不仅仅与单元电动机绕组电流幅值有关,还与正在运行的单元电动机的空间分布位置有关,所以有必要针对部分单元电动机运行时的电磁转矩波动进行详细的分析和计算。

#### 3.3.1 1 个单元电动机运行时电磁转矩波动

首先,假设单元电动机绕组通以三相对称交流电,在无其他说明时,后续均以三相对称电流作为假设条件,当仅 1 个单元电动机运行时,磁阻转矩可以由下式表示:

$$\Delta T_e = \frac{1}{2} p I_1^T \frac{dL}{d\theta} I_1 \quad (3-8)$$

电感矩阵的表达式 (2-58) 及三相对称电流表达式 (3-1) 代入式 (3-8), 可得磁阻转矩表达式为

$$\Delta T_e = \frac{1}{2} p \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L_A & M_{A1B1} & M_{A1C1} \\ M_{A1B1} & L_B & M_{B1C1} \\ M_{A1C1} & M_{B1C1} & L_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

经过化简后, 可得仅 1 个单元电动机运行时的转矩波动表达式为

$$\Delta T_e = -\frac{1}{2} p I_m^2 (M_{S20} - M_{S21}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-10)$$

式中,  $p$  为电动机极对数;  $I_m$  为相电流幅值;  $M_{S20}$  为相邻两绕组间互感;  $M_{S21}$  为间隔一相的两绕组互感。

从磁阻转矩波动表达式中可以看出, 互感 2 次项的不对称将引起 2 次低频转矩和 4 次低频转矩波动。而在三相对称电流条件下, 互感中恒定分量的不对称并不会引起转矩波动, 仅会引起三相绕组端电压的不对称。在普通三相对称电动机中, 因三相绕组互感对称, 所以不存在该类转矩波动。倘若绕组电感不包含 2 次分量, 即转子为严格的隐极结构, 在三相对称电流的条件下, 即使部分单元电动机运行也不会产生磁阻转矩。

根据对饱和互感参数的计算可知, 随着定子电流的增加, 相间互感 2 次分量变化的幅度并不相同, 式 (3-10) 中的两个互感 2 次分量之差受磁路饱和影响较大, 2 次转矩和 4 次转矩波动的幅值与绕组电流为非线性关系。

互感 2 次分量之差与定子电流的关系如图 3-6 所示。可以看出, 两个互感的 2 次项之差与定子电流呈非线性关系, 因为空间上 5 个单元电动机是完全一致的, 所以无论是哪个单元电动机单独运行, 其磁阻转矩波动均相同。

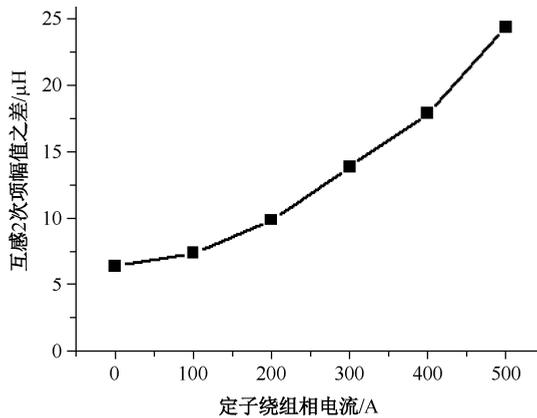


图 3-6  $M_{S20} - M_{S21}$  与定子电流关系计算曲线

定子绕组电流为 450A 时, 仅 1 号单元电动机运行时在一个电周期内的电磁转矩波形如图 3-7 所示。在 450A 三相对称电流条件下, 一个电周期内, 2 次谐波转矩波动非常明显, 其波形要大于 6 次饱和引起的转矩波动, 因此需要对磁阻转矩进行详细数值计算。

采用有限元法计算 1 号单元电动机运行时转矩波动幅值与相电流的关系曲线如图 3-8 所示。

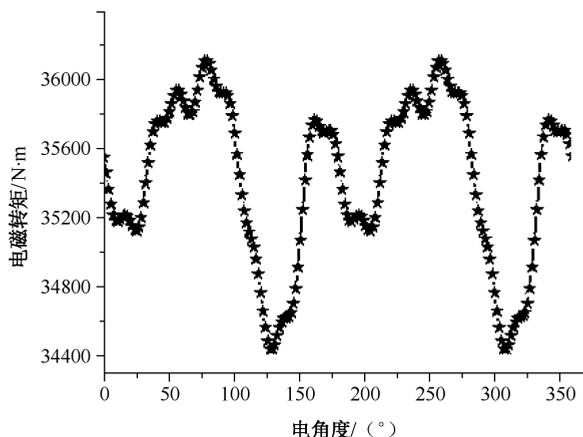


图 3-7 在 450A 时一个电周期内的电磁转矩波形

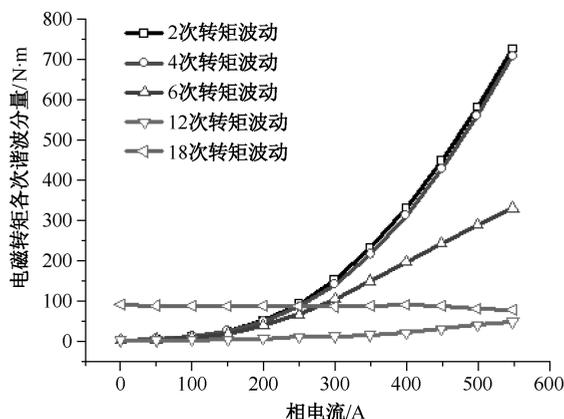


图 3-8 1号单元电动机运行时转矩波动幅值与相电流的关系曲线

2次转矩和4次转矩波动幅值与绕组电流呈2次函数关系，且在相同电流时，2次转矩和4次转矩波动幅值基本一致，该结论与式(3-10)转矩波动表达式一致。相比较而言，在450A时由饱和引起的6次转矩波动幅值相对较小，仅有2次转矩波动的54%，这是因为仅一个单元电动机运行，仅有局部饱和并非整机饱和。此外，齿槽定位转矩所占比重也较小，且随相电流的增加变化不大。

### 3.3.2 2个单元电动机运行时电磁转矩波动

在5单元永磁同步电动机中，当其中2个单元电动机运行时，存在两种空间组合方式：一种是两个相邻单元电动机共同运行，如1号单元电动机和2号单元电动机共同运行；另一种是两个单元电动机中间间隔一个单元电动机运行，如1号单元电动机与3号单元电动机共同运行。

#### 1. 1号和2号单元电动机运行时的电磁转矩波动

1号单元电动机、2号单元电动机运行时，磁阻转矩波动可以按照下列公式进行计算：

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{e1} \\ \Delta T_{e2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} p \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{12}^T & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

将式(3-11)展开后可得到电磁转矩波动的表达式,即

$$\Delta T_e = \Delta T_{e1} + \Delta T_{e2} = p \mathbf{I}^T \frac{dL(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + \frac{1}{2} p \mathbf{I}^T \frac{d\mathbf{M}_{12}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + \frac{1}{2} p \mathbf{I}^T \frac{d\mathbf{M}_{12}^T(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} \quad (3-12)$$

将电感矩阵式(2-58)、式(2-61)和电流式(3-1)代入式(3-12)并进行化简,可得谐波转矩表达式为

$$\Delta T_e = -\frac{1}{2} p I_m^2 (M_{S20} - M_{S21} + M_{S23} - M_{S24}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-13)$$

因为互感2次分量随着两绕组间距增加而下降并趋向平稳,所以 $M_{S23}$ - $M_{S24}$ 项可以忽略不计,上式可以简写为

$$\Delta T_e = -\frac{1}{2} p I_m^2 (M_{S20} - M_{S21}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-14)$$

对比式(3-10)和式(3-14)可知,在同样电流前提下,2个相邻单元电动机运行与1个单元电动机运行时的2次谐波转矩和4次谐波转矩幅值、相位近似相等。

## 2. 1号单元电动机和3号单元电动机运行时的电磁转矩波动

当1号单元电动机和3号单元电动机运行时,磁阻转矩波动可以按照下式进行计算:

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{e1} \\ \Delta T_{e3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} p \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{13}^T & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

将式(3-15)展开可以得到如下的表达式:

$$\Delta T_e = \Delta T_{e1} + \Delta T_{e3} = p \mathbf{I}^T \frac{dL(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + \frac{1}{2} p \mathbf{I}^T \frac{d\mathbf{M}_{13}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + \frac{1}{2} p \mathbf{I}^T \frac{d\mathbf{M}_{13}^T(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} \quad (3-16)$$

将电感矩阵式(2-58)、式(2-63)及电流式(3-1)代入式(3-16)后进行化简,可得电磁转矩波动的表达式:

$$\Delta T_e = -\frac{1}{2} p I_m^2 (2M_{S20} - 2M_{S21} - M_{S23} + M_{S24}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-17)$$

在忽略互感中的极小项 $M_{S23}$ - $M_{S24}$ 后,转矩波动公式可以简化为

$$\Delta T_e = -p I_m^2 (M_{S20} - M_{S21}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-18)$$

对比1号单元电动机、3号单元电动机运行与1号单元电动机、2号单元电动机运行两种方式可以看出,在相同电流条件下,两单元电动机间隔运行时,2次转矩和4次转矩波动幅值是相邻两单元电动机运行时的2倍。

## 3. 2个单元电动机运行时电磁转矩波动计算

从推导的谐波转矩解析公式可以看出,不同位置的2个单元电动机运行时,在相同电流条件下,谐波转矩幅值会相差2倍。为了验证该结论,分别对上述两种工况进行了数值分析。

在单元电动机三相绕组电流为450A时,一个电周期内,不同空间位置的两单元电动机组

合运行时的转矩曲线如图 3-9 所示。

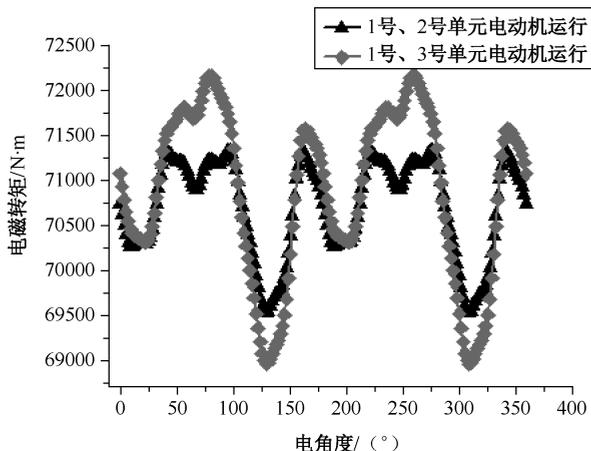


图 3-9 2 个单元电动机在 450A 时一个电周期内转矩曲线

从图 3-9 可以看出,在相同电流条件下,空间不同位置的两个单元电动机共同运行时,其转矩的恒定分量完全一致,但 1 号单元电动机和 3 号单元电动机运行时的转矩波动幅值较相邻的 1 号单元电动机和 2 号单元电动机运行时的转矩波动幅值大很多。

对不同位置的 2 个单元电动机运行时电磁转矩进行快速傅里叶变换,得到 2 次谐波转矩、4 次谐波转矩及 6 次谐波转矩幅值与相电流的关系曲线,如图 3-10 所示。

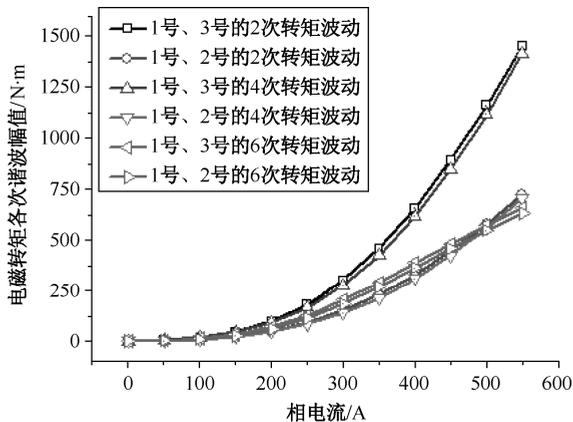


图 3-10 不同位置的 2 个单元电动机运行时电磁转矩幅值与相电流关系计算结果

由图 3-10 可以看出,在同样电流条件时,1 号、3 号单元电动机共同运行时的 2 次谐波转矩、4 次谐波转矩是 1 号单元电动机、2 号相邻单元电动机运行时的 2 倍,且 2 次谐波转矩与 4 次谐波转矩幅值近似相等。以 450A 为例,两相邻单元电动机运行时,2 次谐波转矩的幅值为 445.9N·m,而两个单元电动机间隔一个单元电动机运行时,2 次谐波转矩的幅值为 893.5N·m,仅 1 号单元电动机运行时,2 次谐波转矩幅值为 446.5N·m。通过比较,不难发现两相邻单元电动机运行的磁阻转矩波动幅值与一个单元电动机运行时的相同,而两单元电动机间隔运行时的磁阻转矩波动将增加约一倍。从转矩波动解析公式推导和有限元数值分析都验证

了磁阻转矩波动不仅与绕组相电流幅值有关，还与运行单元电动机的空间位置有关。

当运行单元电动机数量一致，电流相同时，电动机的磁路饱和度近似相同，通过数值计算结果可以看出，饱和引起的 6 次波动与单元电动机的空间分布位置无关。除此之外，还可以看出随着运行的单元电动机数量有所增加，6 次波动所占的分量越来越大。当两相邻单元电动机运行时，6 次谐波转矩与 2 次谐波转矩和 4 次谐波转矩幅值较为近似。饱和引起的 12 次谐波转矩波动也会有所增加，而齿槽定位力矩 18 次谐波转矩则变化不大，上述 2 次谐波转矩因所占份额较小所以未在图中给出。

### 3.3.3 3 个单元电动机运行时电磁转矩波动

从前文分析可看出，谐波转矩与运行的单元电动机空间位置有关。整机含有 5 个单元电动机，若其中 3 个单元电动机运行，则有两种不同的排列方式：一种是 3 个单元电动机相邻运行，即 1 号单元电动机、2 号单元电动机和 3 号单元电动机共同运行；另外一种是在 3 个单元电动机中，两个单元电动机相邻，一个单元电动机间隔运行，即 1 号单元电动机、2 号单元电动机和 4 号单元电动机共同运行。按照不同单元电动机空间分布，进行谐波转矩的解析公式推导。

#### 1. 1 号单元电动机、2 号单元电动机和 3 号单元电动机运行时的电磁转矩波动

当 3 个相邻的单元电动机共同运行时，磁阻转矩波动公式可以按照下式进行计算：

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{e1} \\ \Delta T_{e2} \\ \Delta T_{e3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} p \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L & M_{12} & M_{13} \\ M_{12}^T & L & M_{23} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

在三相对称电流条件下，1 号单元电动机、2 号单元电动机和 3 号单元电动机运行时，上式可以展开为

$$\begin{aligned} \Delta T_e &= \Delta T_{e1} + \Delta T_{e2} + \Delta T_{e3} \\ &= \frac{3}{2} p \mathbf{I}^T \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + p \mathbf{I}^T \frac{dM_{12}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + p \mathbf{I}^T \frac{dM_{23}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + p \mathbf{I}^T \frac{dM_{13}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3-20)$$

将电感矩阵式 (2-58)、式 (2-61) 及式 (2-63) 和电流式 (3-1) 代入式 (3-20)，并进行化简，可以得到

$$\Delta T_e = -\frac{1}{2} p I_m^2 (M_{S20} - M_{S21} + M_{S23} - M_{S24}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-21)$$

将电磁转矩波动表达式中互感里的极小项  $M_{S23} - M_{S24}$  忽略掉，则转矩波动方程可以改写为

$$\Delta T_e = -\frac{1}{2} p I_m^2 (M_{S20} - M_{S21}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-22)$$

对比一个单元电动机运行时的方程可以看出，3 个紧邻的单元电动机共同运行时，其定子侧的磁阻转矩波动与一个单元电动机运行时的完全一致。

#### 2. 1 号单元电动机、2 号单元电动机和 4 号单元电动机运行时的电磁转矩波动

当 3 个单元电动机，其中 2 个相邻，第 3 个与之间隔 1 个单元，以 1 号单元电动机、2 号

单元电动机和4号单元电动机共同运行为例进行谐波转矩推导，其表达式如下：

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{e1} \\ \Delta T_{e2} \\ \Delta T_{e4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} p \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L & M_{12} & M_{14} \\ M_{12}^T & L & M_{24} \\ M_{14}^T & M_{24}^T & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

假定各单元电动机内的绕组均施加三相对称且等幅值的正弦电流激励，则上式将各项转矩波动求和后可得如下形式：

$$\begin{aligned} \Delta T_e &= \Delta T_{e1} + \Delta T_{e2} + \Delta T_{e4} \\ &= \frac{3}{2} p \mathbf{I}^T \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + p \mathbf{I}^T \frac{dM_{12}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + p \mathbf{I}^T \frac{dM_{24}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} + p \mathbf{I}^T \frac{dM_{14}(\theta)}{d\theta} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3-24)$$

将电感矩阵式(2-58)式(2-61)及式(2-63)和电流式(3-1)代入上式，并进行相关化简计算，可得到谐波转矩的表达式为

$$\Delta T_e = -\frac{1}{2} p I_m^2 (2M_{S20} - 2M_{S21} - M_{S23} + M_{S24}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-25)$$

将电磁转矩波动表达式中互感的极小项  $M_{S23} - M_{S24}$  忽略掉，则转矩波动方程可以写为

$$\Delta T_e = -p I_m^2 (M_{S20} - M_{S21}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-26)$$

与3个相邻单元电动机运行工况对比可以看出，当1号单元电动机、2号单元电动机和4号单元电动机共同运行时，谐波转矩幅值将增大约一倍。

### 3. 3个单元电动机运行时电磁转矩波动计算

采用有限元数值分析方法，计算了3个单元电动机在空间不同位置分布时的转矩波形，电流为450A时一个周期内的转矩计算曲线如图3-11所示。

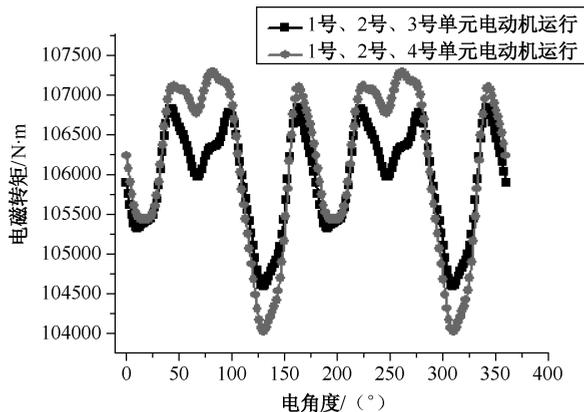


图 3-11 电流为 450A 时一个电周期内的转矩计算曲线

从图 3-11 可以看出，3 个相邻单元电动机运行时的谐波转矩分量相对较小，且不同位置处的单元电动机运行时，谐波转矩的相位也基本一致。为了更好地描述谐波转矩变化规律，计算了不同相电流时的各次主要谐波转矩幅值，其计算结果如图 3-12 所示。

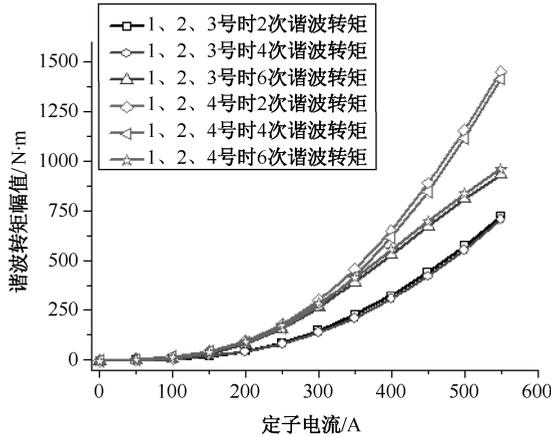


图 3-12 不同位置 3 个单元电动机运行时谐波转矩幅值与相电流关系计算结果

从图 3-12 可以看出, 无论运行单元电动机的空间排布位置如何, 2 次谐波转矩和 4 次谐波转矩幅值基本一致。相比较而言, 1 号单元电动机、2 号单元电动机和 4 号单元电动机运行时的 2 次谐波转矩和 4 次谐波转矩幅值是 1~3 号单元电动机运行时的两倍, 即单元电动机的空间分布对 2 次谐波转矩和 4 次谐波转矩有很大影响。同时, 3 个紧邻的单元电动机运行时, 其 2 次谐波转矩和 4 次谐波转矩与一个单元电动机运行时的完全相等。对于饱和引起的转矩波动, 从图中可以看出无论运行单元电动机空间位置如何, 其 6 次谐波转矩幅值极为近似, 而且定子绕组电流的增加, 6 次谐波转矩幅值将比 3 个相邻单元电动机运行时的 2 次谐波转矩和 4 次谐波转矩幅值要大一些, 但是比 3 个单元电动机间隔一个单元电动机运行时的 2 次谐波转矩和 4 次谐波转矩幅值相对要小一些。所以, 在 3 个单元电动机共同运行时, 饱和引起的谐波转矩所占比例有所增加。此外, 饱和引起的 12 次谐波转矩所占比重较小, 在此未给出。

### 3.3.4 4 个单元电动机运行时电磁转矩波动

在 5 个单元电动机中, 若其中 4 个单元电动机共同运行时, 只有 4 个单元电动机相邻运行一种排列方式。在此以 1~4 号单元电动机共同运行作为分析对象, 其磁阻转矩波动可以按照下式进行推导:

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{e1} \\ \Delta T_{e2} \\ \Delta T_{e3} \\ \Delta T_{e4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} p \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12}^T & L & M_{23} & M_{24} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & L & M_{34} \\ M_{14}^T & M_{24}^T & M_{34}^T & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

将上述矩阵方程展开, 其中各项谐波转矩相加, 可得

$$\begin{aligned} \Delta T_e &= \Delta T_{e1} + \Delta T_{e2} + \Delta T_{e3} + \Delta T_{e4} \\ &= 2pI^T \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} I + pI^T \frac{dM_{12}(\theta)}{d\theta} I + pI^T \frac{dM_{13}(\theta)}{d\theta} I + pI^T \frac{dM_{14}(\theta)}{d\theta} I + \\ &\quad pI^T \frac{dM_{23}(\theta)}{d\theta} I + pI^T \frac{dM_{24}(\theta)}{d\theta} I + pI^T \frac{dM_{34}(\theta)}{d\theta} I \end{aligned} \quad (3-28)$$

将电感矩阵式 (2-58)、式 (2-61) 及式 (2-63) 和电流式 (3-1) 代入式 (3-28) 并进行

化简，可得4个单元电动机运行时的磁阻转矩波动表达式，即

$$\Delta T_e = -\frac{1}{2} p I_m^2 (M_{s20} - M_{s21}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-29)$$

与仅一个单元电动机运行时的谐波转矩解析公式相比较，不难看出4个单元电动机一起运行时其2次谐波转矩和4次谐波转矩与一个单元电动机运行时的完全一致。为验证磁阻转矩波动解析公式的正确性，采用有限元法，计算了在450A条件下，4个单元电动机共同运行时的电磁转矩波动曲线，如图3-13所示。

在一个电周期内，主要含有2次谐波转矩、4次谐波转矩和6次谐波转矩分量。采用数值方法计算出在不同定子电流条件下各次主要谐波转矩的幅值，如图3-14所示。

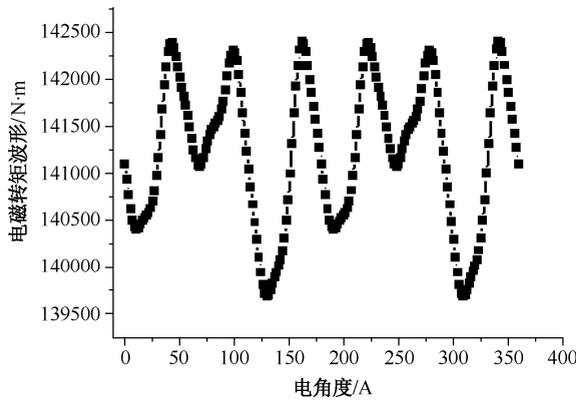


图 3-13 4个单元电动机在450A时一个电周期内转矩波动计算曲线

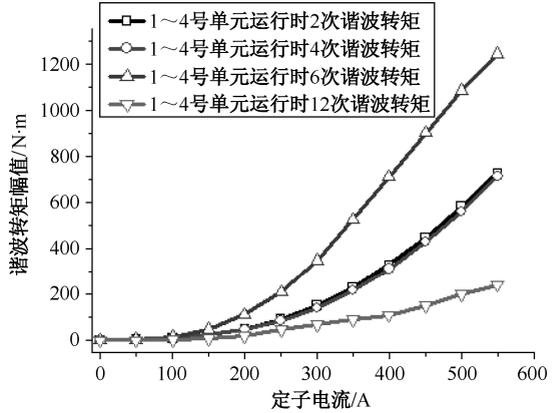


图 3-14 4个单元电动机运行时谐波转矩与定子电流关系计算结果

在4个单元电动机共同运行时，2次谐波转矩和4次谐波转矩幅值仍旧完全一致，与所推导的解析公式相吻合。同时随着定子电流的增加，2次谐波转矩和4次谐波转矩幅值增加也较快。还可以看出，4个单元电动机共同运行时饱和引起的6次谐波转矩幅值所占比例为最大，而饱和引起的12次谐波转矩幅值约为2次谐波转矩和4次谐波转矩幅值的1/3，在大电流时，其比重也不再可以被忽略。随着单元电动机数量的增加，电流越大，磁路饱和度越高，而4个单元电动机运行时的磁阻转矩谐波幅值却未增加，所以在运行单元电动机数量较多时，需优先考虑对饱和引起的转矩波动进行抑制。

### 3.3.5 5个单元电动机运行时电磁转矩波动

多单元永磁同步电动机样机一共含有5个独立的单元电动机，所以当5个单元电动机共同运行时即为整机运行工况，但仍旧可以对磁阻转矩波动进行解析推导，其表达式为

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{e1} \\ \Delta T_{e2} \\ \Delta T_{e3} \\ \Delta T_{e4} \\ \Delta T_{e5} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} p \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{12}^T & L & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & L & M_{34} & M_{35} \\ M_{14}^T & M_{24}^T & M_{34}^T & L & M_{45} \\ M_{15}^T & M_{25}^T & M_{35}^T & M_{45}^T & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

将上述矩阵方程展开，其中各项谐波转矩可得

$$\begin{aligned} \Delta T_e &= \Delta T_{e1} + \Delta T_{e2} + \Delta T_{e3} + \Delta T_{e4} \\ &= \frac{5}{2} p I^T \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} I + p I^T \frac{dM_{12}(\theta)}{d\theta} I + p I^T \frac{dM_{13}(\theta)}{d\theta} I + p I^T \frac{dM_{14}(\theta)}{d\theta} I + \\ &\quad p I^T \frac{dM_{15}(\theta)}{d\theta} I + p I^T \frac{dM_{23}(\theta)}{d\theta} I + p I^T \frac{dM_{24}(\theta)}{d\theta} I + p I^T \frac{dM_{25}(\theta)}{d\theta} I + \\ &\quad p I^T \frac{dM_{34}(\theta)}{d\theta} I + p I^T \frac{dM_{35}(\theta)}{d\theta} I + p I^T \frac{dM_{45}(\theta)}{d\theta} I \end{aligned} \quad (3-31)$$

将电感矩阵式(2-58)、式(2-61)及式(2-63)和电流式(3-1)代入式(3-31)，进行化简可得转矩波动的解析表达式，即

$$\Delta T_e = -\frac{5}{2} p I_m^2 (M_{S26} - M_{S27}) \left[ \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (3-32)$$

根据互感表达式(2-65)的分析可知，在互感2次项的关系中，有

$$M_{S26} = M_{S27} \quad (3-33)$$

因此整机运行时，各单元电动机间所产生的谐波转矩相互抵消，磁阻转矩谐波并不存在，式(3-32)的数值恒为零。整机运行时由饱和引起的6次谐波转矩、12次谐波转矩波动都已经在前面的章节进行了详细阐述，在此不再重复论述。

### 3.4 不同数量单元电动机运行时电磁转矩波动比较

以450A电流条件，对不同单元电动机组合运行时的电磁转矩波动进行了横向对比，其具体数据如表3-1所示。

表3-1 不同单元电动机在450A三相对称电流条件下转矩波动计算值 (单位: N·m)

| 运行单元编号   | 2次波动   | 4次波动   | 6次波动    | 12次波动  |
|----------|--------|--------|---------|--------|
| 1号       | 446.53 | 426.17 | 241.62  | 28.01  |
| 1号、2号    | 445.90 | 426.26 | 459.18  | 67.94  |
| 1号、3号    | 893.49 | 851.03 | 484.33  | 55.83  |
| 1~3号     | 445.76 | 426.07 | 677.96  | 107.88 |
| 1号、2号、4号 | 892.68 | 851.39 | 702.35  | 95.59  |
| 1~4号     | 445.60 | 426.01 | 897.57  | 147.83 |
| 1~5号     | 1.21   | 1.52   | 1092.81 | 201.67 |

从表3-1的计算结果中可对比看到，在三相对称电流条件下，当所有单元电动机共同运行时，并不存在磁阻转矩波动，仅存在饱和效应引起的6次转矩和12次转矩波动。当部分单元电动机运行时，因单元电动机内部互感不对称将产生2次磁阻转矩和4次磁阻转矩波动，且2次转矩与4次转矩波动幅值相同，均与电流的平方呈正比关系。着重强调的是部分单元电动机间隔运行时，其磁阻转矩波动将是相邻单元电动机运行时的两倍，而一个单元电动机运行与相邻单元电动机运行时的磁阻转矩波动相同。饱和引起的6次转矩与12次转矩波动，将随着定子电流的增加与单元电动机运行的个数增加而增加。

### 3.5 部分单元电动机运行时电磁转矩波动的测试

通过本章对不同数量及位置的单元电动机运行工况分析可以看出,因单元电动机内部三相绕组互感不对称,单元电动机间互感矩阵也不对称,所以将会产生磁阻转矩波动,并且通过解析公式推导和有限元数值计算可知谐波转矩次数为2次和4次,且两者幅值相等。在传统三相对称的旋转电动机中,并不存在磁阻转矩波动。

在实际驱动器中,在负载电感不对称前提下获取三相对称电流源有一定的困难,且整机5单元电动机运行时可以使用三相对称电压源驱动电动机运行,所以在实际试验中采用的是三相对称电压源。

因为不同位置的单元电动机运行时,在相同电流条件下,仅表现为谐波转矩幅值相差两倍,其相位完全一致。而相邻单元电动机运行时谐波转矩与一个单元电动机运行时完全相同,所以直接测试一个单元电动机运行时的电磁转矩波动即可。同时考虑到,多单元电动机的样机的转子惯量较大,受试验条件的限制,无法外加更大惯量来平衡转子惯量并维持转速近似不变,因此可通过采用测试转速波动的方法来观测一个单元电动机运行时的转矩波动。

当一个单元电动机外接三相对称电压源时,因绕组互感不相等,相当于三相支路的阻抗不对称,因此会造成三相电流不平衡。此时,三相电压方程可写为

$$\begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} L_A & M_{AB} & M_{AC} \\ M_{AB} & L_B & M_{BC} \\ M_{AC} & M_{BC} & L_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{bmatrix} + R_a \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta u \\ \Delta u \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

式中,  $\Delta u$  为绕组星接中点与电压源中点间的电压。

由此可见,当一个单元电动机由三相对称电压源供电时,必将产生三相不平衡电流,而不平衡的电流将会与转子基波磁密相作用,产生谐波转矩,而该类谐波转矩在三相对称电流源中并不存在。在部分单元电动机运行时,也同样会产生三相不平衡电流。绕组三相不对称电流必然包含一定分量的负序电流。负序基波电频率的三相电流与正序转子磁场相作用,将产生2次谐波转矩波动,而正序三相电流也将产生2次磁阻转矩波动,当两者相位相反时将会相互抵消。

1号单元电动机和3号单元电动机共同运行时的电流试验波形如图3-15所示。

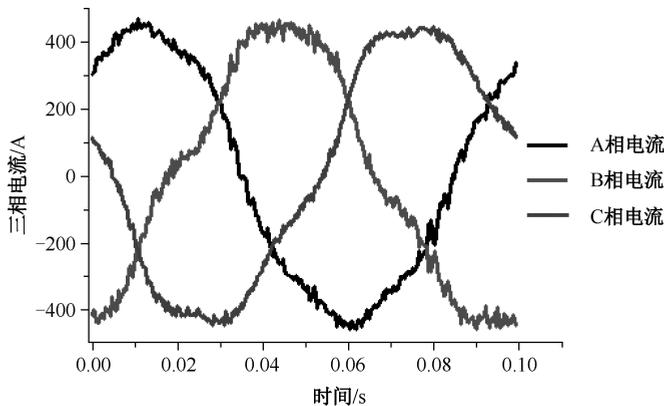


图3-15 三相绕组电流的试验波形

对上述三相绕组测试电流进行对称分量法分解,可得到此时的三相正序基波电流有效值为 315.7A,其中 A 相电流初始角度为  $51.2^\circ$ ,三相负序基波电流为 2.6A,初始相位角为  $202.8^\circ$ ,正负序电流初始角度相差  $151.6^\circ$ 。负序基波电流所形成的电磁转矩波动与正序电流形成的转矩波动,恰巧幅值近似、相位相反,因此部分单元电动机在三相对称电压条件下运行时并不含有 2 次谐波转矩。

在速度闭环和电流闭环条件下,采用三相对称电压源供电,测试了仅一个单元电动机运行时的转速波动曲线,如图 3-16 所示。

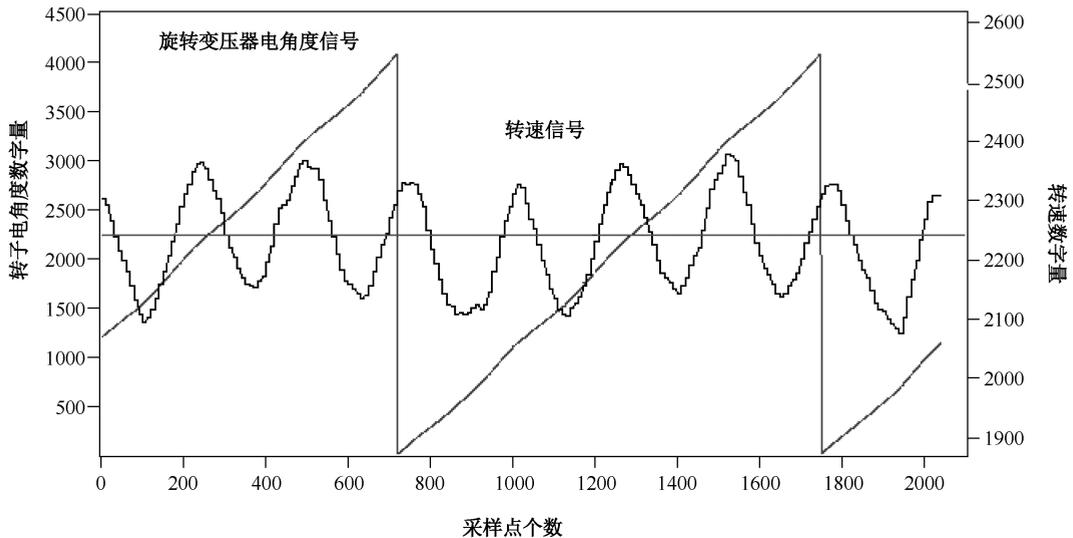


图 3-16 一个单元电动机运行时速度波动试验曲线

从图 3-16 可以看出,在旋转变压器信号所标示的一个电周期范围内,电动机速度波动含有较大分量的 4 次波动,由前文分析可知,该样机在对称电压条件转矩 2 次波动成分降低较大,所以速度信号中并未观察到 2 次速度波动。

在此,仅对 4 次速度波动进行核算。从图 3-15 可以看出试验电流频率为 10Hz,已知多单元电动机样机的极对数  $p=30$ ,所以,电动机此时机械转速为 20r/min。从图 3-16 中可以看出,平均转速数字量为 2240,经傅里叶变换计算可知,4 次转速波动幅值的数值量为 100,转速波动百分比为 4.5%,即样机此时的机械转速波动为 0.9r/min。转速波动与转矩波动存在如下关系:

$$\Delta\omega_r = \frac{1}{J} \int \Delta T_m \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{3}\right) d\theta \quad (3-35)$$

式中,  $\Delta\omega_r$  为速度波动;  $J$  为转子转动惯量;  $\Delta T_m$  为 4 次转矩波动幅值。

因转速波动次数与转矩波动次数相同,所以仅需对其幅值进行校核即可,所以式(3-35)可以写为

$$\Delta\omega_{rm} = \frac{\Delta T_m}{4J} \quad (3-36)$$

式中,  $\Delta\omega_{rm}$  为速度波动幅值。

经计算可知,转子转动惯量为  $892\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。此时的绕组电流为 315.7A,根据图 3-18 中的 1 号单元电动机、3 号单元电动机共同运行时的电流与转矩波动曲线可知,该电流产生的 4 次转

矩波动幅值为  $327.4\text{N}\cdot\text{m}$ 。由式(3-36)计算可以得到4次转矩波动所产生的速度波动为  $0.0918\text{rad/s}$ , 即  $0.877\text{r/min}$ , 与试验结果  $0.9\text{r/min}$  接近。由此可以验证, 4次转速波动正是由4次电磁转矩波动而引起的, 试验结果证明了电磁转矩波动解析公式和有限元计算曲线规律的正确性。

### 3.6 磁极嵌入深度对电磁转矩波动影响

因互感2次项不对称, 即使在三相对称电流条件下, 部分单元电动机运行时也会产生2次磁阻转矩和4次磁阻转矩波动。从转矩波动的公式中可以看出, 当多单元永磁同步电动机的互感2次分量之差较大时, 磁阻转矩波动将有所增加。5单元永磁同步样机采用的是表面嵌入式磁极结构, 改变永磁体的嵌入深度可以更改互感2次项的幅值。为了对比不同磁极的嵌入深度对电磁转矩波动的影响, 在保证磁钢厚度不变情况下, 本文计算了3mm与6mm两种嵌入深度下的多单元电动机有限元模型。

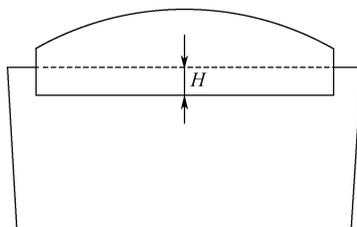


图 3-17 磁极嵌入深度示意图

空载条件下, 对比计算了不同磁极嵌入深度时一个单元电动机三相互感的波形, 其计算结果如图3-18所示。

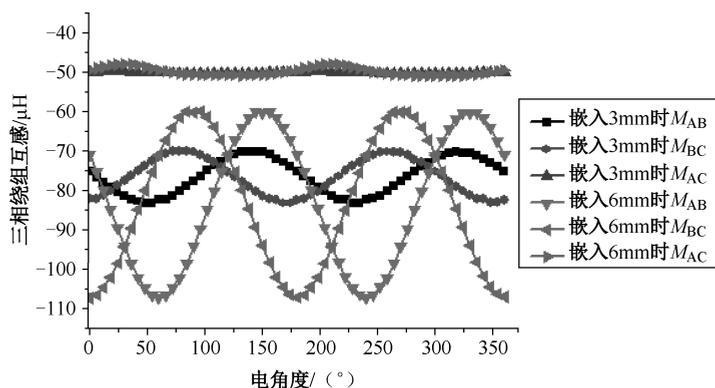


图 3-18 不同磁极嵌入深度时的互感曲线

可以看出, 随着磁钢嵌入深度的增加, 互感的恒定分量及2次波动分量幅值均增加较多。对比计算了在三相对称电流源条件下, 定子电流为  $450\text{A}$  时, 不同嵌入深度时的电磁转矩波形, 如图3-19所示。

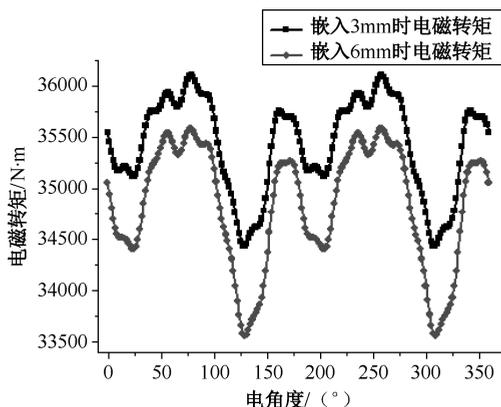


图 3-19 不同磁极嵌入深度 450A 电流时的电磁转矩

在 450A 电流条件下,当磁极嵌入深度增加时,因磁极厚度未改变而造成基波气隙磁密下降,电磁转矩的恒定分量之间存在一定的差异。经过比较不难发现,嵌入 3mm 时的电磁转矩恒定分量相对较高,这是因为嵌入深度加大后,恒定电磁转矩与定子电流幅值的关系曲线的线性度将有所下降,所以在 450A 电流条件下,6mm 嵌入深度的多单元恒定电磁转矩分量相对较低。

在图 3-19 基础之上,对不同磁极嵌入深度的电磁转矩波形进行傅里叶变换,可以得到各次谐波转矩幅值,其数值如图 3-20 所示。

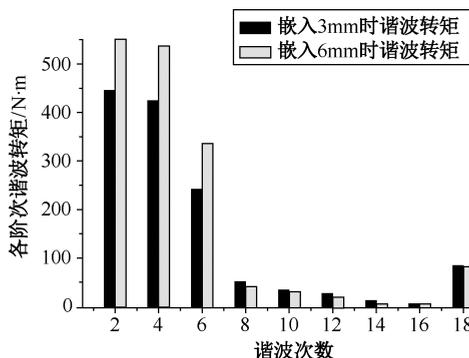


图 3-20 不同磁极嵌入深度时的谐波转矩

经过对比可看出,磁极嵌入深度为 6mm 时谐波转矩相对较大,这主要是因为随着磁极嵌入深度的增加,电动机的凸极性增强,互感 2 次分量的不对称度有所增加,所以在部分单元电动机运行时,2 次谐波转矩和 4 次谐波转矩将有所增加。除此之外,随着磁极嵌入深度增加,磁路饱和情况也有所加剧,6 次谐波转矩也有所增加。