

第 1 章 离散时间信号与系统

本章重点:

1. 离散时间信号与离散时间系统
2. 离散时间系统的因果性和稳定性

本章学习要求:

1. 熟练掌握基本离散时间信号的定义、表示、作用及相互之间的关系
2. 熟练掌握数字信号角频率的特征
3. 熟练掌握 LTI 离散时间系统的概念及卷积(和)的计算方法
4. 掌握离散时间系统因果性和稳定性的时域判别方法
5. 掌握数字信号处理系统的一般组成
6. 了解相关运算的定义、分类及工程应用

1.1 引言

数学上, 信号与函数是相对应的, 信号可以表示为自变量的函数, 这个函数带有有关某一物理系统的状态或特性信息。信号的函数表达式中, 函数的自变量通常为时间变量, 函数的函数值也被称为信号幅度(幅值)。时间变量和幅度都可以是连续的或离散的, 因而信号分为以下 4 种类型:

(1) **连续时间信号**: 当自变量是连续型时, 信号被称为连续时间信号。

(2) **离散时间信号**: 当自变量是离散型时, 信号被称为离散时间信号。由于其自变量取离散时间值, 因此离散时间信号通常被表示成数值的序列。

(3) **模拟信号**: 时间变量和幅度都是连续的信号被称为模拟信号。

(4) **数字信号**: 时间变量和幅度都是离散的信号被称为数字信号。

处理信号的系统也能像信号一样来分类, 系统所处理的信号的类型就是系统的类型。

(1) **连续时间系统**: 输入/输出都是连续时间信号的系统。

(2) **离散时间系统**: 输入/输出都是离散时间信号的系统。

(3) **模拟系统**: 输入/输出都是模拟信号的系统。

(4) **数字系统**: 输入/输出都是数字信号的系统。

数字信号处理就是处理在幅度和时间上都离散的信号。

为了说明数字信号处理的作用及处理过程, 假定一个真实模拟信号 $s(t)$, 通过某种方式传送, 在传送过程中受到某个(某些)加性信号 $v(t)$ 的干扰, 观测到的模拟信号为 $x(t)$, 即:

$$x(t) = s(t) + v(t)$$

如何处理, 才能由观测信号 $x(t)$ 把真实信号 $s(t)$ 恢复出来?

图 1.1-1 就是一个典型的、实用的数字信号处理系统框图, 能够解决上面提出的问题。

信号处理的过程及图 1.1-1 中每部分的作用简单分析如下。

(1) 观测到的模拟信号 $x(t)$, 经过一个模拟滤波器, 能够滤除一些带外分量和干扰信号, 如

果技术指标要求不高,不必继续处理;如果技术指标要求很高,模拟信号处理难以达到要求或者代价太高,就需要采用数字信号进行处理。在模拟信号的数字化处理中,这一模拟滤波器也被称为前置抗混叠干扰滤波器,用以防止采样过程产生频谱的混叠失真。有关抗混叠干扰滤波器的相关概念将在 2.4.3 节详细介绍。

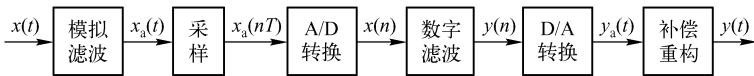


图 1.1-1 数字信号处理系统框图

(2) 对模拟信号进行数字化处理,必须经过采样和 A/D 转换,形成数字信号 $x(n)$ 。在数字信号处理技术中,用数学的概念把此离散时间信号抽象地称为序列。一般把采样得到的信号 $x_a(nT)$ 称为离散时间信号,它是时间离散、幅度连续的信号。

(3) 数字滤波是系统的核心,信号 $x(n)$ 经过数字滤波变换成为 $y(n)$,这种变换可以由硬件实现的,也可以是由软件实现的,或者由软、硬件结合实现的。在变换中隐含着保留真实信号、进一步去除干扰信号的作用。这种变换是以数学知识为基础,以飞速发展的集成电路技术和计算机技术为支撑的,实现起来不仅快速可靠,而且代价不高。

(4) $y(n)$ 经过 D/A 转换和补偿重构形成了模拟信号 $y(t)$,它与真实模拟信号 $s(t)$ 就非常接近了,就可认为真实模拟信号 $s(t)$ 得到了重现。

图 1.1-1 的各个部分在实现时,有的很复杂,有的很简单,这只是一个对模拟信号如何使用数字信号处理技术进行处理的例子。在此读者不需对每个框的功能予以深究,只需建立整体概念即可。但是对数字信号是时间和幅度都离散的这一特点,必须清楚。在构建实际的数字信号处理系统时,图 1.1-1 中的采样和 A/D 转换通常是利用模数转换器件(Analog-to-Digital Converter, ADC)实现的;数字滤波通常需要以处理器为基础,通过运行数字滤波算法程序来实现;而 D/A 转换和补偿重构则通常是利用数模转换器件(Digital-to-Analog Converter, DAC)实现的。

本章主要对离散时间信号和离散时间系统的基本概念与基本分析方法进行介绍,为后续各章节的讨论与分析做必要的准备。

课后思考

- 1. 离散时间信号和数字信号有何联系与区别?
- 2. 数字信号处理过程中,产生误差的来源都有哪些?

1.2 离散时间信号

模拟信号 $x_a(t)$ 进行等时间间隔 T 采样后,采样信号可表示为 $x_a(nT)$,此函数中的变量是 nT ,采样信号在离散时间点 nT 上取值, T 称为采样周期, n 只能取整数,则采样时间点为 $\dots, -1T, 0T, 1T, \dots$

从数学观点而言, T 对这些离散点只起间隔大小的作用,对离散点的顺序无作用,因此在只考虑离散点顺序时,可用 $\dots, -1, 0, 1, \dots$ 来代替上面的离散时间点,离散时间信号可抽象地表示成数的序列,不会影响问题的实质,且能与数学知识相结合。一个数的序列 x ,其中序列的第 n 个数记作 $x(n)$,序列 x 通常严格表示如下

$$x = \{x(n)\} \quad (-\infty < n < \infty) \tag{1.2-1}$$

式中 $\{\bullet\}$ 表示集合。 n 必须为整数,序列 x 只在这些整数点上的 $x(n)$ 才有定义,在非整数点上 $x(n)$ 不定义,当然更不能理解为等于0。在绝大部分场合,不采用序列的严格的集合表示法,而是简单地说成“序列 $x(n)$ ”,并且写成 $x(n)$ 。只有在需要区别序列和序列的第 n 个数的场合才加以说明。

1.2.1 离散时间信号的表示

1. 常用表示方法

时域离散信号——序列 $x(n)$ 常用的表示方法有3种:

(1) 用集合表示序列

时域离散信号是一组有序的数或符号的集合,可以用集合形式表示,例如:

$$x(n)=\{100,101,102,103,104 \quad n=0,1,2,3,4\}$$

其中, $n=0,1,2,3,4$ 表示变量 n 在时间轴上所处的位置。

(2) 用公式表示序列

序列也可以用公式表示,例如,正弦序列可以表示为

$$x(n)=A\sin(\omega n) \quad -\infty < n < \infty$$

(3) 用图形表示序列

用图形表示序列是一种很直观的方法,例如上述的正弦序列可以表示为如图1.2-1所示。

为了醒目,常在表示序列值的每条竖线的顶端加一圆点。

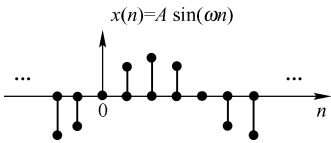


图 1.2-1 序列的图形表示

2. MATLAB 中离散时间信号的表示

在 MATLAB 中,一般用两个向量来表示有限长序列,例如 xn 和 n 。其中向量 xn 用于表示序列 $x(n)$ 的序列值,向量 n 表示序列 $x(n)$ 在时间轴(横轴)上的位置。 xn 与 n 的长度必须相等。向量 n 的第 k 个元素 $n(k)$ 表示序列值 $xn(k)$ 的位置。向量 n 一般都是单位增向量,产生语句为

$$n=ns: ne$$

其中, ns 表示序列 $x(n)$ 的起始点, ne 表示序列 $x(n)$ 的终止点。

例如,序列 $x(n)=\cos(\pi n/6)$, $n=0,1,2\cdots,12$, 利用 MATLAB 表示序列 $x(n)$ 的程序如下

```
n=0:12;           %设置向量 n, n 从 0 到 12
xn=cos(pi*n/6);    %计算序列值, 赋予向量 xn
stem(n,xn,'');
line([0,12],[0,0]);
axis([0,12,-1.1,1.1]);
xlabel('n');
ylabel('x(n)')      %以上 5 行代码为画图程序
```

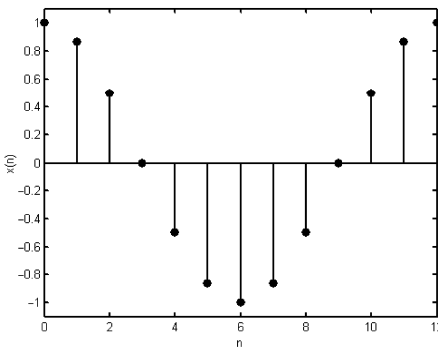


图 1.2-2 序列 $x(n)=\cos(\pi n/6)$ 的图形

运行程序,所绘制出的序列图形如图1.2-2所示。

1.2.2 基本序列

在信号处理中,下面的序列在理论分析和工程应用中起着重要的作用,称为基本序列。

1. 单位取样序列

单位取样序列的定义如下

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0 \\ 0 & \text{其他}n\end{cases}\tag{1.2-2}$$

单位取样序列与连续时间信号中的单位冲激函数 $\delta(t)$ 是对应的，因此也简称为冲激序列。单位取样序列不仅定义比单位冲激函数简单，而且是可以实现的。其示意图如图 1.2-3 所示。

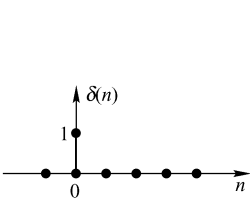


图 1.2-3 单位取样序列示意图

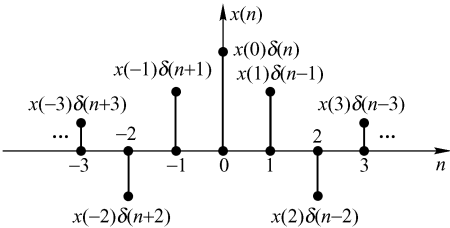


图 1.2-4 任意序列用单位取样序列表示

单位取样序列可以用来表示任意序列。给出任意序列 $x(n)$ ，如图 1.2-4 所示。对照 $\delta(n)$ 的定义，它可以写成

$$x(n)=\cdots+x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+\cdots\tag{1.2-3}$$

式中，等号右边的 $x(-1)$ 、 $x(0)$ 、 $x(1)$ 等称为“权”，就是对应序号的序列值。 $\delta(n+1)$ 、 $\delta(n)$ 、 $\delta(n-1)$ 等体现了单位取样序列 $\delta(n)$ 的移位。

式(1.2-3)的简洁表示，称为通式，即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)\tag{1.2-4}$$

式(1.2-4)为任意序列的单位取样序列表示，用文字可描述为：任意序列 $x(n)$ ，均可表示成单位取样序列 $\delta(n)$ 的移位加权和。

2. 单位阶跃序列

单位阶跃序列的定义如下

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0 \\ 0 & \text{其他}n\end{cases}\tag{1.2-5}$$

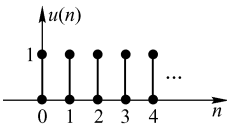


图 1.2-5 单位阶跃序列示意图

单位阶跃序列与连续时间信号中的单位阶跃函数 $u(t)$ 对应。单位阶跃序列示意图如图 1.2-5 所示。

单位阶跃序列可用单位取样序列组合表示为

$$u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots\tag{1.2-6}$$

或者

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)\tag{1.2-7}$$

同样，单位取样序列也可用单位阶跃序列表示成

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)\tag{1.2-8}$$

式(1.2-7)与式(1.2-8)表示了单位阶跃序列和单位取样序列之间的关系(求和与差分关系)，这

与连续时间信号中的单位阶跃函数与单位冲激函数之间的关系(积分与微分关系)是类似的。

3. 实指数序列

实指数序列的定义如下

$$x(n) = \alpha^n \quad -\infty < n < \infty \tag{1.2-9}$$

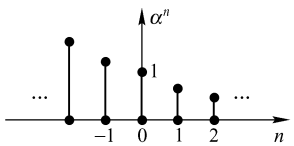


图 1.2-6 实指数序列示意图

实指数序列不仅与 n 有关, 也与 α 有关, 如果 α 是实数, 则序列为实序列; 如果 α 是复数, 则序列为复序列。当 $\alpha > 0$ 时, 序列不仅为实序列, 而且所有序列值为正; 当 $\alpha < 0$ 时, 序列为实序列, 序列值为正、负交替变化。

当 $0 < \alpha < 1$ 时, 实指数序列示意图如图 1.2-6 所示。

4. 矩形序列

矩形序列的定义如下

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{1.2-10}$$

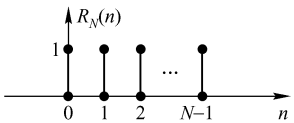


图 1.2-7 矩形序列示意图

矩形序列也被称为矩形窗, 其示意图如图 1.2-7 所示。

利用矩形序列 $R_N(n)$ 和乘法运算, 可以截取任意序列 $x(n)$ 从 $n=0$ 到 $N-1$ 的 N 个序列值, 即

$$z(n) = x(n)R_N(n) \tag{1.2-11}$$

$R_N(n)$ 的作用就像一个矩形窗口, 通过这个窗口来观测序列 $x(n)$, 结果序列 $z(n)$ 保留了观测到的值, 而观测不到的值在 $z(n)$ 中置为 0。图 1.2-8 可更直观地理解矩形序列的这一作用。

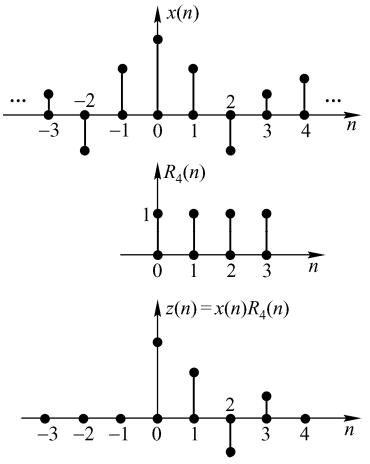


图 1.2-8 矩形序列的窗口作用

5. 正(余)弦序列

正(余)弦序列的定义如下

$$x(n) = A \sin(\omega n) \quad -\infty < n < \infty \tag{1.2-12}$$

或者
$$x(n) = A \cos(\omega n) \quad -\infty < n < \infty \tag{1.2-13}$$

前面介绍的序列, 与连续时间信号都有对应。正(余)弦序列似乎也应与连续时间的正(余)弦函数 $A \sin(\Omega t)$ 或 $A \cos(\Omega t)$ 完全对应, 其实并非如此, 它们之间有重大差别。

● 连续时间和离散时间的正(余)弦信号之间的第一个差别是周期性问题。

在连续时间的情况下, 正(余)弦信号都是周期的, 且周期 $T = 2\pi / \Omega$ 。在离散时间的情况下, 一个周期序列应满足

$$x(n) = x(n + N) \quad \text{对全部 } n \tag{1.2-14}$$

周期 N 必须是整数且不为 0。则以正弦序列为例, 有

$$A \sin(\omega n) = A \sin[\omega(n + N)] = A \sin(\omega n + \omega N) \tag{1.2-15}$$

因此必须有
$$\omega N = 2k\pi \tag{1.2-16}$$

k 是整数且不为 0, 则
$$\omega / 2\pi = k / N \tag{1.2-17}$$



二维码 1-1

式(1.2-17)的含义有两点：第一，若给定一个正(余)弦序列，判断其是否为周期序列的准则是： $\omega/2\pi$ 是否为一个整分数，是整分数则为周期序列，否则为非周期序列；第二，正(余)弦序列若为周期序列，则其周期就等于 $\omega/2\pi$ 为最简整分数时的分母(最简是保证为最小周期)。

【例 1.2-1】 序列 $x_1(n)=10\sin(0.15n)$ 和 $x_2(n)=10\sin(0.15\pi n)$ ，判别这两个序列是否为周期序列，若是周期序列，指明最小周期。

解：对于序列 $x_1(n)$ ， $\omega=0.15$ ，则 $\omega/2\pi=3/40\pi$ ，不满足分子分母都为整数的要求，即 $\omega/2\pi$ 不为整分数，则该序列为非周期序列。

对于序列 $x_2(n)$ ， $\omega=0.15\pi$ ，则 $\omega/2\pi=3/40$ ， $\omega/2\pi$ 是整分数，则该序列为周期序列，最小周期为 40。

这里再给出几个离散时间信号周期性判别的例子，请扫二维码 1-1 查看。

● 连续时间和离散时间正(余)弦信号之间的第二个差别是角频率问题。

本书规定如下。

Ω ：表示连续时间信号的角频率，称为模拟角频率。

ω ：表示离散时间信号的角频率，称为数字角频率。

对 $A\sin(\Omega t)$ 而言，显然 $-\infty < \Omega < \infty$ 。也许 $\Omega < 0$ 对实际应用是不现实的，但对理论分析是有价值的。 Ω 反映了 $A\sin(\Omega t)$ “振荡”的快慢， Ω 的绝对值越大， $A\sin(\Omega t)$ “振荡”得越快。

对 $A\sin(\omega n)$ 而言，有 $A\sin[(\omega + 2\pi)n] = A\sin(\omega n + 2\pi n) = A\sin(\omega n)$ (1.2-18)

式(1.2-18)说明正(余)弦序列的数字角频率 ω 是以 2π 为周期的。当然， ω 有周期性，不能说 $A\sin(\omega n)$ 就是周期序列；但不管正(余)弦序列是否为周期序列，数字角频率 ω 都是以 2π 为周期的。因此，在分析正(余)弦序列的数字角频率 ω 时，取

$$0 \leq \omega < 2\pi \quad \text{或者} \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (1.2-19)$$

由于在 $0 \leq \omega < \pi$ 、 $\pi \leq \omega' < 2\pi$ 两个区间的正弦序列有

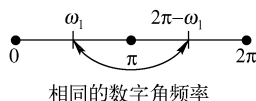
$$A\sin \omega n = -A\sin[(2\pi - \omega)n] = -A\sin(\omega'n) \quad (1.2-20)$$

这说明数字角频率 ω 有对称性，因而分析 ω 时可取

$$0 \leq \omega < \pi \quad \text{或者} \quad -\pi/2 \leq \omega < \pi/2 \quad (1.2-21)$$

说明对正(余)弦序列的数字角频率 ω 只考虑到式(1.2-21)就可以了， ω 的其他部分对应的序列形式由序列的对称性(正弦序列为奇对称，余弦序列为偶对称)和 ω 的周期性得到。

上述对数字角频率 ω 的讨论与分析过程可用图 1.2-9 加以形象说明：



从图 1.2-9 中可以看出，数字角频率不仅以 2π 为周期，且在 $0 \leq \omega < 2\pi$ 这样一个周期内，关于 $\omega = \pi$ 还是对称的。

图 1.2-9 数字角频率特性示意图

以上的讨论还隐含着这样一点，就是离散时间正(余)弦信号的高、低频率的解释，可以举例说明，当 ω 从 0 增加到 π 时， $A\sin(\omega n)$ 振荡加快，而当 ω 从 π 增加到 2π 时，振荡由快变慢，这一现象以 2π 为周期周而复始。如果只考虑 $0 \leq \omega < \pi$ ，就把位于 0 附近的 ω 值说成是低频区域(相对慢的振荡)，而把位于 π 附近的 ω 值说成是高频区域(相对快的振荡)。

【例 1.2-2】 已知序列 $x(n) = \sin(\omega n)$ ，分别画出 $\omega = 0$ 、 $\omega = \pi/2$ 、 $\omega = \pi$ 、 $\omega = 3\pi/2$ 和 $\omega = 2\pi$ 时 $x(n)$ 的序列图形，并描绘其包络线。

解：描点画图，或编写 MATLAB 仿真程序画图，得到 $x(n)$ 的序列图形及包络线见图 1.2-10。

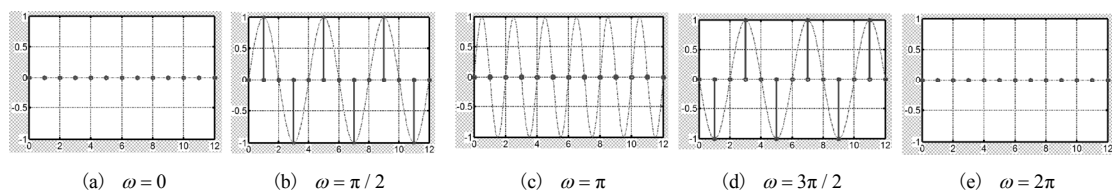


图 1.2-10 $x(n)$ 的序列图形及包络线

图 1.2-10 中, 虚线即为 $x(n)$ 的包络线, 也可以认为是其对应的连续时间信号的波形。由图 (a) 和图 (e) 可以看出数字角频率的周期性; 以图 (c) 为中心向两边观察, 可以看出数字角频率的对称性; 观察图 (a)、(b) 和 (c), 可以看出, 在 $[0, \pi]$ 区间, 数字角频率的值越大, 则其表征的信号的频率越高。

如果正弦序列不是由构造得到的, 而是对 $A\sin(\Omega t)$ 采样得到的, 有

$$A\sin(\Omega t)|_{t=nT} = A\sin(\Omega nT) = A\sin(\omega n) \quad \text{对所有采样点} \quad (1.2-22)$$

$$\text{则总是有} \quad \omega = \Omega T = \Omega / f_s \quad (1.2-23)$$

式 (1.2-23) 中, T 为采样周期, f_s 为采样频率。因此从量纲角度而言, 由于模拟角频率 Ω 的单位为弧度/秒 (rad/s), T 的单位为秒 (s), f_s 的单位为 1/s (Hz), 因而数字角频率 ω 的单位为弧度 (rad), 而变量 n 和周期 N 都是无量纲的整数。如果以抽象的 $f(\Omega t)$ 来代替 $A\sin(\Omega t)$, 对 $f(\Omega t)$ 采样, 将得到同样结论。即式 (1.2-23) 在采样的前提下具有普遍意义。

1.2.3 序列的基本运算

数字信号处理时, 需要对序列进行运算, 这里把序列的基本运算形式以不带集合符号的序列简单表示法列出, 等号左边的 $z(n)$ 表示结果序列, 等号右边的序列是要运算或变换的序列。

$$\text{序列相加:} \quad z(n) = x(n) + y(n) = y(n) + x(n) \quad (1.2-24)$$

$$\text{序列相乘:} \quad z(n) = x(n)y(n) = y(n)x(n) \quad (1.2-25)$$

$$\text{序列的数乘:} \quad z(n) = Cx(n) \quad C \text{ 为常数} \quad (1.2-26)$$

$$\text{序列的移位:} \quad z(n) = x(n-k) \quad (1.2-27)$$

$$\text{序列的反转:} \quad z(n) = x(-n) \quad (1.2-28)$$

$$\text{序列的线性卷积:} \quad z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k) \quad (1.2-29)$$

$$\text{序列的能量:} \quad E[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.2-30)$$

上述序列的基本运算在前面的基本序列分析中已经出现了一些, 这里是进行定义和赋以运算的名称。

课后习题

1.2-1 画出序列 $x(n)$ 。

$$(1) \ x(n) = (1/2)^n u(n) \quad (2) \ x(n) = (2)^n u(n) \quad (3) \ x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2)$$

$$(4) \ x(n) = \sin(\pi n/6) u(n) \quad (5) \ x(n) = (2)^n R_6(n) \quad (6) \ x(n) = (1/2)^n R_6(n)$$

$$(7) \ x(n) = \sin(\pi n/6) R_6(n) \quad (8) \ x(n) = 2\cos(\pi n/6) u(n) \quad (9) \ x(n) = e^{-j\pi n/6} R_6(n)$$

1.2-2 判断序列 $x(n)$ 是否为周期序列? 若是, 求最小周期。

$$(1) \ x(n) = 5\cos(0.05n) \quad (2) \ x(n) = 3\sin(0.05\pi n) \quad (3) \ x(n) = 2\sin(0.05\pi n) + \cos(0.12\pi n)$$

(4) $x(n) = 3\sin(0.05\pi n + 0.6\pi)$

(5) $x(n) = e^{-j(\pi n/8 + \pi/8)}$

(6) $x(n) = e^{-j\pi n/8} R_8(n)$

1.2-3 已知序列 $x(n]$ 和 $y(n]$ 如图 E1-1 所示，求：

- (1) $z(n) = x(n) + y(n)$
- (2) $z(n) = x(n)y(n)$
- (3) $x(n]$ 的能量
- (4) $y(n]$ 的能量

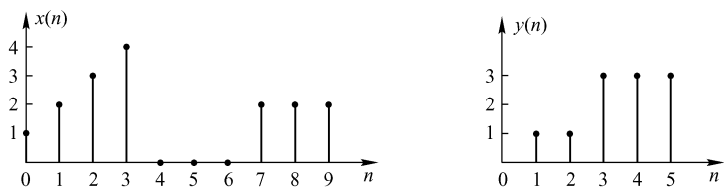


图 E1-1 题 1.2-3 图

1.2-4 有 $x_a(t) = \sin(\pi t)$ 和 $x(n) = x_a(nT) = \sin(\pi nT)$ ，其中 T 为采样周期，求：

- (1) 模拟信号 $x_a(t)$ 的模拟角频率 Ω
- (2) $T = 1\text{s}$ 时，数字信号 $x(n)$ 的数字角频率 ω ；
- (3) $T = 0.5\text{s}$ 时，数字信号 $x(n)$ 的数字角频率 ω ；
- (4) ω 、 Ω 和 T 之间有什么样的关系；
- (5) 画出 (2)、(3) 对应的序列 $x(n)$ ，有何发现？

1.2-5 连续时间信号 $x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ ，其中 $f_0 = 20\text{Hz}$ ， $\varphi = \pi/2$ ，求：

- (1) $x_a(t)$ 的周期；
- (2) 以采样周期 $T = 0.02\text{s}$ 对 $x_a(t)$ 进行采样，得到离散时间信号 $x(n)$ ，写出 $x(n)$ 的表达式，并求出其最小周期。

1.3 离散时间系统

在数学上，一个离散时间系统可以定义为一种变换或算子(算法)，可以形象地以图 1.3-1 来表示。

图 1.3-1 的方框表示离散时间系统， $x(n)$ 是系统的输入序列， $y(n)$

是系统的输出序列， $T[*]$ 表示某种变换或算法，数学上常称 $T[*]$ 为算

子，在信号处理中称为系统。由于这个系统的输入和输出都是离散时

间信号，因此称其为离散时间系统，简称离散系统。

一个离散时间系统就是把一个离散时间信号 $x(n)$ 变换(映射)为另一个离散时间信号 $y(n)$ 的

变换或算法。亦即把一个序列 $x(n)$ 变换(映射)为另一个序列 $y(n)$ 的变换或算法。记为

$y(n) = T[x(n)]$

(1.3-1)

显然，可以通过加在变换 $T[*]$ 的性质上的限制来定义各种离散系统。以下介绍的离散系统中，

线性时不变离散系统是重点。

1.3.1 理想延迟系统

理想延迟系统由下面的方程定义

$y(n) = x(n - m)$

$-\infty < n < \infty$

(1.3-2)

式(1.3-2)中，如果 m 是一个固定的正整数，称为系统的延迟，则理想延迟系统就是把输入序

列右移 m 个位置(序号)形成输出序列，这相当于时间延迟；若 m 是一个固定的负整数，那么系统

就将输入序列左移 $|m|$ 个位置形成输出序列，这相当于时间超前。显然这与序列的基本运算中的

“序列的移位”是一致的。顺带说明：“序列的移位”这样的说法，合乎数学的习惯，而“延迟”、

“超前”这样的说法，合乎工程的习惯，而且更为形象，是同一事实的不同描述。

1.3.2 滑动平均系统

一般的滑动平均系统由下面的方程定义

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{M+N+1} \sum_{k=-M}^N x(n-k) \\ &= \frac{1}{M+N+1} [x(n+M) + x(n+M-1) + \cdots + x(n) + \cdots + x(n-N)] \end{aligned} \quad (1.3-3)$$

由式(1.3-3)描述的系统, 其输出序列的第 n 个值, 等于输入序列第 n 个值和其前 N 个值、后 M 个值共 $M+N+1$ 个值的平均。如果 $N=M$, 则输出序列的第 n 个值, 等于以输入序列第 n 个值为中心的前后共 $2M+1$ 个值的平均。由于这样的系统如同有一个长为 $M+N+1$ 的矩形序列随 n 在 $x(n)$ 上移动, 把通过矩形序列观测到的 $x(n)$ 的值取平均作为输出序列的值, 因此称为滑动平均系统。滑动平均系统起到对输入信号进行平滑的作用, 相当于一个数字低通滤波器, 滤除信号中快速变化的高频分量, 而保留信号中变化缓慢的低频分量。此外, 滑动平均系统还可以用来获取快速变化信号(或数据)的变化趋势。

1.3.3 无记忆系统

如果一个离散时间系统在每一个 n 值的输出 $y(n)$, 只与同一 n 值的输入 $x(n)$ 有关, 就说该系统是无记忆的, 称为无记忆系统。

例如, 离散时间系统的输入序列为 $x(n)$, 输出序列为 $y(n)$, 若 $y(n) = 3[x(n)]^2$, 则系统是无记忆系统。又如, $y(n) = 3x(n) + 2x(n-1)$, 则系统不是无记忆系统, 即为记忆系统。

1.3.4 线性系统

对于一个离散时间系统, 设 $y_1(n) = T[x_1(n)]$, $y_2(n) = T[x_2(n)]$, 对于任意常数 a 、 b , 如果满足

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \quad (1.3-4)$$

则称其为线性离散时间系统, 简称线性系统(Linear System)。

式(1.3-4)说明线性系统的输入和输出序列间必须满足叠加原理。式(1.3-4)可以推广到多个输入的叠加, 即

$$x(n) = \sum_{k=1}^K a_k x_k(n) \quad (1.3-5)$$

由于 $y_k(n) = T[x_k(n)]$, 则

$$y(n) = T\left[\sum_{k=1}^K a_k x_k(n)\right] = \sum_{k=1}^K a_k T[x_k(n)] = \sum_{k=1}^K a_k y_k(n) \quad (1.3-6)$$

通常证明一个系统为线性系统时, 都是采用式(1.3-4), 即用叠加原理来证明。而否定为线性系统时, 往往可以用特例, 以达到简化证明的效果。

例如, 累加器系统的定义为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad (1.3-7)$$

如令

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_1(k), \quad y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_2(k)$$

按照线性系统的定义，容易证明式(1.3-7)描述的系统是线性系统。这个系统在 n “时刻”的响应等于 n “时刻”及之前所有“时刻”的输入的累加和。这里加了“时刻”一词是为了容易理解。

如果令输入序列 $x(n)$ 是单位取样序列 $\delta(n)$ ，则在 $n < 0$ 时，其累加和在每个时刻均为0；在 $n \geq 0$ 时，其累加和在每个时刻均为1，输出序列 $y(n)$ 就是单位阶跃序列 $u(n)$ ，因此下式成立

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1.3-8)$$

系统的输入序列为 $x(n)$ 时输出序列为 $y(n)$ ，又称 $y(n)$ 是系统对 $x(n)$ 的响应。式(1.3-6)表明：当系统为线性系统、而输入信号又是叠加性复杂信号时，可以把输入信号分解为若干个简单信号，求出各自的响应后，叠加在一起就得到了系统对复杂信号的响应。

1.3.5 时不变(移不变)系统

对于一个离散时间系统， $y(n) = T[x(n)]$ ，若对于任意整数 k ，满足

$$y(n-k) = T[x(n-k)] \quad (1.3-9)$$

则称其为时不变(移不变)离散时间系统，简称时不变(Time Invariant)系统或移不变(Shift Invariant)系统。

式(1.3-9)描述的系统具有这样的性质：当输入序列移位或延迟时，输出序列做相应的移位或延迟。因此用工程术语说，即时不变系统的运算关系 $T[*]$ 不随“时间”而变化。

【例 1.3-1】 一个离散时间系统为 $y(n) = nx(n)$ ，判定此系统是否为线性系统和时不变系统。

解：(1) 判定线性性。

设 $y_1(n) = T[x_1(n)] = nx_1(n)$, $y_2(n) = T[x_2(n)] = nx_2(n)$
 令 $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, a 、 b 为任意常数
 则 $y(n) = T[x(n)] = nx(n) = n[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$

因此该系统为线性系统。

(2) 判定时不变性。

令 $x(n) = \delta(n)$ ，则输出 $y(n) = n\delta(n)$ ，显然 $y(n)$ 是一个全0序列。再令 $x(n) = \delta(n-1)$ ，则输出 $y(n) = n\delta(n-1) = \delta(n-1)$ ，不是全0序列。所以根据定义可确定该系统不是时不变系统，即为时变系统。

1.3.6 线性时不变(移不变)系统

定义：如果一个离散时间系统既是线性系统，又是时不变系统，该系统就称为线性时不变离散时间系统，简称线性时不变(移不变)系统，通常简写为LTI(或LSI)系统。

线性时不变系统是很实用的基本系统，在信号处理中大部分系统被假定或者设计为线性时不变系统。

假定一个系统是线性时不变系统，令其输入序列为 $x(n)$ ，输出序列为 $y(n)$ 。当 $x(n)$ 取单位取样序列 $\delta(n)$ 时，相应的输出序列记为 $h(n)$ ，我们把 $h(n)$ 称为系统对 $\delta(n)$ 的响应，也可以把 $h(n)$ 称为单位取样响应或单位冲激响应。由于系统为线性时不变系统，则当 $h(n) = T[\delta(n)]$ 时，有

$$h(n-k) = T[\delta(n-k)] \quad (1.3-10)$$

而由式(1.2-4)可知，任意输入序列 $x(n)$ 可用下式表示

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.3-11)$$

系统对 $x(n)$ 的响应 $y(n)$ 就可以写成

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k)\delta(n-k)] \quad (\text{利用线性性}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \quad (x(k) \text{ 是权值}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (\text{利用时不变性}) \end{aligned} \tag{1.3-12}$$

式(1.3-12)称为卷积和，简称卷积。该式表明：线性时不变离散系统的输出序列 $y(n)$ 等于输入序列 $x(n)$ 与本系统单位取样响应序列 $h(n)$ 的卷积。由于 $h(n)$ 可以预先设计或者测定出来，只要给定输入序列，用式(1.3-12)就能计算出线性时不变系统的输出序列。因此式(1.3-12)是一个重要的基本公式。若用符号“*”表示卷积，式(1.3-12)可简写为

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{1.3-13}$$

如果以 $r = n - k$ (则 $k = n - r$) 对式(1.3-12)的最后一个等号右边进行变量代换，有

$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n-r)h(r) = h(n) * x(n) \tag{1.3-14}$$

即有

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{1.3-15}$$

式(1.3-15)说明：对线性时不变系统而言，输出序列 $y(n)$ 等于输入序列 $x(n)$ 与本系统单位取样响应 $h(n)$ 的卷积(线性卷积)，而与进行卷积的两序列的先后次序无关。

1.3.7 卷积和的计算方法

卷积和是一种非常重要的运算，它在数字信号处理过程中起着重要的作用。因此，不仅要知道该运算的意义，而且也应熟练地掌握其运算技巧。

首先把式(1.3-12)再次写出

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{1.3-16}$$

为了求出序列 $y(n)$ ，序号 n 从小到大逐一取值，当 n 为某个值时，用上式的右边进行乘加运算，结果是序列 $y(n)$ 第 n 个值。例如，令 $n = 0$ ，则有

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(0-k) \tag{1.3-17}$$

若令 $n = N$ (N 为一个值)，则有

$$y(N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(N-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h[-(k-N)] \tag{1.3-18}$$

这样可以逐一求出序列值，形成序列 $y(n)$ 。

1. 卷积和的图解法

这里举例说明卷积和的图解法。

【例 1.3-2】 一个线性时不变离散系统的单位取样响应序列 $h(n)$ 和输入序列 $x(n)$ 如图 1.3-2

所示，求输出序列 $y(n)$ 。

解：由式 (1.3-18) 知，系统单位取样响应序列 $h(n)$ ，不仅要反转，还要移位 N ，分别以图 1.3-3 (a) 和 (b) 表示。

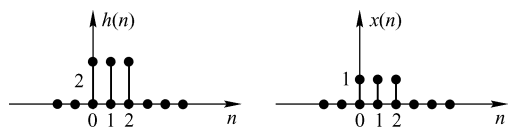


图 1.3-2 离散系统单位取样响应序列和输入序列

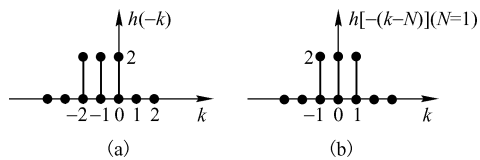


图 1.3-3 $h(n)$ 反转及反转后再移位对应的序列

图解法求解步骤如下：
第一步：根据序列得到其反转序列 $h(-k)$ ，见图 1.3-3 (a)。
第二步：将 $h(-k)$ 右移 N ，得到 $h(N-k)$ ，见图 1.3-3 (b)。
第三步：需要将 $x(k)$ 和 $h(N-k)$ 画在同一个图上，二者所有重叠的均非 0 的序列值进行乘法运算，得到 $x(k)h(N-k)$ 。
第四步：将上一步所有乘积值相加即为 $y(N)$ 。
第五步： n 逐一取值，重复上面的四步，直到 $-\infty < n < \infty$ (n 通常都有确切的上下限)。
具体运算过程见图 1.3-4。

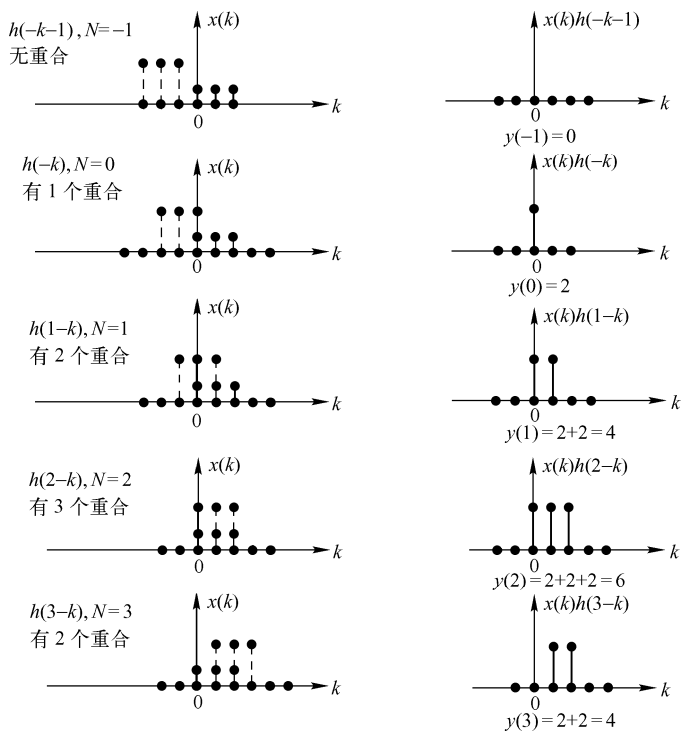


图 1.3-4 卷积和计算的图解法

可以让 n 继续取更大的 N ，进行计算，最后结果如图 1.3-5 所示。
显然图解法比较直观，但是非常麻烦，只适合短序列的卷积计算。严格地说，图解法对理解卷积的计算过程意义不大。

一个序列 $x(n)$ 如果存在一个序号的有限区间 $[N, M]$ ，在此区间外，所有序号对应的序列值为 0，则这种序列称为有限长序列。若序列 $x(n)$ 和序列 $h(n)$ 均是有限长序列，二者的长度分别为 L_1 和 L_2 ，取非零值的区间分别为 $[N_1, M_1]$ 和 $[N_2, M_2]$ ，序列 $y(n) = x(n) * h(n)$ ，则由图解法可总结出以下结论：

- ① $y(n)$ 取非零值的区间为 $[N_1 + N_2, M_1 + M_2]$ ；
- ② $y(n)$ 的长度为 $L = L_1 + L_2 - 1$ 。

上述结论将用于卷积和的计算机求解。

2. 卷积和的计算机求解

以下通过例题来说明求解过程。

【例 1.3-3】 例 1.3-2 中，再加上如下限定：

输入序列 $x(n)$ 和系统单位取样响应序列 $h(n)$ 均是有限长序列，即：

$x(n)$ 取非零值的区间为 $[N_1, M_1]$ ，本例是 $[0, 2]$ 。

$h(n)$ 取非零值的区间为 $[N_2, M_2]$ ，本例是 $[0, 2]$ 。

解： 本例的求解步骤如下。

第一步：确定 $y(n)$ 取非零值的区间为 $[N_1 + N_2, M_1 + M_2]$ ，本例是 $[0, 4]$ 。这一步的工作是为了确定 $y(n)$ 中的哪些序列值需要计算，因为区间外的序列值都是 0，无须计算。

第二步：把 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的非零值区间都变为从 0 开始，当然对应的序列值随之移动。本例已经都从 0 开始。

第三步：利用式 (1.3-12) 的变形公式 $y(n) = \sum_{k=0}^{M_1-N_1} x(k)h(n-k)$ 计算序列值。计算当 $n=0, 1, 2, \dots, M_1 + M_2 - N_1 - N_2$ 时， $y(n)$ 所对应的 $y(0), y(1), \dots, y(M_1 + M_2 - N_1 - N_2)$ 。求一个序列值时，乘法运算的结束标志是 $h(n-k)$ 的 $n-k < 0$ 。

第四步：把 $y(n)$ 的序号由 0 开始变为由 $N_1 + N_2$ 开始，其他序号依次变为 $N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + 2, \dots$ 直到 $M_1 + M_2$ 为止，就是真正的输出序列 $y(n)$ 。

请读者用例 1.3-2 来验证本例给出的方法。本例的方法适合计算机编程计算，并且合乎公式本身的数学意义。

以下给出例 1.3-3 的 MATLAB 求解程序。

```
x=[1, 1, 1];N1=0;M1=2;nx=N1:M1;
h=[2, 2, 2];N2=0;M2=2;nh=N2:M2;
%生成做卷积的两个有限长序列
ny=N1+N2:M1+M2;
%确定卷积结果序列取非零值的区间
nx1=0:M1-N1;nh1=0:M2-N2;
%把做卷积的两个序列取非零值的区间都变为从 0 开始
for n=0:M1+M2-N1-N2
    y(n+1)=0;
    for k=0:M1-N1
        m=n-k;
        if (m>=0&m<=M2-N2)
            y(n+1)=y(n+1)+x(k+1)*h(m+1);
        end
    end
end
```

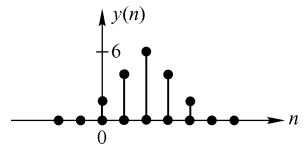


图 1.3-5 例 1.3-2 卷积和计算的结果

```

end
end
%二层循环进行乘加运算，完成卷积和的计算
stem(ny, y, 'l');xlabel('n');ylabel('y(n)')
%绘制卷积结果序列的图形

```

程序中， x 为序列 $x(n)$ ， h 为序列 $h(n)$ ， y 为卷积结果序列 $y(n)$ ，在程序语句“ $y(n+1)=y(n+1)+x(k+1)*h(m+1)$ ”中，“+1”是由于 MATLAB 中数组下标是从 1，而非 0 开始的。

3. 卷积和的解析求解方法

以下通过例题说明求解过程。

【例 1.3-4】 一个线性时不变系统的单位取样响应序列 $h(n) = a^n u(n)$ ， $0 < a < 1$ ，输入序列 $x(n) = u(n)$ ，求输出序列 $y(n)$ 。

解：由图解法最终所得到的结论，首先判断出输出序列 $y(n)$ 只在 $n \geq 0$ 时取得非 0 值。由卷积公式，有

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(n-k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k u(n-k) \quad (u(k) \text{取非0值要求 } k \geq 0, \text{ 求和下限变为0}) \\
 &= \sum_{k=0}^n a^k \quad (u(n-k) \text{取非0值要求 } n-k \geq 0, \text{ 即 } k \leq n, \text{ 求和上限变为 } n)
 \end{aligned}$$

利用等比级数求和得到： $y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$ 。

例 1.3-4 说明当输入序列和单位取样响应序列由简单式子给出时，输出序列以一个解析式子表达出来是可能的。这种式子称为闭合形式或紧凑形式。在工程中，一般难以用闭合形式来表达输出序列，但解析求解方法在理论分析中是十分有价值的。

1.3.8 卷积和的 MATLAB 求解

MATLAB 的信号处理工具箱函数 `conv()` 用于计算两个有限长序列的线性卷积，其调用格式为

$$C = \text{conv}(A, B)$$

其中， A 和 B 为参与卷积运算的两个有限长序列， C 为卷积结果序列。如果 A 和 B 的长度分别为 N 和 M ，则 C 的长度为 $N+M-1$ 。以 `conv()` 函数为基础，实现例 1.3-2 中两个有限长序列线性卷积计算及画图的 MATLAB 程序如下。

```

xn=[1, 1, 1];           %序列 x(n)
nx=0:2;                 %序列 x(n)的位置向量
hn=[2, 2, 2];           %序列 h(n)
nh=0:2;                 %序列 h(n)的位置向量
ny=nh(1)+nx(1):nh(end)+nx(end); %计算序列 y(n)的位置向量
yn=conv(xn,hn);         %计算序列 y(n)
stem(ny,yn,'l');
line([0, 5], [0, 0]);
axis([0, 5, 0, 7]);
xlabel('n');ylabel('y(n)') %以上 4 行代码为画图程序

```

运行程序，得到的结果如图 1.3-6 所示。

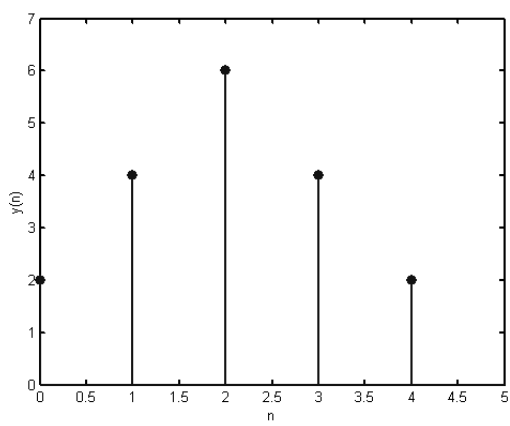


图 1.3-6 例 1.3-2 的 MATLAB 求解结果

这一结果与例 1.3-2 中图解法计算的结果相同。

1.3.9 卷积的运算规律

设有 3 个序列分别为 $v(n)$ 、 $w(n)$ 和 $x(n)$ ，且 $z(n) = v(n) * w(n)$ 。用卷积定义公式可以容易地证明下面的卷积运算基本定律。

交换律：
$$v(n) * w(n) = w(n) * v(n) \tag{1.3-19}$$

结合律：
$$v(n) * [w(n) * x(n)] = [v(n) * w(n)] * x(n) \tag{1.3-20}$$

分配律：
$$v(n) * [w(n) + x(n)] = v(n) * w(n) + v(n) * x(n) \tag{1.3-21}$$

与单位取样序列的卷积：
$$x(n) * \delta(n) = x(n) \tag{1.3-22}$$

与移位单位取样序列的卷积：
$$x(n) * \delta(n - k) = x(n - k) \tag{1.3-23}$$

移位性质：
$$v(n - n_1) * w(n - n_2) = z(n - n_1 - n_2) \tag{1.3-24}$$

这些基本定律在线性时不变系统的变换和分析中是很有用的。例如利用结合律可以求得串联系统的单位取样响应如图 1.3-7 所示；利用分配律可以求得并联系统的单位取样响应如图 1.3-8 所示。



图 1.3-7 串联系统的单位取样响应

在图 1.3-7 和图 1.3-8 中使用了双箭头，说明是等效的变换，可以合并，也可以拆分。必须再次强调的是，只有线性时不变系统才有这种性质。

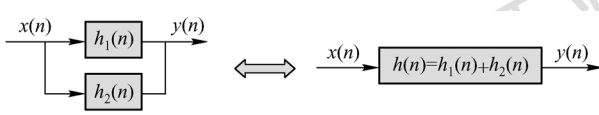


图 1.3-8 并联系统的单位取样响应

课后习题

1.3-1 离散时间 LTI 系统, 单位取样响应为 $h(n)$, 输入信号 $x(n)$ 是周期为 N 的周期序列, 证明输出信号 $y(n)$ 也是周期为 N 的周期序列。

1.3-2 一个离散时间 LTI 系统的单位取样响应 $h(n)$ 在区间 $N_0 \leq n \leq N_1$ 之外皆为零, 输入序列 $x(n)$ 在区间 $N_2 \leq n \leq N_3$ 之外皆为零, 输出序列 $y(n)$ 在区间 $N_4 \leq n \leq N_5$ 之外皆为零。试以 N_0 、 N_1 、 N_2 、 N_3 表示出 N_4 和 N_5 。

1.3-3 计算序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的卷积。

(1) $x(n) = u(n) - u(n - N)$ $y(n) = nu(n)$

(2) $x(n) = u(n - 1) - u(n - 2)$ $y(n) = u(n + 3) - u(n + 1)$

(3) $x(n) = (1/2)^n u(n)$ $y(n) = (1/4)^n u(n)$

(4) $x(n) = (1/2)^n u(n)$ $y(n) = u(n) - u(n - 10)$

(5) $x(n) = 2^n u(-n - 1)$ $y(n) = 4^n u(-n - 1)$

1.3-4 $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示一个系统的输入和输出, 试确定下列系统是否为线性系统、时不变系统 (a 、 b 为常数)。

(1) $y(n) = ax(n) + b$

(2) $y(n) = ax^2(n)$

(3) $y(n) = e^{-x(n)}$

(4) $y(n) = \sum_{k=-3}^n e^{x(k)}$

(5) $y(n) = x(n)g(n)$

(6) $y(n) = x(n)\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{4}\right)$

1.3-5 一个输入为 $x(n)$ 的系统, 系统的输入/输出关系为 $y(n) - by(n-1) = x(n)$, 其中 b 为常数, 且有 $y(0) = 1$ 。

(1) 判断系统是否为线性的;

(2) 判断系统是否为时不变的;

(3) 若 $y(0) = 0$, (1) 和 (2) 的答案是否改变?

1.3-6 某离散时间系统的差分方程为: $y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = x(n)$, 当 $n < 0$ 时, 有 $y(n) = 0$ 。

(1) 计算 $x(n) = \delta(n)$ 时, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 的 $y(n)$ 的值;

(2) 计算 $x(n) = u(n)$ 时的 $y(n)$;

(3) 求系统的单位取样响应 $h(n)$;

1.3-7 某离散时间系统的结构如图 E1-2 所示。设:

$$h_1(n) = 4 \times (0.5)^n [u(n) - u(n-3)], \quad h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n), \quad h_4(n) = \delta(n-1), \quad h_5(n) = \delta(n) - 4\delta(n-3)$$

求该系统总的单位取样响应 $h(n)$, 并推导输出 $y(n)$ 和输入 $x(n)$ 之间的关系。

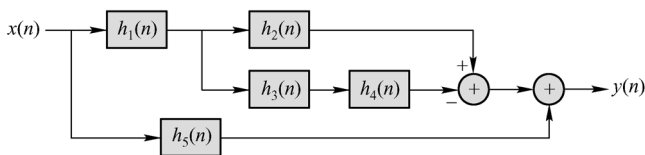


图 E1-2 题 1.3-7 图

1.4 离散时间系统的稳定性和因果性

由上一节可以看到, 线性时不变系统可以通过卷积计算得到系统的输出。但在工程中更为重要的约束条件是系统的稳定性和因果性, 这是保证系统正常运行和物理可实现的重要条件。

1.4.1 离散时间系统的稳定性

定义 若存在一个正数 M , 使得序列 $x(n)$ 满足

$$|x(n)| < M \quad -\infty < n < \infty \quad (1.4-1)$$

则称序列 $x(n)$ 是有界的。

定义 若输入序列有界，则输出序列也是有界的系统称为稳定系统。

稳定系统的这一定义也被称为系统稳定的 BIBO (Bounded Input, Bounded Output) 定义。

实际中，用实验信号测定系统是否稳定时，显然不可能对所有有界输入都检查是否得到有界输出。常用的测定系统稳定性的做法是用单位阶跃序列作为输入信号，如果系统的输出信号随时间 (变量 n) 的增大趋近于常数或零，则该系统一定稳定，否则不稳定。这种方法不必对所有有界输入都进行实验。

定理 一个线性时不变系统是稳定系统的充要条件是，系统的单位取样响应 $h(n)$ 绝对可和，即

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \tag{1.4-2}$$

证明:

充分性：设 $|x(n)|$ 的最大值为 M ，即 $|x(n)| \leq M$ 。

由卷积公式，有 $|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$

单位取样响应 $h(n)$ 绝对可和时，输入序列 $x(n)$ 有界，输出序列 $y(n)$ 也有界，系统稳定。

必要性：用反证法。命题是：当 $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty$ 时，有界输入也有有界输出。

选择有界输入序列为
$$x(n) = \begin{cases} h^*(-n) / |h(-n)| & \text{当 } h(-n) \neq 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } h(-n) = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

式中， $h^*(-n)$ 是 $h(-n)$ 的复共轭，则输出序列 $y(n)$ 中

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(0-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \frac{h^*(k)}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$$

说明虽然是有界输入，但起码输出的 $y(0)$ 是无界的。与命题矛盾。

在已知系统为线性时不变系统时，可以用此定理判断系统是否稳定，否则只能由稳定系统的定义来判断。证明过程也说明线性时不变系统并不一定是稳定系统，这与系统的单位取样响应 $h(n)$ 密切相关。

1.4.2 离散时间系统的因果性

定义 若一个离散系统的输出序列 $y(n)$ ，在 $n = n_0$ 时的序列值 $y(n_0)$ ，只依赖于 $n \leq n_0$ 的输入序列，而与 $n > n_0$ 的输入序列无关，就称此系统为因果系统。

因果系统的当前输出值只和当前、以前的输入和以前的输出值有关。这意味着系统的输出是不可预知的，这样的系统也才是物理可实现的。但是如果不是实时处理，或允许有一定的处理延时，则可把“将来”的输入值存储起来以备调用，此时非因果系统是可以实现的，这也是数字系统优于模拟系统的一个地方。

定义 若有一个序列，当 $n < 0$ 时的序列值全等于零，则称此序列为因果序列。

定理 一个线性时不变系统为因果系统的充要条件是：当 $n < 0$ 时，其单位取样响应 $h(n)$ 的序列值全为零，即 $h(n)$ 为因果序列。

证明:

充分性：当 $n < 0$ 时， $h(n) = 0$ ，则 $k > n_0$ 时， $h(n_0 - k) = 0$ 。

输出序列 $y(n)$ 在 $n = n_0$ 时的取值应为

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k) = \sum_{k=-\infty}^{n_0} x(k)h(n_0 - k) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} x(k)h(n_0 - k) = \sum_{k=-\infty}^{n_0} x(k)h(n_0 - k)$$

说明 $y(n_0)$ 与输入序列 $x(k)$ 的 $k > n_0$ 的序列值无关。

必要性：用反证法。命题是：即使 $n < 0$ 时， $h(n) \neq 0$ ，也是一个因果系统。

输出序列 $y(n)$ 在 $n = n_0$ 时的值为

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n_0} x(k)h(n_0 - k) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} x(k)h(n_0 - k)$$

这时输出 $y(n_0)$ 不但同 $k \leq n_0$ 的输入序列 $x(k)$ 的序列值有关，而且还与输入序列 $x(k)$ 的 $k > n_0$ 的序列值有关，这就同因果系统的定义发生了矛盾。因此定理成立。

定理的使用是有前提的，必须是线性时不变系统，才可以用 $h(n)$ 来判断。否则只能由因果系统的定义来判断。

【例 1.4-1】 设线性时不变系统的单位取样响应序列 $h(n) = a^n u(n)$ ，其中 a 为实常数，试分析该系统的因果性和稳定性。

解：由于 $n < 0$ 时， $h(n) = 0$ ，即 $h(n)$ 是因果序列，所以系统是因果系统。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - |a|^{N+1}}{1 - |a|}$$

只有当 $|a| < 1$ 时，才有 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \frac{1}{1 - |a|}$ ，即 $h(n)$ 是绝对可和的；否则 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \rightarrow \infty$ 。

因此系统稳定的条件是 $|a| < 1$ ；而 $|a| \geq 1$ 时，系统是不稳定的。

课后习题

1.4-1 判别习题 1.3-4 中各系统的因果性和稳定性。

1.4-2 某离散时间 LTI 系统的单位取样响应为 $h(n) = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n-1)$ ，判断该系统是否为因果系统和稳定系统。

1.4-3 判断习题 1.3-6 中的系统是否稳定，并说明原因。

*1.5 离散时间信号的相关分析

在信号处理系统及通信系统中，有时需要比较两个信号序列之间的相似程度，或信号与其移位以后的信号之间的相似程度，并依据这种相似程度所提供的信息进行信号的检测与测量等工作，此时就要利用离散时间信号的相关运算。由于实际应用中，信号多为实信号，因此本节所涉及的离散时间信号均为实信号。

1.5.1 离散时间信号的互相关

设序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 为两个能量有限的离散时间信号，则序列 $x(n)$ 与序列 $y(n)$ 之间的互相关序列定义为

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n-m) \tag{1.5-1}$$

式(1.5-1)表明, $R_{xy}(m)$ 在 m 处的值等于序列 $x(n)$ 不动, 序列 $y(n)$ 右移 m 个单位后, 相乘并求和的结果。 $R_{xy}(m)$ 反映了序列 $x(n)$ 与右移 m 个单位的序列 $y(n)$ 之间的相似程度, 某一 m 处 $R_{xy}(m)$ 的绝对值越大, 相似性就越强。

按照上述的定义, 序列 $y(n)$ 与序列 $x(n)$ 之间的互相关序列定义为

$$R_{yx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)x(n-m) \quad (1.5-2)$$

式(1.5-2)表明, $R_{yx}(m)$ 在 m 处的值等于序列 $y(n)$ 不动, 序列 $x(n)$ 左移 m 个单位后, 相乘并求和的结果。

由式(1.5-1)和式(1.5-2)可以看出, $R_{xy}(m)$ 与 $R_{yx}(m)$ 是不同的, 并可以证明

$$R_{xy}(m) = R_{yx}(-m) \quad (1.5-3)$$

令式(1.5-1)中等号右边的 $n-m=k$, 则式(1.5-1)也可写为

$$R_{xy}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(m+k)y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)y(n) \quad (1.5-4)$$

做序列 $x(m)$ 与序列 $y(-m)$ 之间的线性卷积, 可得

$$x(m) * y(-m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y[-(m-k)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n-m) \quad (1.5-5)$$

对比式(1.5-1)和式(1.5-5)可得

$$R_{xy}(m) = x(m) * y(-m) \quad (1.5-6)$$

式(1.5-6)表明序列相关运算与序列卷积运算之间的关系。

1.5.2 离散时间信号的自相关

式(1.5-1)中, 若序列 $y(n) = x(n)$, 且 $x(n)$ 为能量(有限)信号, 则有

$$R_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n-m) \quad (1.5-7)$$

式(1.5-7)称为序列 $x(n)$ 的自相关运算, 序列 $R_{xx}(m)$ 称为序列 $x(n)$ 的自相关序列, 反映了序列 $x(n)$ 和其自身延迟了 m 个单位后的序列之间的相似程度。

在式(1.5-7)中, 令 $m=0$, 则有

$$R_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \quad (1.5-8)$$

式(1.5-8)表明, $R_{xx}(0)$ 等于信号序列 $x(n)$ 自身的能量。如果 $x(n)$ 不是能量有限信号, 则 $R_{xx}(0) \rightarrow \infty$ 。因此, 对非能量有限, 但功率有限(功率)信号, 其自相关序列定义为

$$R_{xx}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n)x(n-m) \quad (1.5-9)$$

功率信号的典型代表即是周期信号。若 $x(n)$ 是周期为 N 的周期序列, 由式(1.5-9)可得其自相关序列为

$$\begin{aligned} R_{xx}(m) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-N-m) \\ &= R_{xx}(m+N) \end{aligned} \quad (1.5-10)$$

式(1.5-10)表明, 周期序列的自相关序列也是周期序列, 且和原序列具有相同的周期。这样, 在式(1.5-9)中, 无限多个周期的求和平均可以用一个周期的求和平均代替, 即周期序列的自相关序列的定义为

$$R_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m) \quad (1.5-11)$$

除了上述的一些性质外, 自相关序列的主要性质还有:

(1) 若序列 $x(n)$ 是实序列, 则 $R_{xx}(m)$ 为偶函数, 即

$$R_{xx}(m) = R_{xx}(-m) \quad (1.5-12)$$

(2) $R_{xx}(m)$ 在 $m=0$ 时取得最大值, 即

$$R_{xx}(0) \geq R_{xx}(m) \quad (1.5-13)$$

(3) 若 $x(n)$ 是能量信号, 则有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_{xx}(m) = 0 \quad (1.5-14)$$

式(1.5-14)表明, 将能量信号序列 $x(n)$ 相对于其自身移动至无穷远处, 二者就没有相似性了, 这从能量信号的特征不难理解。

最后, 给出有关线性相关运算的几个典型应用实例, 请扫二维码 1-2。



二维码 1-2

课后习题

1.5-1 计算下列信号序列的自相关序列, 并确定自相关序列取得最大值的位置。

(1) $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$ (2) $x(n) = R_N(n)$

1.5-2 计算序列 $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ 的自相关序列, 并确定自相关序列的周期。

电子工业出版社有
版权所有