

第 7 章 窄带随机过程

在通信、雷达、广播电视等信息传输系统中遇到的许多重要的确定信号以及电子系统(如中频放大器)都满足窄带假设条件:中心频率 ω_0 远大于谱(带)宽 $\Delta\omega$,即 $\omega_0 \gg \Delta\omega$ 。它们被分别称为窄带信号和窄带系统。窄带信号的频谱或窄带系统的频率响应被限制在中心频率 ω_0 附近一个比较窄的范围内,而中心频率 ω_0 又离开零频足够远。窄带信号的实例很多,例如微波脉冲雷达的工作频率约在 1000MHz 以上,而它的带宽一般都在几兆赫兹以下。又如语音信号本身仅有近 3.4kHz 的带宽,即使采用 PCM 数字编码也只有 64kbps 的码速率,若再压缩编码,则仅有 2.4kbps 或 1.2kbps 甚至更低的码速率,但为了通过无线电波或光缆设备进行传输,通常必须把它调制在兆赫兹以上量级的载波上进行传输,如 GSM 移动通信系统、光纤电视等。工作在上述系统发射机和接收机中的高频或中频放大器,为了与窄带信号相匹配,通常都是具有上述特点的窄带系统。

类似地,如果一个随机过程的功率谱密度只分布在高频载波 ω_0 附近一个窄的频率范围 $\Delta\omega$ 内,在此范围之外全为零,且满足 $\omega_0 \gg \Delta\omega$ 时,则称之为窄带过程。窄带过程是在信息传输系统,特别是接收机中经常遇到的随机信号。当窄带系统(接收机)的输入噪声(如热噪声)的功率谱分布在足够宽的频带(相对于接收机带宽)上时,系统的输出即为窄带过程。

本章将通过建立窄带过程的物理模型和数学模型以及分析窄带信号和系统的重要工具——希尔伯特变换,来分析窄带随机过程的统计特性及其重要性质。最后讨论窄带随机过程经包络检波器和平方律检波器后其统计特性的变化。

7.1 窄带随机过程的一般概念

此节主要介绍窄带随机过程的物理模型和数学模型。前面已指出,若随机过程的功率谱是限带的,而且满足 $\omega_0 \gg \Delta\omega$,就称为窄带过程。这里 ω_0 可能选在频带中心附近或最大的功率谱密度点对应的频率附近。一个典型的窄带随机过程的功率谱密度如图 7.1 所示。如果从存储示波器或由数据采集卡在计算机上来观看这个过程的某个样本函数,可看到图 7.2 所示的波形,这个波形启示我们,可以把这个随机过程表示成具有角频率 ω_0 以及慢变幅度与相位的正弦振荡,这就是说可以把它写成

$$Z(t) = B(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \quad (7.1.1)$$

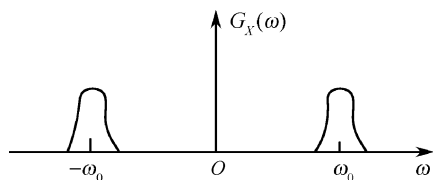


图 7.1 窄带过程的功率谱密度

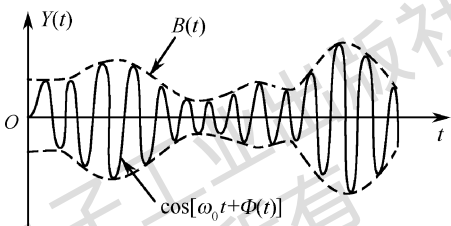


图 7.2 窄带过程的某个样本函数

式中, $B(t)$ 是随机过程的慢变幅度, $\Phi(t)$ 是慢变相位。式(7.1.1)称为准正弦振荡, 也即是窄带过程的数学模型。

下面建立一个宽带平稳随机过程通过被简化的窄带中放系统这样一个简单的物理模型, 来分析发生的物理现象, 进一步说明窄带过程可以表示为准正弦振荡这一数学模型的道理。

假设系统输入的是一个功率谱宽远大于系统带宽的宽带噪声, 从而可以近似看做白噪声。而这种白噪声又可以看成许多时间上随机出现的、其幅度做随机变化的窄脉冲的集合, 如图 7.3 所示。当这样的随机信号作用在如图 7.4 所示的一个简化的窄带中放系统上时, 单个脉冲瞬时地给系统储进一定的能量, 于是在系统中引起自由振荡

$$U_0(t) = Ue^{-\beta t} \sin\omega_0 t \quad (7.1.2)$$

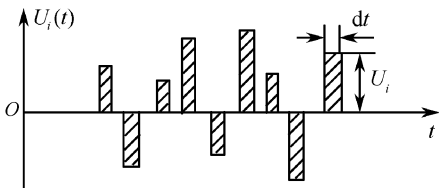


图 7.3 理想白噪声示意图

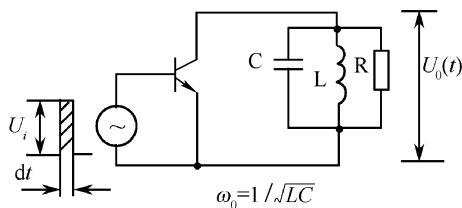


图 7.4 简化的窄带中放系统

每一次振荡的频率等于窄带系统本身的谐振频率 ω_0 , 振荡的振幅是由作用脉冲的面积决定的。由于其面积一般情况下是随机的, 因此振荡的起始振幅也将是随机的。此外, 系统是有损耗的, 因此在这种系统中的自由振荡将是衰减的。这样, 窄带系统输出端的总振荡可看成许多不同时刻出现的衰减正弦振荡之和, 这些正弦振荡的振幅是随机的, 并且振荡频率都等于窄带系统的中心频率 ω_0 。将所有振荡叠加, 得

$$Z(t) = B(t) \cos[\Psi(t)] \quad (7.1.3)$$

由于得出的合成振荡波形是由许多具有随机振幅的单元正弦衰减振荡叠加而成的, 因此这个合成振荡的振幅将是一个随机的时间函数。于是我们可以把窄带系统输出端的随机过程, 看成随机调幅的正弦振荡。

在窄带系统的输出端, 构成合成振荡的各个单元振荡, 都基本上集中在窄带系统的谐振频率附近, 因此包线 $B(t)$ 可以看成随机慢变化的时间函数(“慢”是相对于随机过程的高频振荡 ω_0 而言的), 参见图 7.2。

合成振荡的相位是由各随机单元振荡的振幅和相位决定的, 在两个正弦振荡相加时, 合成振荡的相位经常接近于振幅较大的振荡的相位, 如图 7.5 所示。由于各单元振荡的振幅是随机的, 因此在总振荡中将有相位调制, 相位调制是服从某一随机规律的, 可表示为

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \Phi(t) \quad (7.1.4)$$

式中, $\Phi(t)$ 也是一个随机慢变化的时间函数。

将式(7.1.4)代入式(7.1.3), 可得窄带系统输出随机过程的数学模型为

$$Z(t) = B(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \quad (7.1.5)$$

由于 $Z(t) = B(t) \cos\omega_0 t \cos\Phi(t) - B(t) \sin\omega_0 t \sin\Phi(t)$ (7.1.6)

令 $X(t) = B(t) \cos\Phi(t) - Y(t) = B(t) \sin\Phi(t)$

这样就得出了窄带随机过程数学模型的又一表示式

$$Z(t) = X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t \quad (7.1.7)$$

$$B(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)} \quad (7.1.8)$$

$$\tan \Phi(t) = \frac{Y(t)}{X(t)} \quad (7.1.9)$$

式(7.1.5)和式(7.1.7)分别是用极坐标和笛卡儿坐标表示的窄带过程的数学模型。

图 7.6 给出了窄带随机过程表示为准正弦振荡的几何概念,其包络可表示为曲线长度做随机慢变化的矢量 $\mathbf{B}(t)$ 。随机函数 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 相应于这个矢量的水平分量和垂直分量。相位 $\Phi(t)$ 也是随机变化的时间函数。

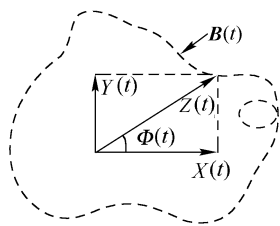
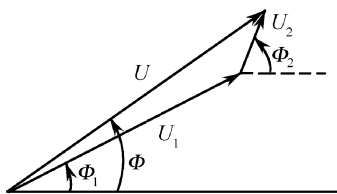


图 7.5 窄带系统输出的随机过程相位的确定 图 7.6 窄带过程表示为准正弦振荡的几何概念

窄带系统的通频带越窄(相对于输入随机过程的频带的宽度),则输出端的随机过程越像振幅和相位按随机规律慢变化的简谐振荡。可以证明,当窄带系统通频带足够窄的情况下,系统输出的随机过程功率谱宽也将同样窄,这样可以使曲线 $B(t)$ 离开等幅正弦波的差异为任意小(在一定的时间内)。

顺便指出,就式(7.1.1)本身而言,并不受窄带过程的条件限制,但是只有在窄带情况下, $B(t)$ 和 $\Phi(t)$ 才是比 $\cos \omega_0 t$ 变化慢的时间函数,包络概念也才有实际意义。

7.2 希尔伯特变换

在通信、信号与系统及信号处理理论的研究中,希尔伯特变换是一个重要工具,在其他科学技术领域希尔伯特变换也有重要应用。用希尔伯特变换可以把一个实信号表示成其频谱仅在正频率域有值的复信号(解析信号),这不仅使理论分析很方便,而且对研究实信号的瞬时包络、瞬时相位和瞬时频率有重要意义。

7.2.1 希尔伯特变换和解析信号的定义

1. 希尔伯特变换的定义

对实信号 $x(t)$,它的希尔伯特变换记为 $H[x(t)]$ 或 $\hat{x}(t)$,其定义为

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (7.2.1)$$

反变换为

$$x(t) = H^{-1}[\hat{x}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (7.2.2)$$

经积分变量替换后有

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t - \tau)}{\tau} d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t + \tau)}{\tau} d\tau \quad (7.2.3)$$

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(t-\tau)}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(t+\tau)}{\tau} d\tau \quad (7.2.4)$$

由定义可知, $x(t)$ 的希尔伯特变换为 $x(t)$ 与 $1/\pi t$ 的卷积。因此, 可以把希尔伯特变换看做信号通过一个冲激响应为 $1/\pi t$ 的线性时不变系统的输出。而这个系统冲激响应的傅里叶变换即传输函数为

$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega) = H(\omega) \quad (7.2.5)$$

$H(\omega)$ 示意图见图 7.7(a)。式(7.2.5)中 $\operatorname{sgn}(\omega)$ 为符号函数, 定义为

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases}$$

这个系统的幅频特性和相频特性如图 7.7(b) 和(c) 所示。由此看出, 希尔伯特变换器本质上是一个理想的 90° 移相器。

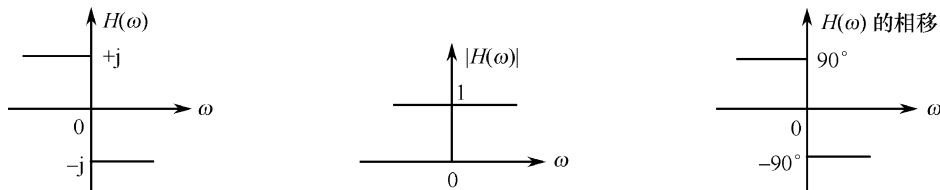


图 7.7 希尔伯特变换器的传输函数

2. 解析信号

由实信号 $x(t)$ 作为实部, $x(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{x}(t)$ 作为虚部, 构成的复信号 $j(t)$ 称为 $x(t)$ 的解析信号, 即

$$j(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (7.2.6)$$

令实信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(\omega)$, 由于 $\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 与 $1/\pi t$ 的卷积, 根据卷积定理, 由式(7.2.5)可得 $\hat{x}(t)$ 的频谱为

$$\hat{X}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega) \quad (7.2.7)$$

再由式(7.2.6)可得解析信号 $j(t)$ 的频谱为

$$J(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (7.2.8)$$

由此, 可以看出解析信号 $j(t)$ 的实部包含了实信号 $x(t)$ 的全部信息, 虚部则与实部有着确定的关系。解析信号仅有单边谱, 即仅在正频域有值, 且为实信号 $x(t)$ 频谱正频率分量的两倍。

7.2.2 希尔伯特变换的性质

性质 1 $\hat{x}(t)$ 的希尔伯特变换为 $-x(t)$ 。

证明: 由式(7.2.1)和式(7.2.2)

$$H[\hat{x}(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau = -x(t)$$

可知连续两次希尔伯特变换相当于连续两次 90° 相移,正好 180° 反相。

性质 2 若 $y(t) = h(t) * x(t)$, 则 $y(t)$ 的希尔伯特变换为

$$\hat{y}(t) = h(t) * \hat{x}(t) = \hat{h}(t) * x(t) \quad (7.2.9)$$

证明:卷积运算满足结合律和交换律,有

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= h(t) * x(t) * \frac{1}{\pi t} = h(t) * \left[x(t) * \frac{1}{\pi t} \right] \\ &= h(t) * \hat{x}(t) = \left[h(t) * \frac{1}{\pi t} \right] * x(t) \\ &= \hat{h}(t) * x(t) \end{aligned}$$

性质 3 $\hat{x}(t)$ 与 $x(t)$ 的能量及平均功率相等,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}^2(t) dt \quad (7.2.10)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{x}^2(t) dt \quad (7.2.11)$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{j\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(t) \hat{X}^*(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) H(\omega) H^*(\omega) X^*(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \end{aligned}$$

式(7.2.10)得证,同理可证式(7.2.11)。

实际上,希尔伯特变换器为一个全通滤波器,信号通过它只改变了信号的相位,不会改变信号的能量和功率。

性质 4 平稳随机过程 $X(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$ 的统计自相关函数 $R_{\hat{X}}(\tau)$ 和时间自相关函数 $\bar{R}_{\hat{X}}(\tau)$ 分别等于 $X(t)$ 自相关函数 $R_X(\tau)$ 和时间自相关函数 $\bar{R}_X(\tau)$, 即

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) \quad (7.2.12)$$

$$\bar{R}_{\hat{X}}(\tau) = \bar{R}_X(\tau) \quad (7.2.13)$$

关于时间自相关函数的定义见式(3.1.13)。

证明:平稳随机过程 $X(t)$ 进行希尔伯特变换,可以理解为它的每一个样本函数通过一个冲激响应为 $1/\pi t$ 的线性时不变系统的输出,因而输出仍然是平稳随机过程,则有

$$\begin{aligned} R_{\hat{X}}(\tau) &= E[\hat{X}(t) \hat{X}(t + \tau)] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(t - \alpha)}{\pi \alpha} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(t + \tau - \beta)}{\pi \beta} d\beta \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi \alpha} \frac{1}{\pi \beta} E[X(t - \alpha) X(t + \tau - \beta)] d\alpha d\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_X(\tau + \alpha - \beta)}{\pi\beta} d\beta d\alpha \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{R}_X(\tau + \alpha)}{\pi\alpha} d\alpha = R_X(\tau)
 \end{aligned}$$

推论:

① 式(7.2.12)中令 $\tau = 0$,可得 $R_X^{\hat{}}(0) = R_X(0)$,即 $X(t)$ 经希尔伯特变换后,平均功率不变。

② $G_X^{\hat{}}(\omega) = G_X(\omega)$,即 $X(t)$ 经希尔伯特变换后,功率谱密度不变。将式(7.2.12)两端经傅里叶变换后即得证。

性质5 平稳随机过程 $X(t)$ 与其希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$ 的统计互相关函数 $R_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau)$ 和时间互相关函数 $\bar{R}_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau)$,分别等于 $X(t)$ 的统计自相关函数的希尔伯特变换和时间自相关函数的希尔伯特变换,即

$$R_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau) = \hat{R}_X(\tau) \quad (7.2.14)$$

$$\bar{R}_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau) = \hat{\bar{R}}_X(\tau) \quad (7.2.15)$$

证明: $\hat{X}(t)$ 可以看做 $X(t)$ 通过一个线性时不变网络的输出过程,所以它与 $X(t)$ 必是平稳相依的,有

$$\begin{aligned}
 R_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau) &= E[X(t)\hat{X}(t+\tau)] = E\left[X(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(t+\tau-\alpha)}{\pi\alpha} d\alpha\right] \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E[X(t)X(t+\tau-\alpha)]}{\pi\alpha} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_X(t-\alpha)}{\pi\alpha} d\alpha = \hat{R}_X(\tau)
 \end{aligned}$$

$$\text{同理可证} \quad R_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau) = R_{X\hat{X}}^{\hat{}}(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau) = -R_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau) \quad (7.2.16)$$

$$\text{且有} \quad R_{X\hat{X}}^{\hat{}}(0) = R_{X\hat{X}}^{\hat{}}(0) = 0 \quad (7.2.17)$$

$$\text{亦同理可证} \quad \bar{R}_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau) = \hat{\bar{R}}_X(\tau) \quad (7.2.18)$$

$$\bar{R}_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau) = \bar{R}_{X\hat{X}}^{\hat{}}(-\tau) = -\hat{\bar{R}}_X(\tau) = -\bar{R}_{X\hat{X}}^{\hat{}}(\tau) \quad (7.2.19)$$

$$\text{且} \quad \bar{R}_{X\hat{X}}^{\hat{}}(0) = \bar{R}_{X\hat{X}}^{\hat{}}(0) = 0 \quad (7.2.20)$$

通过上述结果可以看出平稳随机过程 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 在同一时刻是正交的,且它们的统计互相关函数和时间互相关函数都是奇函数。这与任意两个平稳随机过程的互相关函数是不同的。

性质6 设具有有限带宽 $\Delta\omega$ 的信号 $a(t)$ 的傅里叶变换为 $A(\omega)$,假定 $\omega_0 > \Delta\omega/2$,则有

$$H[a(t)\cos\omega_0 t] = a(t)\sin\omega_0 t \quad (7.2.21)$$

$$H[a(t)\sin\omega_0 t] = -a(t)\cos\omega_0 t \quad (7.2.22)$$

证明:先求 $a(t)\cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换,由欧拉公式知

$$x(t) = a(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}a(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}a(t)e^{-j\omega_0 t}$$

$$\text{于是} \quad X(\omega) = \frac{1}{2}A(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}A(\omega + \omega_0)$$

$A(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 的关系如图7.8所示。

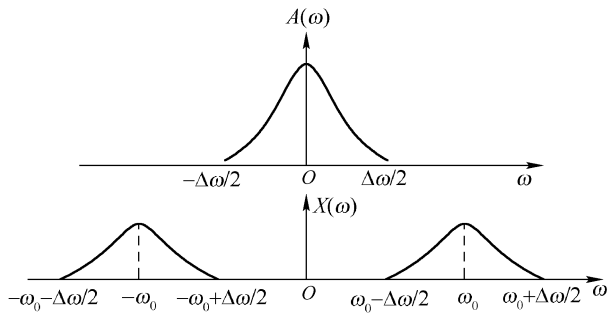


图 7.8 $x(t) = a(t) \cos \omega_0 t$ 的傅里叶变换图解

由图 7.8 可见

$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}A(\omega - \omega_0), & \omega \geq 0 \\ \frac{1}{2}A(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases}$$

再由式(7.2.7)得 $\hat{X}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega)$

$$= \begin{cases} -\frac{j}{2}A(\omega - \omega_0), & \omega \geq 0 \\ \frac{j}{2}A(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \quad (7.2.21)$$

式(7.2.21)的傅里叶反变换为

$$\hat{x}(t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \frac{-j}{2} A(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\omega_0 - \Delta\omega/2}^{-\omega_0 + \Delta\omega/2} \frac{j}{2} A(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

令 $\alpha = \omega - \omega_0, \beta = \omega + \omega_0$, 则有

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= -\frac{j}{2} e^{j\omega_0 t} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} A(\alpha) e^{j\alpha t} d\alpha + \frac{j}{2} e^{-j\omega_0 t} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} A(\beta) e^{j\beta t} d\beta \\ &= -\frac{j}{2} e^{j\omega_0 t} a(t) + \frac{j}{2} e^{-j\omega_0 t} a(t) = a(t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

式(7.2.21)得证。同理可证式(7.2.22)。

7.3 窄带随机过程的性质及其证明

7.3.1 窄带随机过程的性质

这里利用窄带随机过程的表示式(7.1.7)

$$Z(t) = X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t$$

来讨论窄带过程的性质。令 $Z(t)$ 是任意的窄带、宽平稳、实随机过程,它具有零均值且功率谱密度满足

$$\begin{cases} G_Z(\omega) \neq 0, & \omega_0 - \Omega < |\omega| < \omega_0 + \Omega + \Delta\omega \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中, Ω 和 $\Delta\omega$ 皆为正实常数, $\omega_0 \gg \Delta\omega$ (见图 7.9)。

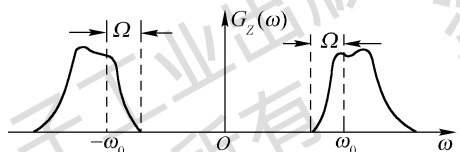


图 7.9 一般窄带过程的功率谱密度

此时式(7.1.7)中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 具有以下性质:

性质 1 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 各自单独宽平稳且联合宽平稳。 (7.3.1)

性质 2 $E[X(t)] = 0, E[Y(t)] = 0$ (7.3.2)

性质 3 $E[X^2(t)] = E[Y^2(t)] = E[Z^2(t)]$ (7.3.3)

性质 4 $R_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_Z(\omega) \cos[(\omega - \omega_0)\tau] d\omega$ (7.3.4)

性质 5 $R_Y(\tau) = R_X(\tau)$ (7.3.5)

性质 6 $R_{XY}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_Z(\omega) \sin[(\omega - \omega_0)\tau] d\omega$ (7.3.6)

性质 7 $R_{YX}(\tau) = -R_{XY}(\tau), R_{XY}(\tau) = -R_{YX}(-\tau)$ (7.3.7)

性质 8 $R_{XY}(0) = E[X(t)Y(t)] = 0, R_{YX}(0) = 0$ (7.3.8)

性质 9 $G_X(\omega) = L_p[G_Z(\omega - \omega_0) + G_Z(\omega + \omega_0)]$ (7.3.9)

性质 10 $G_Y(\omega) = G_X(\omega)$ (7.3.10)

性质 11 $G_{XY}(\omega) = jL_p[G_Z(\omega - \omega_0) - G_Z(\omega + \omega_0)]$ (7.3.11)

性质 12 $G_{YX}(\omega) = -G_{XY}(\omega)$ (7.3.12)

在上述 12 条性质中, $G_Z(\omega)$ 可以具有任意形状, 可以围绕 ω_0 不对称。 $R_X(\tau), R_Y(\tau), R_{YX}(\tau), R_{XY}(\tau)$ 分别是 $X(t), Y(t)$ 的自相关与互相关函数; $G_X(\omega), G_Y(\omega), G_{XY}(\omega), G_{YX}(\omega)$ 是相应的功率谱密度。性质 9 和性质 10 中的 $L_p(\cdot)$ 表示取括号中量值的低通部分。

由上可见, 对于零均值的平稳窄带过程 $Z(t)$, 表示包络的两个直角分量 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 也是零均值平稳随机过程, 而且两个分量与 $Z(t)$ 具有相同的功率。 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 有相同的自相关函数, 并因此有相同的功率谱密度。式(7.3.8)则说明, 对于随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 在任何相同时刻相应的两个随机变量相互正交。

在实际应用中, 若窄带过程的功率谱对称于中心频率 ω_0 , 或者说窄带过程的功率谱密度是以 ω_0 为中心的偶函数, 则可以证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不仅在同一时刻正交, 而且它们彼此为正交过程, 即 $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(\tau) = 0$, 因而相应的互谱密度也为零。

下面采用希尔伯特变换, 对一般情况下这种满足零均值、平稳条件的窄带随机过程的部分主要性质给出证明。

7.3.2 窄带随机过程性质的证明

假设 $Z(t)$ 为零均值平稳窄带随机过程, 重写它的表示式(7.1.7)如下

$$Z(t) = X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t \quad (7.3.13)$$

等式两端进行希尔伯特变换, 利用希尔伯特变换的性质 6, 有

$$\hat{Z}(t) = X(t) \sin \omega_0 t + Y(t) \cos \omega_0 t \quad (7.3.14)$$

由式(7.3.13)和式(7.3.14)联立求解 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 得

$$X(t) = Z(t) \cos \omega_0 t + \hat{Z}(t) \sin \omega_0 t \quad (7.3.15)$$

$$Y(t) = \hat{Z}(t) \cos \omega_0 t - Z(t) \sin \omega_0 t \quad (7.3.16)$$

• 性质 1 证明:

可由下面即将证明的性质 2,5,7 的推证直接得到。

• 性质 2 证明:

因为 $Z(t)$ 是零均值随机过程,则由式(7.3.15)和式(7.3.16)知

$$E[X(t)] = 0$$

$$E[Y(t)] = 0$$

即 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均是零均值随机过程。

• 性质 5 证明:

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

将式(7.3.15)代入,得

$$R_X(\tau) = E[Z(t)Z(t+\tau)]\cos\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau) + E[\hat{Z}(t)Z(t+\tau)]\sin\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau) + E[Z(t)\hat{Z}(t+\tau)]\cos\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau) + E[\hat{Z}(t)\hat{Z}(t+\tau)]\sin\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau)$$

将对应的相关函数代入

$$R_X(\tau) = R_Z(\tau)\cos\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau) + R_{\hat{Z}Z}(\tau)\sin\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau) + R_{Z\hat{Z}}(\tau)\cos\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau) + R_{\hat{Z}\hat{Z}}(\tau)\sin\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau)$$

应用式(7.2.12)、式(7.2.14)、式(7.2.16)得

$$R_X(\tau) = R_Z(\tau)\cos\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau) + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau) - \hat{R}_Z(\tau)\cos\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau) + R_Z(\tau)\sin\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau) = R_Z(\tau)\{\cos\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau) + \sin\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau)\} - \hat{R}_Z(\tau)\{\cos\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau) - \sin\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau)\}$$

整理,得

$$R_X(\tau) = R_Z(\tau)\cos\omega_0 \tau + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0 \tau \tag{7.3.17}$$

同理可以证明

$$R_Y(\tau) = R_Z(\tau)\cos\omega_0 \tau + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0 \tau \tag{7.3.18}$$

因此

$$R_X(\tau) = R_Y(\tau) \tag{7.3.19}$$

性质 5 得证。

在式(7.3.17)和式(7.3.18)中,令 $\tau = 0$,则有

$$R_X(0) = R_Z(0), R_Y(0) = R_Z(0)$$

性质 3 得证。由此说明,窄带随机过程 $Z(t)$ 与它的两个直角分量具有相同的功率。

• 性质 7 证明:

由定义知

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$$

将式(7.3.15)和式(7.3.16)代入

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = E[Z(t)\hat{Z}(t+\tau)]\cos\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau) + E[\hat{Z}(t)\hat{Z}(t+\tau)]\sin\omega_0 t \cos\omega_0(t+\tau) -$$

$$E[Z(t)Z(t+\tau)]\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau) -$$

$$E[\hat{Z}(t)Z(t+\tau)]\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)$$

将对应的相关函数代入

$$R_{XY}(\tau) = R_{Z\hat{Z}}(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + R_{\hat{Z}Z}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) -$$

$$R_Z(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau) - R_{\hat{Z}Z}(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)$$

再利用希尔伯特变换性质 4,5 得

$$R_{XY}(\tau) = R_Z(\tau)\{\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) - \cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)\} -$$

$$\hat{R}_Z(\tau)\{\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + \sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)\}$$

$$\text{整理有} \quad R_{XY}(\tau) = R_Z(\tau)\sin\omega_0\tau - \hat{R}_Z(\tau)\cos\omega_0\tau \quad (7.3.20)$$

$$\text{同理可以证明} \quad R_{YX}(\tau) = -R_Z(\tau)\sin\omega_0\tau + \hat{R}_Z(\tau)\cos\omega_0\tau \quad (7.3.21)$$

将式(7.3.20)与式(7.3.21)对比,得

$$R_{XY}(\tau) = -R_{YX}(\tau) \quad (7.3.22)$$

又由于 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是实过程,由式(3.2.11)知 $R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau)$,所以

$$R_{XY}(\tau) = -R_{XY}(-\tau) \quad (7.3.23)$$

即 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数是奇函数,性质 7 得证。

若 $\tau=0$,则有 $R_{XY}(0)=0$,说明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 在同一时刻正交。窄带过程的其他性质,可利用窄带过程的条件与维纳-辛钦定理来证明。

7.4 窄带高斯随机过程的包络和相位的概率分布

由 7.1 节窄带过程的物理模型和 5.4 节的相关讨论知道,典型窄带过程的概率密度服从高斯分布,即窄带高斯过程是在通信和电子系统中最常遇到的窄带过程,下面讨论这种典型过程的统计特性。

7.4.1 窄带高斯随机过程包络和相位的一维概率分布

设 $Z(t)$ 为零均值、平稳、窄带高斯过程,其方差为 σ^2 。

$$\begin{aligned} Z(t) &= B(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \\ &= X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

从式(7.3.15)和式(7.3.16)可见, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 都可以由高斯过程的线性运算来获得,因此 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均为高斯过程,且具有零均值并与原过程 $Z(t)$ 有相同的方差 σ^2 。 $Z(t)$ 的包络 $B(t)$ 和相位 $\Phi(t)$ 与 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的关系为

$$\begin{aligned} B(t) &= \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)} \\ \tan\Phi(t) &= \frac{Y(t)}{X(t)} \end{aligned}$$

由性质 8 即式(7.3.8)可知, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 具有零均值,在任意相同时刻正交,因而是互不相关的。于是对高斯分布而言,任意时刻的两个高斯随机变量也是相互统计独立的。于是可得联

合概率密度函数为

$$p(X_t, Y_t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{X_t^2 + Y_t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.4.1)$$

式中, $X_t = X(t)$, $Y_t = Y(t)$, 利用简写符号, 将包络和相位与两个正交分量的关系写成

$$B_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2} \quad (7.4.2a)$$

$$\Phi_t = \arctan \frac{Y_t}{X_t} \quad (7.4.2b)$$

利用 1.5 节的方法, 通过二维随机变量的函数变换可以求得 B_t 和 Φ_t 的联合概率密度函数。假设随机变量 X, Y 与 Z_1, Z_2 有如下函数变换关系

$$z_1 = f_1(x, y) \quad z_2 = f_2(x, y)$$

其反函数为

$$x = g_1(z_1, z_2) \quad y = g_2(z_1, z_2)$$

若已知 X, Y 的联合概率密度函数 $p_{XY}(x, y)$, 则可由下式求得 Z_1, Z_2 的联合概率密度函数

$$p_{z_1 z_2}(z_1, z_2) = |J| p_{XY}[x = q_1(z_1, z_2), y = q_2(z_1, z_2)]$$

式中, $|J|$ 称为雅可比式, 定义为

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(z_1, z_2)}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2(z_1, z_2)}{\partial z_1} \\ \frac{\partial g_1(z_1, z_2)}{\partial z_2} & \frac{\partial g_2(z_1, z_2)}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

同理, 利用以上方法, 由式(7.4.2a) 和式(7.4.2b) 得反函数

$$X_t = B_t \cos \Phi_t, \quad Y_t = B_t \sin \Phi_t \quad (7.4.3)$$

然后求得变换的雅可比式为 $J = B_t$ 。于是得到

$$p_{B, \Phi}(B_t, \Phi_t) = \begin{cases} \frac{B_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2\sigma^2}\right), & B_t \geq 0, 0 \leq \Phi_t \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7.4.4)$$

式(7.4.4) 为联合概率密度函数。

由式(7.4.4), 利用求边缘分布的方法, 可分别求得包络 $B(t)$ 和相位 $\Phi(t)$ 的一维概率密度函数为

$$p_B(B_t) = \int_0^{2\pi} p_{B, \Phi}(B_t, \Phi_t) d\Phi_t = \frac{B_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2\sigma^2}\right), \quad B_t \geq 0 \quad (7.4.5)$$

$$p_\Phi(\Phi_t) = \int_0^\infty p_{B, \Phi}(B_t, \Phi_t) dB_t = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \Phi_t \leq 2\pi \quad (7.4.6)$$

由式(7.4.4)、式(7.4.5) 和式(7.4.6) 可得

$$p_{B, \Phi}(B_t, \Phi_t) = p_B(B_t) p_\Phi(\Phi_t) \quad (7.4.7)$$

于是可得以下结论:

① 式(7.4.5) 表明窄带高斯过程包络的一维概率分布为瑞利分布。

② 式(7.4.6) 表明窄带高斯过程相位的一维概率分布为均匀分布。

③ 式(7.4.7) 表明窄带高斯过程的包络和相位在同一时刻的状态(或取样), 是两个统计独立的随机变量。但是这并不等于证明了包络和相位是两个互相统计独立的随机过程, 事实

上两个过程并不独立,证明从略。

7.4.2 窄带高斯过程包络平方的概率分布

在电子系统中平方律检波器应用得十分广泛,而平方律检波器输出的是包络的平方。本节简要地讨论一下窄带高斯过程包络平方的概率分布问题。

由式(7.4.2a)可知任意时刻窄带高斯过程的包络为

$$B_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$$

随机变量 B_t 的概率密度函数为式(7.4.5),即

$$p_B(B_t) = \frac{B_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2\sigma^2}\right), \quad B_t \geq 0$$

包络的平方,即平方律检波器的输出可简单地表示为

$$u_t = B_t^2 \quad B_t, u_t \geq 0 \quad (7.4.8)$$

通过随机变量的函数变换,由式 $p_B(B_t)$ 求出 $p_u(u_t)$,由式(7.4.8)知雅可比式为

$$J = \frac{1}{2\sqrt{u_t}}$$

于是得到包络平方的概率密度函数为

$$p_u(u_t) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{u_t}{2\sigma^2}\right), \quad u_t \geq 0 \quad (7.4.9)$$

可见,窄带高斯过程包络平方的一维概率密度函数为指数分布。一个重要的特例是 $\sigma^2 = 1$ 的情况,此时有

$$p_u(u_t) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{u_t}{2}\right), \quad u_t \geq 0 \quad (7.4.10)$$

容易证明,这种情况其均值为 $E[u_t] = 2$,方差为 $D[u_t] = 4$ 。

7.5 余弦信号与窄带高斯过程之和的概率分布

接收机的中放输出经常会遇到随相余弦信号与窄带噪声叠加在一起(即信号加噪声)通过包络检波器或平方律检波器的问题。这里就来讨论一下,余弦信号与窄带高斯过程之和的统计特性,导出随相余弦信号与窄带高斯过程之和(通过包络检波器)的包络和相位的概率密度函数式,以及和的包络平方概率密度函数式。

7.5.1 余弦信号与窄带高斯过程之和的包络和相位的概率分布

设有随相余弦信号 $S(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$

式中, θ 是 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。

加性噪声为零均值、方差为 σ^2 的平稳窄带高斯过程,可表示为

$$\begin{aligned} Z(t) &= B_N(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \\ &= X_N(t) \cos\omega_0 t - Y_N(t) \sin\omega_0 t \end{aligned}$$

此时信号加噪声成为

$$\begin{aligned} R(t) &= S(t) + Z(t) = a\cos(\omega_0 t + \theta) + X_N(t)\cos\omega_0 t - Y_N(t)\sin\omega_0 t \\ &= [a\cos\theta + X_N(t)]\cos\omega_0 t - [a\sin\theta + Y_N(t)]\sin\omega_0 t \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

式中,振幅 a 和频率 ω_0 已知,合成信号 $R(t)$ 的包络为

$$B(t) = \{ [a\cos\theta + X_N(t)]^2 + [a\sin\theta + Y_N(t)]^2 \}^{1/2}$$

令

$$X(t) = a\cos\theta + X_N(t), \quad Y(t) = a\sin\theta + Y_N(t) \quad (7.5.2)$$

则包络和相位可分别表示为

$$B_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}, \quad \Phi_t = \arctan \frac{Y_t}{X_t} \quad (7.5.3)$$

由于 $X_N(t), Y_N(t)$ 都是零均值高斯分布的,且相互独立,因而对于给定的 θ 值, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 也必然是高斯分布的,而且相互独立,同时有

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= a\cos\theta & E[Y(t)] &= a\sin\theta \\ D[X(t)] &= D[Y(t)] = \sigma^2 \end{aligned}$$

由式(7.4.1)可得到,在任意时刻 t 以信号相位 θ 为条件,均值分别为 $a\cos\theta$ 及 $a\sin\theta$,并且方差皆为 σ^2 的随机变量 X_t 和 Y_t 的联合概率密度函数为

$$p(X_t, Y_t | \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(X_t - a\cos\theta)^2 + (Y_t - a\sin\theta)^2] \right\} \quad (7.5.4)$$

由该式出发,利用式(7.5.3)所给出的 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 与包络 $B(t)$ 和相位 $\Phi(t)$ 在同一时刻的关系式

$$\begin{aligned} B_t &= \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}, & B_t &\geq 0 \\ \Phi_t &= \arctan \frac{Y_t}{X_t} \end{aligned}$$

同上,通过二维随机变量的函数变换,求得新随机变量 B_t 和 Φ_t 的联合概率密度函数为

$$p_{B,\Phi}(B_t, \Phi_t | \theta) = \frac{B_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [B_t^2 + a^2 - 2aB_t\cos(\theta - \Phi_t)] \right\}, \quad B_t \geq 0 \quad (7.5.5)$$

变换过程中的雅可比式为 B_t 。由该式可求得包络的条件分布为

$$\begin{aligned} p_B(B_t | \theta) &= \int_0^{2\pi} p_{B,\Phi}(B_t, \Phi_t | \theta) d\Phi_t \\ &= \frac{B_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [B_t^2 + a^2] \right\} \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{aB_t}{\sigma^2} \cos(\theta - \Phi_t) \right] d\Phi_t \\ &= \frac{B_t}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (B_t^2 + a^2) \right] I_0\left(\frac{aB_t}{\sigma^2}\right), \quad B_t \geq 0 \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

式中等式右边与 θ 无关,所以式(7.5.6)可直接写成无条件概率密度函数

$$p_B(B_t) = \frac{B_t}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (B_t^2 + a^2) \right] I_0\left(\frac{aB_t}{\sigma^2}\right), \quad B_t \geq 0 \quad (7.5.7)$$

式(7.5.7)常称做莱斯(Rician)密度函数或广义瑞利函数,见图7.10。

$$I_0\left(\frac{aB_t}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{aB_t}{\sigma^2} \cos(\theta - \Phi_t) \right] d\Phi_t \quad (7.5.8)$$

是零阶修正贝塞尔函数。 $I_0(\cdot)$ 还可以表示成无穷级数的形式

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \quad (7.5.9)$$

(1) 当 $x \ll 1$ 时(式中 $x = B_i/\sigma$)

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \dots \approx e^{x^2/4} \quad (7.5.10)$$

于是,当信噪比很小,即 $r = a/\sigma \rightarrow 0$ 时,由式(7.5.7)可见,该分布趋于瑞利分布。

(2) 当 $x \gg 1$ 时
$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (7.5.11)$$

将式(7.5.11)代入式(7.5.7),可得大信噪比情况下,包络 B_i 的概率密度函数为

$$p_B(B_i) = \sqrt{\frac{B_i}{2\pi a\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(B_i - a)^2\right], \quad B_i \geq 0 \quad (7.5.12)$$

这个函数在 $B_i = a$ 点上形成一个尖峰,而且随着 B_i 偏离 a 点很快地衰减下来。可以在式

(7.4.12) 中将慢变化因子 $\left[\frac{B_i}{2\pi a\sigma^2}\right]^{1/2}$ 中的 B_i 用 a 来代替,于是得到另一个近似的概率密度函数表达式

$$p_B(B_i) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(B_i - a)^2\right], \quad B_i \geq 0 \quad (7.5.13)$$

可见,在大信噪比情况下,包络 B_i 的概率分布趋于高斯分布(见图 7.10)。

由于 $X_N(t), Y_N(t)$ 均为高斯随机变量,而由式(7.5.2)可知 X_i 和 Y_i 分别是 $X_N(t)$ 和 $Y_N(t)$ 的线性函数,所以也是高斯随机变量。又由式(7.5.3)可知, B_i 与 X_i 和 Y_i 为非线性关系。然而由上面的讨论及得到的式(7.5.13)表明:在信号足够强的大信噪比条件下,式(7.5.3)的非线性处理对概率密度的影响很小,可以忽略不计。换言之,对随机变量的非线性处理,随着信噪比的增大,最后将趋于线性处理的结果。实际上,这一重要结论,对所有形式的非线性处理都是适用的。

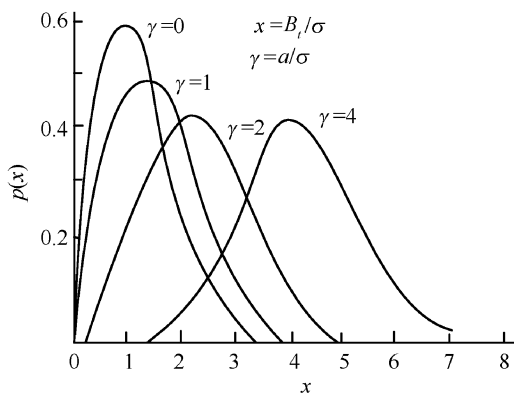


图 7.10 莱斯密度函数

7.5.2 余弦信号与窄带高斯过程之和的包络平方的概率分布

按本节前面给定的条件,由式(7.5.2)有

$$U(t) = B^2(t) = [a\cos\theta + X_N(t)]^2 + [a\sin\theta + Y_N(t)]^2 \quad (7.5.13)$$

任意时刻 t 的包络平方为 $U_i = B_i^2$ 。从式(7.5.7)出发,经过随机变量的函数变换得

$$p_U(U_i) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(U_i + a^2)\right] I_0\left(\frac{a\sqrt{U_i}}{\sigma^2}\right), \quad U_i \geq 0 \quad (7.5.14)$$

式(7.5.14)为所求包络平方的一维概率分布。

习 题

7.1 设 $x(t)$ 为实函数, 试证:

(1) $x(t)$ 为 t 的奇函数时, 它的希尔伯特变换为 t 的偶函数。

(2) $x(t)$ 为 t 的偶函数时, 它的希尔伯特变换为 t 的奇函数。

7.2 设窄带信号 $z(t) = x(t) \cos \omega_0 t - y(t) \sin \omega_0 t$

其中, $x(t)$ 与 $y(t)$ 的带宽远小于 ω_0 , 设 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 分别为 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的傅里叶变换, $G(\omega)$ 为 $g(t)$ 的傅里叶变换, $g(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ 。试证:

$$X(\omega) = \frac{1}{2} [G(\omega + \omega_0) + G^*(-\omega + \omega_0)]$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2j} [G(\omega + \omega_0) - G^*(-\omega + \omega_0)]$$

7.3 设 $a(t)$, $-\infty < t < +\infty$, 是具有频谱 $A(\omega)$ 的已知实函数, 假定 $|\omega| > \Delta\omega$ 时, $A(\omega) = 0$, 且满足 $\omega_0 \gg \Delta\omega$ 。求:

(1) $a(t) \cos \omega_0 t$ 和 $(1/2)a(t) \exp(j\omega_0 t)$ 的傅里叶变换以及它们的关系。

(2) $a(t) \sin \omega_0 t$ 和 $(-j/2)a(t) \exp(j\omega_0 t)$ 的傅里叶变换以及它们的关系。

(3) $a(t) \cos \omega_0 t$ 和 $a(t) \sin \omega_0 t$ 的傅里叶变换的关系。

7.4 对于窄带平稳随机过程

$$Z(t) = X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t$$

若已知 $R_z(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0 \tau$, 求证:

$$R_x(\tau) = R_y(\tau) = a(\tau)$$

7.5 对于窄带平稳随机过程, 按 7.4 题所给条件, 求证:

$$E[X(t)Y(t + \tau)] = 0$$

7.6 对于窄带平稳随机过程

$$Z(t) = X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t$$

若其均值为零, 功率谱密度为

$$G_z(\omega) = \begin{cases} W \cos \left[\frac{\pi(\omega - \omega_0)}{\Delta\omega} \right], & -\frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega - \omega_0 \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ W \cos \left[\frac{\pi(\omega + \omega_0)}{\Delta\omega} \right], & -\frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega + \omega_0 \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中, $W, \Delta\omega$ 与 $\omega_0 \gg \Delta\omega$ 都是正实常数。试求:

(1) $Z(t)$ 的平均功率。

(2) $X(t)$ 的功率谱密度 $G_x(\omega)$ 。

(3) 互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 。

(4) $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是否正交?

7.7 对于窄带平稳高斯过程

$$Z(t) = X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t$$

若假定其均值为零、方差为 σ^2 , 并具有对载频 ω_0 偶对称的功率谱密度。试借助于已知二维高斯概率密度函

数, 求出四维概率密度函数 $p(X_{t_1}, X_{t_2}, Y_{t_1}, Y_{t_2})$ 。

7.8 对于均值为零、方差为 σ^2 的窄带平稳高斯过程

$$Z(t) = B(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t)] = X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t$$

求证: 包络在任意时刻所给出的随机变量 B_t , 其数学期望值与方差分别为

$$E[B_t] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \quad D[B_t] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

7.9 试证: 均值为零、方差为 1 的窄带平稳高斯过程, 其任意时刻的包络平方的数学期望为 2, 方差为 4。

7.10 已知 $X(t)$ 为信号与窄带高斯噪声之和

$$X(t) = a\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t)$$

式中, θ 是 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, $N(t)$ 为窄带平稳高斯过程, 且均值为零, 方差为 σ^2 , 并可表示为

$$N(t) = N_c(t)\cos\omega_0 t - N_s(t)\sin\omega_0 t$$

求证: $X(t)$ 的包络平方的自相关函数为

$$R_X(\tau) = a^4 + 4a^2\sigma^2 + 4\sigma^4 + 4[a^2R_{N_c}^2(\tau) + R_{N_c}^2(\tau) + R_{N_c N_s}^2(\tau)]$$

7.11 若 7.10 题中噪声功率谱密度关于 ω_0 偶对称, 求仅存在噪声时 $X(t)$ 的功率谱密度。

7.12 远方发射台发送一个幅度不变, 角频率为 ω_0 的正弦波, 通过衰落信道传输后, 到达接收端时信号变为具有参数 σ_s^2 的瑞利型包络分布的随机信号。在接收端又有高斯噪声混入, 噪声的方差为 σ_N^2 。这样信号加噪声同时通过中心频率为 ω_0 的高频窄带系统, 假设信号与噪声的功率不变。求证: 窄带系统输出的信号与噪声之和的包络也服从瑞利分布, 其参数为 $\sigma_s^2 + \sigma_N^2$ 。

电子工业出版社有
版权所有