第 1 章 信息代数的基本概念

信息代数是一种与局部计算密切相关、用于描述信息处理方式的代数结构模型. 本章首先介绍有关赋值代数、信息代数的基本概念，并给出相关实例，包括关系数据库、软集等；其次，为了方便比较信息的“大小”，引入了信息序的概念，研究了其若干性质；最后，介绍了半环及其相关的基本知识，并给出半环诱导的赋值代数和信息代数的概念及其例子. 其余关于信息代数的相关知识可参阅文献[3,5～8].

1.1 基本概念

信息代数分为带标记信息代数和无标记信息代数两类，以下分别给出这两类赋值代数及信息代数的概念，并给出具体例子.

1.1.1 带标记信息代数

以下用大写字母X ,Y,⋯ 来表示变量，符号 Ω_X 表示变量 X的所有可能的取值构成的集合，称为 X的框架，这些集合一般假设都是有限的，用小写字母 s, t, ⋯来表示

由变量构成的集合.对于一个非空有限变量集s，符号 Ω_s 表示集合 s 中的所有变量的框架的笛卡儿积，即

$$\Omega_s = \prod_{X \in s} \Omega_X.$$

若s 为空集，记$\Omega_\emptyset = \{\diamond\}$. Ω_s中的元素用小写字母$x,y,\cdots$来表示，称为具有域为 s的轮廓. 若$x \in \Omega_s$ 且 $t \subseteq s$，用 $x^{\downarrow t}$ 表示 x 在子域t 上的投影. 那么对于任一轮廓$x \in \Omega_s$，可分解为 $x = (x^{\downarrow t}, x^{\downarrow s-t})$.

一般我们可以通过对变量赋值来传达知识或信息，在本理论中称这个基本元素为赋值.赋值是信息代数中最基本的元素，从直观意义上讲，一个赋值表示变量集s 中所有变元的一组可能的取值信息，用小写希腊字母 φ，ψ 等表示. 如果φ是变量集s上的一个赋值，那么称 s 为 φ 的论域，记为$d(\varphi) = s$. 变量集s上的全体赋值之集记为 Φ_s，即

$$\Phi_s = \{\varphi: d(\varphi) = s\}.$$

若变量集为r，那么 r上的全体赋值之集记为

$$\Phi = \bigcup_{s \subseteq r} \Phi_s.$$

首先给出带标记信息代数的概念.

定义 1.1.1[5] 设(Φ, D)是一个具有如下三种运算的二元组，其中$(D, \vee, \wedge)$是一个格，Φ是论域在D上的全体赋值之集.

（1）标记运算：

$$\Phi \to D;\ \varphi \to d(\varphi).$$

（2）联合运算：

$$\Phi \times \Phi \to \Phi;\ (\varphi, \psi) \to \varphi \otimes \psi.$$

（3）投影运算：

$$\Phi \times D \to \Phi;\ (\varphi, t) \to \varphi^{\downarrow t}.$$

若系统(Φ, D)满足如下公理，则称其是一个**带标记的赋值代数**.

（1）半群律：Φ关于联合运算满足交换律与结合律，且对每个$s \in D$，存在一个域为s的单位元e_s，使得$\forall\, \varphi \in \Phi_s$，有$e_s \otimes \varphi = \varphi \otimes e_s = \varphi$.

（2）论域律：$\forall \varphi,\ \psi \in \Phi$，则$d(\varphi \otimes \psi) = d(\varphi) \vee d(\psi)$.

（3）边缘化律：$\forall \varphi \in \Phi$，$t \in D$，若$t \leqslant d(\varphi)$，则$d(\varphi^{\downarrow t}) = t$.

（4）传递律：$\forall \varphi \in \Phi$，若$t \leqslant s \leqslant d(\varphi)$，则$(\varphi^{\downarrow s})^{\downarrow t} = \varphi^{\downarrow t}$.

（5）联合律：$\forall \varphi,\ \psi \in \Phi$，若$d(\varphi) = s$，$d(\psi) = t$，则$(\varphi \otimes \psi)^{\downarrow s} = \varphi \otimes \psi^{\downarrow s \wedge t}$.

（6）单位元律：$\forall s,\ t \in D$，有$e_s \otimes e_t = e_{s \vee t}$.

若上述带标记的赋值代数还满足如下公理：

（7）稳定律：若$s, t \in D$且$t \leqslant s$，则$e_s^{\downarrow t} = e_t$.

（8）幂等律：若$\varphi \in \Phi$，$t \in D$且$t \leqslant d(\varphi)$，则$\varphi \otimes \varphi^{\downarrow t} = \varphi$.

则称(Φ, D)是一个**带标记的信息代数**.

注 1.1.2

（1）在带标记的信息代数中，由稳定律与幂等律可得：

$$e_x \otimes e_y = e_x \otimes e_y \otimes e_{x \vee y} = e_{x \vee y}^{\downarrow x} \otimes e_{x \vee y}^{\downarrow y} \otimes e_{x \vee y} = e_{x \vee y}^{\downarrow x} \otimes e_{x \vee y} = e_{x \vee y}.$$

因此，在一个带标记的信息代数中单位元律可去掉.

（2）带标记信息代数是满足稳定律与幂等律的赋值代数，带标记赋值代数是带标记信息代数的一般化，带标记信息代数是特殊的带标记赋值代数，因此研究带标记赋值代数对于理解带标记信息代数有着密切的关系.

（3）在一个带标记的信息代数中，联合运算与投影运算是处理信息时两种最基本的方式，即信息的合成与局部化，定义中的公理是信息处理时公认的一些原则. 例如，联合律，即当获取到一个新信息时，可以先将这个新信息与给定的信息进行合成，然后再投影到给定信息的论域上，或者先去掉这个新信息中不感兴趣的部分，然后再与给定的信息进行合成；幂等律，即一个信息和它的部分信息进行合成时，不会得到新的信息. 因此，信息代数是一个用于描述信息处理方式的、广泛的对信息进行局部推理计算的代数模型.

带标记的信息代数的系统结构较为广泛，以下给出几个典型实例予以说明.

例 1.1.3　（关系数据库）设$\mathcal{A}$是一组属性之集，对任一属性$\alpha \in \mathcal{A}$，令U_α表示α的所有可能的取值．取$x \subseteq \mathcal{A}$，如果$\forall \alpha \in x$，有$f(\alpha) \in U_\alpha$，则称函数

$$f: x \to \bigcup_{\alpha \in x} U_\alpha$$

是一个定义在x上的x-元组．令E_x表示所有x-元组之集．对任意一个x-元组f，如果$y \subseteq x$，则用$f[y]$表示x元组f在域y上的限制所得的一个y-元组g，即$\forall \alpha \in y$，$g(\alpha) = f(\alpha)$．若$R \subseteq E_x$，则称R是x上的一个关系，记作$d(R) = x$．

对x上的一个关系R和y上的一个关系S，定义联合运算如下：

$$R \bowtie S = \{f \in E_{x \cup y}: f[x] \in R, f[y] \in S\}.$$

如果$y \subseteq d(R)$，定义R在y上的投影运算如下：

$$\pi_y(R) = \{f[y]: f \in R\}.$$

给定一个属性之集$\mathcal{A}$，记$\mathcal{R}$为属性之集$\mathcal{A}$的子集上的全体关系构成的集合，则系统$(\mathcal{R}, \mathcal{A})$关于上面定义的标记运算、联合运算及投影运算构成一个带标记的赋值代数，并且也构成一个带标记的信息代数．对于域为x的关系所组成的集合，E_x为其关于联合运算的单位元．具体证明可参阅文献[5]．

如上例中，考虑关系R_1与R_2，其中$d(R_1) = \{\text{continent, country}\}$，$d(R_2) = \{\text{country, city}\}$，$R_1$与$R_2$分别如表 1.1 与表 1.2 所示．

表 1.1　关系 R_1

continent	country
Asia	China
Asia	Japan
Europe	Germany
Europe	France

表 1.2　关系 R_2

country	city
France	Paris
France	Lyon
Germany	Berlin
Italy	Rome

那么关系R_1与R_2的联合$R_3 = R_1 \bowtie R_2$，以及关系R_3在 country 上的投影$\pi_{\text{country}}(R_3)$分别如表 1.3 与表 1.4 所示．

例 1.1.4　（软集）设U是初始论域，$\mathcal{P}(U)$表示U的幂集．E（称为参数集）是与U中对象有关的所有参数之集．通常，参数是指对象的属性、特征或性质等．称

$(F,\ A)$为一个软集，其中$A \subseteq E$是一个参数集合，F是一个映射

$$F: A \to \mathcal{P}(U).$$

表 1.3　R_1 与 R_2的联合

continent	country	city
Europe	Germany	Berlin
Europe	France	Paris
Europe	France	Lyon

表 1.4　R_3 在 country 上的投影

country
Germany
France

记初始论域U，参数集E上软集的全体为$\mathcal{P}^E(U)$. 在系统$(\mathcal{P}^E(U),\ P(E))$上定义如下三种运算.

（1）标记运算：$\forall (F,\ A) \in \mathcal{P}^E(U)$，$d\big((F,\ A)\big) = A$.

（2）联合运算：$\forall (F,\ A)$，$(G,\ B) \in \mathcal{P}^E(U)$，$(F,\ A) \otimes (G,\ B) = (H,\ C)$；其中$C = A \cup B$，且$\forall e \in C$，则有

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & 若 e \in A - B \\ G(e), & 若 e \in B - A \\ F(e) \cap G(e), & 若 e \in A \cap B \end{cases}.$$

（3）投影运算：$\forall (F,\ A) \in \mathcal{P}^E(U)$，$B \subseteq A$，定义$(F,\ A)^{\downarrow B} = (G,\ B)$，其中$\forall\ e \in B$，有

$$G(e) = F(e).$$

那么$(\mathcal{P}^E(U),\ P(E))$在上述三种运算下构成一个带标记赋值代数，并且也是一个带标记的信息代数. 域为A的任一软集(F, A)，关于联合运算$\otimes$的单位元为$(\Phi,\ A)$. 详情可参阅文献[18].

例 1.1.5　（可能性位势）可能性位势（Possibility Potentials）是由 Zadeh 在 1978 年研究不确定性一个等价的方法时提出的.

设$p: \Omega_s \to [0,1]$，这里 $p(x)$ 表示轮廓 x的可能性程度，称函数 p 为可能性位势. 如果

$$\max_{x \in \Omega_s} p(x) = 1,$$

则称 p是正则的.

令$\Phi=\{p\colon \Omega_s \to [0,1]\}$，$D=\mathcal{P}(r)$，$\mathcal{P}(r)$表示变量集$r$的幂集，在$(\Phi,D)$上，定义如下三种运算.

（1）标记运算：

$$\forall\, p\colon \Omega_s \to [0,1]，d(p)=s.$$

（2）联合运算：如果 $d(p_1)=s$，$d(p_2)=t$，则定义

$$p_1 \otimes p_2(x)=T({p_1}^{\downarrow s},{p_2}^{\downarrow t}).$$

这里 T 为任意 t-模.

（3）投影运算：如果$x\in\Omega_s, y\in\Omega_{s-t}$，则定义

$$p^{\downarrow s}(x)=\max_{y\in\Omega_{s-t}} p(x,y).$$

那么$(\Phi,P(r))$在上述三种运算下构成一个带标记赋值代数，但不一定是一个带标记的信息代数，这与t-模的选取有关. 详情可参阅文献[5].

注 1.1.6　由于t-模的选取多种多样，因此所对应的赋值代数有多种不同具体的表示形式. 最常用的t-模有如下几种形式.

（1）乘积t-模：

$$T(a,b)=ab.$$

（2）Gödel t-模：

$$T(a,b)=\min\{a,b\}.$$

（3）Lukasziewcz t-模：

$$T(a,b)=\max\{0,a+b-1\}.$$

例如，当T选取Gödel t-模时，$(\Phi,P(r))$在上述三种运算下构成一个带标记的信息代数. 但是当T选取另外两种t-模时，$(\Phi,P(r))$不再构成信息代数，这是由于联合运算不保持正则性成立导致的.

引理 1.1.7[5]　设(Φ, D)是一个带标记的信息代数，$\forall\,\varphi,\psi\in\Phi$，$d(\varphi)=x$，$d(\psi)=y$，有下列结论成立.

（1）$(\varphi\otimes\psi)^{\downarrow x\cap y}=\varphi^{\downarrow x\cap y}\otimes\psi^{\downarrow x\cap y}$.

（2）如果$z\subseteq x$，则

$$(\varphi \otimes \psi)^{\downarrow z} = (\varphi \otimes \psi^{\downarrow x \cap y})^{\downarrow z}.$$

（3）如果$x \subseteq z \subseteq x \cup y$，则

$$(\varphi \otimes \psi)^{\downarrow z} = \varphi \otimes \psi^{\downarrow y \cap z}.$$

（4）如果$t \subseteq d(\varphi)$，则

$$\varphi \otimes e_t = \varphi.$$

证明　（1）由传递律与联合律可得

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \psi)^{\downarrow x \cap y} &= (\varphi \otimes \psi^{\downarrow x})^{\downarrow x \cap y} \\ &= (\varphi \otimes \psi^{\downarrow x \cap y})^{\downarrow x \cap y} \\ &= \varphi^{\downarrow x \cap y} \otimes \psi^{\downarrow x \cap y}.\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \psi)^{\downarrow z} &= ((\varphi \otimes \psi)^{\downarrow x})^{\downarrow z} \\ &= (\varphi \otimes \psi^{\downarrow x \cap y})^{\downarrow z}.\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \psi)^{\downarrow z} &= (\varphi \otimes \psi \otimes e_z)^{\downarrow z} \\ &= (\varphi \otimes e_z) \otimes \psi^{\downarrow z \cap y} \\ &= (\varphi \otimes \psi^{\downarrow z \cap y}) \otimes e_z \\ &= \varphi \otimes \psi^{\downarrow z \cap y}.\end{aligned}$$

1.1.2　无标记信息代数

无标记信息代数是带标记信息代数的另一种表示形式，它实际上是带标记信息代数的一种抽象.

定义 1.1.8[5]　设$(D, \vee, \wedge)$是一个格，(Ψ, D)是一个具有如下两种运算的二元组.

（1）联合运算：

$$\Psi \times \Psi \to \Psi; (\varphi, \psi) \to \varphi \otimes \psi.$$

（2）聚焦运算：

$$\Psi \times D \to \Psi; (\psi,\ t) \to \psi^{\Rightarrow t}.$$

若系统 $(\Psi,\ D)$ 满足如下公理，则称其是一个**无标记的赋值代数**.

（1）半群律：Ψ 关于联合运算满足交换律与结合律，且存在单位元e，使得$\forall \psi \in \Psi$，有$e \otimes \psi = \psi \otimes e = \psi$.

（2）传递律：$\forall\, \psi \in \Psi$，$x,\ y \in D$，则$(\psi^{\Rightarrow x})^{\Rightarrow y} = \psi^{\Rightarrow x \wedge y}$.

（3）联合律：$\forall \varphi,\ \psi \in \Psi$，$x \in D$，则$(\varphi^{\Rightarrow x} \otimes \psi)^{\Rightarrow x} = \varphi^{\Rightarrow x} \otimes \psi^{\Rightarrow x}$.

（4）支撑律：若$\psi \in \Psi$，则存在$x \in D$，使得$\psi^{\Rightarrow x} = \psi$.

（5）单位元律：$\forall x \in D$，有$e^{\Rightarrow x} = e$.

若上述无标记的信息代数还满足：

（6）幂等律：若$\psi \in \Psi$，$x \in D$，则$\psi \otimes \psi^{\Rightarrow x} = \psi$.

则称(Ψ, D)是一个**无标记的信息代数**.

例 1.1.9 设变量之集$r = \{X_1,\ X_2, \cdots, X_n\}$，任取$C_1,\ C_2 \in \mathcal{P}(\Omega_r)$，$t \in \mathcal{P}(r)$，其中$\mathcal{P}(\Omega_r)$和 $\mathcal{P}(r)$分别为 Ω_r与变量集 r的幂集，定义联合运算与投影运算如下：

$$C_1 \otimes C_2 = C_1 \cap C_2,$$

$$C_1^{\Rightarrow t} = C_1^{\downarrow t} \times \Omega_{r-t},$$

则 $(\mathcal{P}(\Omega_r),\ \mathcal{P}(r),\ \otimes,\ \Rightarrow)$是一个无标记的赋值代数，并且也构成一个无标记的信息代数.

证明 （1）由上述联合运算的定义可知，$\mathcal{P}(\Omega_r)$关于联合运算满足交换律与结合律，且单位元为Ω_r.

（2）传递律：$\forall C \in \mathcal{P}(\Omega_r)$，$t_1,\ t_2 \in \mathcal{P}(r)$，则

$$\begin{aligned}&(C^{\Rightarrow t_1})^{\Rightarrow t_2}\\&= (C^{\downarrow t_1} \times \Omega_{r-t_1})^{\downarrow t_2} \times \Omega_{r-t_2}\\&= C^{\downarrow t_1 \cap t_2} \times \Omega_{r-t_1 \cap t_2}\\&= C^{\Rightarrow t_1 \cap t_2}.\end{aligned}$$

（3）联合律：$\forall C_1,\ C_2 \in \mathcal{P}(\Omega_r)$，$t \in \mathcal{P}(r)$，则

$$(C_1^{\Rightarrow t} \otimes C_2)^{\Rightarrow t}$$

$$= ((C_1^{\downarrow t} \times \Omega_{r-t}) \cap C_2)^{\downarrow t} \times \Omega_{r-t}$$
$$= ((C_1^{\downarrow t} \cap C_2^{\downarrow t}) \times C_2^{\downarrow r-t})^{\downarrow t} \times \Omega_{r-t}$$
$$= \left(C_1^{\downarrow t} \cap C_2^{\downarrow t}\right) \times \Omega_{r-t}$$
$$= \left(C_1^{\downarrow t} \times \Omega_{r-t}\right) \cap \left(C_2^{\downarrow t} \times \Omega_{r-t}\right)$$
$$= C_1^{\Rightarrow t} \otimes C_2^{\Rightarrow t}.$$

（4）支撑律：若$C \in \mathcal{P}(\Omega_r)$，则

$$C^{\Rightarrow r} = C^{\downarrow r} \times \Omega_{r-r} = C.$$

（5）单位元律：$\forall\, t \in \mathcal{P}(\Omega_r)$，有

$$\Omega_r^{\Rightarrow t} = \Omega_r^{\downarrow t} \times \Omega_{r-t} = \Omega_r.$$

（6）幂等律：$\forall\, C \in \mathcal{P}(\Omega_r)$，$t \in \mathcal{P}(r)$，则

$$C \otimes C^{\Rightarrow t} = C \cap (C^{\downarrow t} \times \Omega_{r-t}) = C.$$

因此，$(\mathcal{P}(\Omega_r),\ \mathcal{P}(r),\ \otimes,\ \Rightarrow)$构成一个无标记的信息代数.

例 1.1.10　在例 1.1.5 中，设$\mathcal{A}$是一组属性之集，取出 $\mathcal{A}$上的所有关系之集$E_{\mathcal{A}}$，对$\mathcal{A}$上的一个关系 R 和 S，定义联合运算与投影运算如下：

$$R \bowtie S = \{f \in E_{\mathcal{A}}: f \in R, f \in S\}$$
$$R^{\Rightarrow y} = \left\{f \in E_{\mathcal{A}}: f[y] \in \pi_y(R)\right\}.$$

则系统$(E_{\mathcal{A}}, \mathcal{P}(\mathcal{A}))$关于上面定义的联合运算及聚焦运算构成一个无标记的赋值代数，并且还满足幂等律，因此$(E_{\mathcal{A}},\ \mathcal{P}(\mathcal{A}))$也是一个无标记的信息代数 [39].

注 1.1.11

（1）由以上定义可以看出，带标记赋值代数与无标记赋值代数的一个主要区别在于系统中是否含有标记论域的运算；带标记赋值代数与无标记信息代数的主要区别在于是否满足幂等律. 也正是如此，带标记信息代数适合具体问题的研究，而无标记信息代数更适合形式理论的研究.

（2）由于这两种类型的赋值代数不难通过上下文加以区分，因此在以下行文中，如果不会引起误解，则统称它们为赋值代数. 类似地，带标记信息代数与无标记信息代数在不会引起歧义的情况下，统称为信息代数.

（3）实际上，在信息代数(Ψ, D)最初的表达形式中，D 为变量集r的幂集格，即$D = \mathcal{P}(r)$. 由于定义中仅涉及集合的交与并运算，且要求集合D关于交与并运算封闭，因此后来在文献[5]中，作者将原来定义中的幂集格一般化为一个包含了赋值的定义域的格.另外，这里的投影运算与其他文献中的边缘化运算是一致的.

1.1.3　两种类型赋值代数间的相互转化

在给出两种类型赋值代数间相互转化前，先给出赋值的扩展与转移的概念.

设(Φ, D)是一个带标记的赋值代数，任取$\varphi \in \Phi$，且有$d(\varphi) = t \leqslant s$，则定义

$$\varphi^{\uparrow s} = \varphi \otimes e_s,$$

称$\varphi^{\uparrow s}$为 φ 在域s上的扩展赋值.

在一个具有稳定律的带标记赋值代数中，关于扩展赋值有以下结论成立.

引理 1.1.12 [5]

（1）如果$s \leqslant t$，则$e_s^{\uparrow t} = e_t$.

（2）如果$d(\varphi) = s$，则$\forall t \in D$，$\varphi \otimes e_t = \varphi^{\uparrow s \vee t}$.

（3）如果$d(\varphi) = s$，则$\varphi^{\uparrow s} = \varphi$.

（4）如果$d(\varphi) = s$，$t \leqslant s$，则$\varphi \otimes e_t = \varphi$.

（5）如果$d(\varphi) = s$，且$s \leqslant t \leqslant r$，则$(\varphi^{\uparrow t})^{\uparrow r} = \varphi^{\uparrow r}$.

（6）如果$d(\varphi) = s$，$d(\psi) = t$，且s，$t \leqslant r$，则$(\varphi \otimes \psi)^{\uparrow r} = \varphi^{\uparrow r} \otimes \psi^{\uparrow r}$.

（7）如果$d(\varphi) = s$，$d(\psi) = t$，且s，$t \leqslant r$，则$\varphi \otimes \psi = \varphi^{\uparrow s \vee t} \otimes \psi^{\uparrow s \vee t}$.

（8）如果$d(\varphi) = s$，则$(\varphi^{\uparrow s \vee t})^{\downarrow t} = (\varphi^{\downarrow s \wedge t})^{\uparrow t}$.

设$(\Phi,\ D)$是一个带标记的赋值代数，任取$\varphi \in \Phi$，且有$d(\varphi) = t$，定义

$$\varphi^{\rightarrow s} = (\varphi^{\uparrow s \vee t})^{\downarrow s},$$

则称 $\varphi^{\rightarrow s}$为φ 在域s上的转移赋值.

在一个带标记的赋值代数中，关于转移赋值有以下结论成立.

引理 1.1.13[5]

（1）如果$d(\varphi)=s$，则$\varphi^{\to s}=\varphi$.

（2）如果$d(\varphi)=s$，t，$s\in z$，则$\varphi^{\to t}=(\varphi^{\uparrow z})^{\downarrow t}$.

（3）如果$d(\varphi)=s$，且$s\leqslant t$，则$\varphi^{\to t}=\varphi^{\uparrow t}$.

（4）如果$d(\varphi)=s$，且$t\leqslant s$，则$\varphi^{\to t}=\varphi^{\downarrow t}$.

（5）如果$s\leqslant t$，则$\varphi^{\to s}=(\varphi^{\to t})^{\to s}$.

（6）如果$\forall s$，t，则$(\varphi^{\to t})^{\to s}=(\varphi^{\to t\wedge s})^{\to s}$.

（7）如果$d(\varphi)=s$，$d(\psi)=t$，则$(\varphi\otimes\psi)^{\to s}=\varphi\otimes\psi^{\to s}$.

证明

（1）$\varphi^{\to s}=(\varphi^{\uparrow s})^{\downarrow s}=(\varphi)^{\downarrow s}=\varphi$.

（2）
$$\begin{aligned}\varphi^{\to s}&=(\varphi^{\uparrow s\vee t})^{\downarrow s}\\&=(((\varphi^{\uparrow s\vee t})^{\uparrow z})^{\downarrow s\vee t})^{\downarrow s}\\&=(\varphi^{\uparrow z})^{\downarrow s}.\end{aligned}$$

（3）$\varphi^{\to t}=(\varphi^{\uparrow t})^{\downarrow t}=\varphi^{\uparrow t}$.

（4）$\varphi^{\to t}=(\varphi^{\uparrow s\vee t})^{\downarrow t}=(\varphi^{\uparrow t})^{\downarrow t}=\varphi^{\downarrow t}$.

（5）设$d(\varphi)=z$，则

$$\begin{aligned}\varphi^{\to s}&=(\varphi^{\uparrow s\vee z})^{\downarrow s}\\&=(((\varphi^{\uparrow s\vee z})^{\downarrow t\vee z})^{\downarrow s\vee z})^{\downarrow s}\\&=(\varphi^{\uparrow t\vee z})^{\downarrow s}\\&=(((\varphi^{\uparrow t\vee z})^{\downarrow t}))^{\downarrow s}\\&=(\varphi^{\to t})^{\to s}.\end{aligned}$$

（6）
$$\begin{aligned}(\varphi^{\to t})^{\to s}&=((\varphi^{\to t})^{\downarrow t\wedge s})^{\uparrow s}\\&=((\varphi^{\to t})^{\to t\wedge s})^{\uparrow s}\\&=(\varphi^{\to t\wedge s})^{\to s}.\end{aligned}$$

（7）
$$\begin{aligned}(\varphi\otimes\psi)^{\to s}&=(\varphi\otimes\psi)^{\downarrow s}\\&=\varphi\otimes\psi^{\downarrow t\wedge s}\end{aligned}$$

$$= \varphi \otimes e_s \otimes \psi^{\downarrow t\wedge s}$$
$$= \varphi \otimes ((\psi)^{\downarrow t\wedge s})^{\uparrow s}$$
$$= \varphi \otimes \psi^{\to s}.$$

在一个具有稳定律的带标记赋值代数(Φ, D)中，$\forall \varphi, \psi \in \Phi$，其中 $d(\varphi) = s$, $d(\psi) = t$，定义

$$\varphi \equiv \psi (\mathrm{mod}\ \theta) \Leftrightarrow \varphi^{\uparrow s\vee t} = \psi^{\uparrow s\vee t},$$

则θ是(Φ, D)上的一个等价关系，而且是(Φ, D)上的一个同余关系，即θ 满足以下几条：

（1）$\varphi \equiv \psi (\mathrm{mod}\ \theta) \Rightarrow d(\varphi) = d(\psi)$；

（2）若$x \leqslant d(\varphi)$，则$\varphi \equiv \psi (\mathrm{mod}\ \theta) \Rightarrow \varphi^{\downarrow x} \equiv \psi^{\downarrow x} (\mathrm{mod}\ \theta)$；

（3）$\varphi_1 \equiv \psi_1 (\mathrm{mod}\ \theta)$，$\varphi_2 \equiv \psi_2 (\mathrm{mod}\ \theta) \Rightarrow \varphi_1 \otimes \varphi_2 \equiv \psi_1 \otimes \psi_2 (\mathrm{mod}\ \theta)$.

那么，在该赋值代数上由上述同余关系 θ 生成的商系统$\left(\frac{\Phi}{\theta}, D\right)$中，定义联合运算与聚焦运算如下：

$$[\varphi]_\theta \otimes [\psi]_\theta = [\varphi \otimes \psi]_\theta,$$
$$[\varphi]_\theta^{\Rightarrow t} = [(\varphi^{\uparrow t\cup d(\varphi)})^{\downarrow t}]_\theta.$$

文献[5]中已证明，系统$\left(\frac{\Phi}{\theta}, D\right)$关于上述两种运算构成一个无标记赋值代数，称$\left(\frac{\Phi}{\theta}, D\right)$为由带标记的赋值代数$(\Phi, D)$ 诱导的无标记赋值代数.

反之，如果(Ψ, D)是一个无标记的赋值代数，取

$$\Phi = \{(\varphi, t): \varphi \in \Psi, \varphi = \varphi^{\Rightarrow t}\}.$$

在(Φ, D)上定义如下三种运算：

（1）论域运算：$\forall (\varphi, s) \in \Phi$，$d(\varphi, s) = s$；

（2）联合运算：$\forall (\varphi, s)$，$(\psi, t) \in \Phi$，$(\varphi, s) \otimes (\psi, t) = (\varphi \otimes \psi, s \vee t)$；

（3）投影运算：$\forall (\varphi, s) \in \Phi$且$t \leqslant s$，$(\varphi, s)^{\downarrow t} = (\varphi^{\Rightarrow t}, t)$.

则(Φ, D)在上述三种运算下构成一个带标记的赋值代数[5]. 也就是说，由一个带标记的赋值代数可以诱导一个无标记的赋值代数，反之由一个无标记的赋值代数也可以诱导一个带标记的赋值代数. 实际上，不仅这两种赋值代数在相互诱导时存在这样的对应关系，而且两种类型的信息代数也可相互转化，即由一个带标记的信息代数可

以诱导一个无标记的信息代数，反之，由一个无标记的信息代数也可以诱导一个带标记的信息代数.详情可参阅文献[5,17,18].

1.2　信息序

在一个无标记信息代数(Ψ,D)中，如果信息ψ是比φ具有更多的信息，则记$\varphi \leqslant \psi$，也就是信息ψ与信息φ融合时，信息ψ不会增加更多的信息，依旧保持不变. 因此在一个信息代数中，定义如下序关系：

$$\varphi \leqslant \psi \Leftrightarrow \varphi \otimes \psi = \psi. \tag{1.1}$$

如果(Ψ,D)是一个无标记信息代数，则上述序关系是Ψ上的一个偏序关系. 事实上，式（1.1）定义的序关系满足以下三条.

（1）自反性：由 $\varphi \otimes \varphi = \varphi \Rightarrow \varphi \leqslant \varphi$ 可得.

（2）反对称性：一方面，$\varphi \leqslant \psi \Rightarrow\Leftrightarrow \varphi \otimes \psi = \psi$，另一方面，$\psi \leqslant \varphi \Rightarrow \psi \otimes \varphi = \varphi$. 因此有$\varphi = \psi$.

（3）传递性：由 $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$及 $\varphi_2 \leqslant \varphi_3$ 可得，$\varphi_1 \otimes \varphi_2 = \varphi_2$及 $\varphi_2 \otimes \varphi_3 = \varphi_3$. 因此，有 $\varphi_1 \otimes \varphi_3 = \varphi_1 \otimes (\varphi_2 \otimes \varphi_3) = (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \otimes \varphi_3 = \varphi_2 \otimes \varphi_3 = \varphi_3$，即 $\varphi_1 \leqslant \varphi_3$.

引理 1.2.1[5]　在一个无标记的信息代数中，有以下结论成立.

（1）$\varphi,\psi \leqslant \varphi \otimes \psi$.

（2）$\varphi \otimes \psi = \sup\{\varphi,\psi\}$.

（3）$\varphi^{\Rightarrow s} \leqslant \varphi$.

（4）如果$\varphi_1 \leqslant \varphi_2$，$\psi_1 \leqslant \psi_2$，则$\varphi_1 \otimes \psi_1 \leqslant \varphi_2 \otimes \psi_2$.

（5）如果$\varphi \leqslant \psi$，则$\varphi^{\Rightarrow s} \leqslant \psi^{\Rightarrow s}$.

（6）如果$s \leqslant t$，则$\varphi^{\Rightarrow s} \leqslant \varphi^{\Rightarrow t}$.

（7）$\varphi^{\Rightarrow s} \otimes \psi^{\Rightarrow s} \leqslant (\varphi \otimes \psi)^{\Rightarrow s}$.

注 1.2.2　在引理 1.2.1 中，结论（2）说明在无标记的信息代数(Φ,D)中，Φ的任一有限集在Φ中都有一个最小上界，即Φ是一个半群，因此有时候也记为

$\varphi \otimes \psi = \varphi \vee \psi$，即两个信息的联合就是这两个信息的并.

与此类似，在一个带标记的信息代数(Φ, D)中，同样定义如式(1.1)的序关系，则它是Φ上的一个偏序关系，且有以下结论成立.

引理 1.2.3 [5]

（1）若$\varphi \leqslant \psi$，则$d(\varphi) \leqslant d(\psi)$.

（2）若$t \leqslant s$，则$e_t \leqslant e_s$.

（3）若$t \leqslant d(\varphi)$，则$e_t \leqslant \varphi$.

（4）$\varphi \leqslant \varphi \otimes \psi$，$\psi \leqslant \varphi \otimes \psi$.

（5）$\varphi \otimes \psi = \sup\{\varphi, \psi\}$.

（6）若$t \leqslant s = d(\varphi)$，则$\varphi^{\downarrow t} \leqslant \varphi$.

（7）若 $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$，$\psi_1 \leqslant \psi_2$，则$\varphi_1 \otimes \psi_1 \leqslant \varphi_2 \otimes \psi_2$.

（8）若$t \leqslant d(\varphi) = s$且$\varphi \leqslant \psi$，则$\varphi^{\downarrow t} \leqslant \psi^{\downarrow t}$.

（9）若$t \leqslant d(\varphi) \wedge d(\psi)$，则 $\varphi^{\downarrow t} \otimes \psi^{\downarrow t} \leqslant (\varphi \otimes \psi)^{\downarrow t}$.

（10）若$t \leqslant d(\varphi) = s$，则$\varphi \leqslant \varphi^{\uparrow s}$.

（11）若$d(\varphi) \leqslant s$，则$\varphi \leqslant \psi \Rightarrow \varphi^{\uparrow s} \leqslant \psi^{\uparrow s}$.

（12）若$t \leqslant s = d(\varphi)$，则$(\varphi^{\downarrow t})^{\uparrow s} \leqslant \varphi$.

注 1.2.4　对于带标记信息代数中的偏序关系，确切地说，不完全表示信息的内容，更是一个专业性概念. 如引理 1.2.3 中的（10），因为$\varphi^{\uparrow s} = \varphi \otimes e_s$，也就是说，信息 $\varphi^{\uparrow s}$是 φ 与空信息 e_s联合，因此它只是改变了信息 φ 的论域，并没有增加任何新信息，因此 $\varphi^{\uparrow s}$与 φ的信息内容是相同的，只是论域不同，但是在带标记信息代数中有$\varphi \leqslant \varphi^{\uparrow s}$.

1.3　半环赋值代数与半环信息代数

在各种赋值代数中，半环诱导赋值代数的实例涵盖了多个领域，因此半环赋值代数扮演着重要的角色. 本节介绍半环的相关概念及半环的相关性质，给出半环赋值

代数与半环信息代数的概念.

1.3.1　半环

定义 1.3.1 [7]　设非空集合 A上有两个二元运算$+$和 $\times$，且元素$0,1\in A$. 若以下条件成立，则称 $(A,+,\times,0,1)$是一个半环.

（1）加法和乘法均满足交换律和结合律.

（2）乘法在加法上满足分配律.

（3）$\forall a\in A$，有$a+0=a$，$a\times 0=0$，称0为A的零元.

（4）$\forall a\in A$，有$a\times 1=a$，称1为单位元.

例 1.3.2　常见半环的一些例子.

（1）布尔半环（Boolean Semiring）

$$(\{0,1\},\ \vee,\ \wedge,\ 0,\ 1).$$

（2）瓶颈半环（Bottleneck Semiring）

$$((-\infty,\ +\infty),\max,\min,-\infty,+\infty).$$

（3）算术半环（Arithmetic Semiring）

$$([0,\infty),+,\times,0,1).$$

（4）热带半环（Tropical Semiring）

$$(\mathrm{N}\cup\infty,\min,+,\infty,0).$$

（5）三角模半环（Triangular Norm Semiring）

$$([0,1],\max,\otimes,0,1)$$

这里$\otimes$是$[0,1]$上的三角模.

若半环A还满足$\forall a\in A$，有$a+1=1$，则称A是一个**约束半环**，或者c-半环 [7].

例 1.3.3　四元菱形格，如图 1.1 所示，是一个半环，且是一个约束半环.

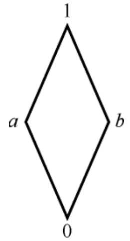

图 1.1　四元菱形格

例 1.3.4　设命题变元之集v上的全体布尔函数$F_v = \{f: B^v \to B\}$，其中$B = \{0, 1\}$，则$(F_v, \max, \min, f_0, f_1)$构成一个半环，并且是一个约束半环，其中$\forall x \in B^v$，有$f_0(x) \equiv 0$，$f_1(x) \equiv 1$.

引理 1.3.5[7]　设A是一个约束半环，则$\forall a, b \in A$，有$a + a = a$，$a \times b + a = a$.

证明　$\forall a \in A$，有

$$\begin{aligned} a + a &= a + a \times 1 \\ &= a \times (1 + 1) \\ &= a \times 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

$\forall a, b \in A$，有

$$\begin{aligned} a \times b + a &= a \times (b + 1) \\ &= a \times 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

在半环A上定义二元关系$\leqslant$：$a \leqslant b \Leftrightarrow a + b = b$，则该二元关系有如下性质.

引理 1.3.6[7]　设A是一个约束半环，则$\forall a, b, a', b' \in A$，有以下结论成立.

（1）二元关系$\leqslant$是A上的一个偏序关系.

（2）$a \times b \leqslant a$.

（3）$a \leqslant a + b$，$a \times b \leqslant a$.

（4）$a + b = \sup\{a,\ b\}$.

（5）若$a \leqslant b$，则有$a + c \leqslant b + c$，$a \times c \leqslant b \times c$.

（6）若$a \leqslant b$，$a' \leqslant b'$，则有$a + a' \leqslant b + b'$，$a \times a' \leqslant b \times b'$.

引理 1.3.7　设A是一个满足乘法幂等的约束半环，则A是一个分配格且有$a + b = \sup\{a, b\}$，$a \times b = \inf\{a, b\}$.

证明　由半环定义及引理 1.3.6 可知，仅需验证$(a + b) \times (a + c) = a + (b \times c)$和$a \times b = \inf\{a, b\}$即可.

由于

$$
\begin{aligned}
&(a + b) \times (a + c) \\
&= a \times (a + b) + c \times (a + b) \\
&= a \times a + a \times b + a \times c + b \times c \\
&= a + a \times (b + c) + b \times c \\
&= a \times \big(1 + (b + c)\big) + b \times c \\
&= a \times 1 + (b \times c) \\
&= a + (b \times c),
\end{aligned}
$$

因此，$(a + b) \times (a + c) = a + (b \times c)$.

下面证明，$a \times b = \inf\{a, b\}$.

由引理 1.3.6 可知，$a \times b$是a，b的一个下界，下面证明$a \times b$是a，b的下界.

设c是a，b的任一个下界，即$c \leqslant a$，$c \leqslant b$，则有

$$
a + c = a,
$$
$$
b + c = b.
$$

因此，有

$$
\begin{aligned}
&a \times b + c \\
&= (a + c) \times (b + c) \\
&= a \times b.
\end{aligned}
$$

因此，$c \leqslant a \times b$.

引理 1.3.8 [9]　设A是一个全序半环，则$\forall a, b \in A$，有$a + b = \max\{a, b\}$.

引理 1.3.9 [9]　设半环A满足：任意的$a, b \in A$，$a \times (a + b) = a$，则半环A关于

加法与乘法运算幂等，即$a+a=a$，$a\times a=a$.

引理 1.3.10 [9] 设A是一个半环，则任意的$a,b\in A$，$a\times(a+b)=a$ 当且仅当A是一个关于乘法运算幂等的约束半环.

1.3.2　半环赋值代数

考虑一个非空变量集 r及一个半环A. 若$s\subseteq r$，则称映射 $\varphi\colon\Omega_s\to A$是域为$s$的一个半环赋值，记 $d(\varphi)=s$. 令$\Phi_s=\{\varphi\colon d(\varphi)=s\}$，所有半环赋值之集记为$\Phi=\bigcup\limits_{s\subseteq r}\Phi_s$. 记 $D=P(r)$，其中 $P(r)$为r的幂集. 在 (Φ,D)上定义如下运算.

（1）联合运算：$\forall\varphi\in\Phi_s$，$\psi\in\Phi_t$及 $x\in\Omega_{s\cup t}$，定义

$$\varphi\otimes\psi(x)=\varphi(x^{\downarrow s})\times\psi(x^{\downarrow t}).$$

（2）投影运算：$\forall\varphi\in\Phi_s$，$x\in\Omega_t$且$t\subseteq s$，定义

$$\varphi^{\downarrow t}(x)=\sum_{y\in\Omega_{s-t}}\varphi(x,y).$$

文献[7]中已证明：系统(Φ,D)在上述运算下构成一个赋值代数，称(Φ,D)是由半环A诱导的赋值代数.

注 1.3.11　一般的半环诱导的信息代数不再满足幂等律，因此它不是一个信息代数. 当这个半环是一个约束半环并且满足乘法幂等，即$a\times a=a$时，这时这个半环诱导的赋值代数是一个信息代数，详情可参阅文献[13]. 下面分别给出半环诱导的赋值代数是信息代数与不是信息代数的两个例子.

例 1.3.12 [5] 指示函数（Indicator Function）.

设r为全体变量之集，$\forall s\subseteq r$，称$i\colon\Omega_s\to\{0,1\}$为$s$上的指示函数，记全体指示函数之集为$\Phi=\{i\colon\Omega_s\to\{0,1\},\ s\subseteq r\}$. 在$(\Phi,D)$上定义如下三种运算.

（1）论域运算：若 $i\colon\Omega_s\to\{0,1\}$，则$d(i)=s$.

（2）联合运算：设i_1，i_2分别为s与t上的指示函数，$\forall x\in\Omega_{s\cup t}$，

$$i_1\otimes i_2(x)=i_1(x^{\downarrow s})i_2(x^{\downarrow t}).$$

（3）投影运算：$\forall x\in\Omega_t$，$t\subseteq s$，

$$i^{\downarrow t}(x) = \max_{y \in \Omega_{s-t}} i(x,\ y).$$

则$(\Phi,\ D)$在上述三种运算下构成一个赋值代数，其中D是r的幂集，即$D = \mathcal{P}(r)$，称这个赋值代数是由布尔半环$\mathbb{B}$诱导的赋值代数，并且$(\Phi,\ D)$还是由布尔半环$\mathbb{B}$诱导的一个满足稳定律与幂等律的信息代数.

例 1.3.13 [5]　概率位势（Probability Potential）.

设$r = \{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\}$为全体变量之集，$\forall s \subseteq r$,$s$上的一个赋值是指

$$p\colon \Omega_s \to R^+ \cup \{0\},$$

如果

$$\sum_{x \in \Omega_s} p(x) = 1,$$

则称这个赋值集是规范的，这实际上对应着一个具体的概率分布.

记$s \subseteq r$上全体这样的赋值之集为

$$\Phi = \{p\colon \Omega_s \to R^+ \cup \{0\}, s \subseteq r\}.$$

在(Φ, D)上定义论域运算与联合运算同例 1.3.12，投影运算定义如下.

投影运算：$\forall x \in \Omega_t$，$t \subseteq s$，

$$p^{\downarrow t}(x) = \sum_{y \in \Omega_{s-t}} p(x, y).$$

则$(\Phi, \mathcal{P}(r))$在上述三种运算下构成一个赋值代数，称这个赋值代数是由加和乘积半环$([0, \infty),\ +,\ \times,\ 0,\ 1)$诱导的赋值代数，其中$s$上的单位元为$e_s(x) = 1$.

在概率位势中，当$t \subseteq s$时，

$$e_s^{\downarrow t} = \sum_{x \in \Omega_{s-t}} e(x) \neq 1,$$

但是

$$e_t(x^{\downarrow t}) = 1.$$

因此(Φ, D)不是一个信息代数.

1.3.3　半环信息代数

由 1.3.2 节可知，一般半环诱导的赋值代数不再构成信息代数，那么什么样的半

环诱导的赋值代数是一个信息代数呢？这样的半环诱导的信息代数有什么样的特征呢？本节来讨论这两个问题.

由 1.3.2 节还可知，一般半环诱导的赋值代数不再满足稳定律与幂等律. 下面几个结论给出，一些特殊半环诱导的赋值代数构成一个信息代数.

假设(Φ,D)是一个由半环A诱导的赋值代数，若半环A满足$1+1=1$，则稳定律成立. 其中，Φ_s关于联合运算的单位元$e_s{:}\,\Omega_s\to A$定义为：$x\in\Omega_s$，$e_s(x)=1$. 因此，约束半环诱导的赋值代数中稳定律一定成立.

定理 1.3.14　若半环A满足任意的$a,b\in A$，$a\times(a+b)=a$，则由半环A诱导的赋值代数是一个信息代数.

证明　这里只需验证稳定律与幂等律即可.

稳定律：若A是一个约束半环，则满足$1+1=1$. 因此稳定率成立.

幂等律：$\forall\varphi\in\Phi$，$d(\varphi)=s$. 若$x\in\Omega_s$且$t\subseteq s$，则

$$
\begin{aligned}
(\varphi\otimes\varphi^{\downarrow t})(x) &= \varphi(x)\times\varphi^{\downarrow t}(x^{\downarrow t})\\
&=\varphi(x)\times\sum_{y\in\Omega_{s-t}}\varphi(x^{\downarrow t},y)\\
&=\varphi(x)\times(\varphi(x)+\sum_{y\in\Omega_{s-t},\,x^{\downarrow s-t}\neq y}\varphi(x^{\downarrow t},y))\\
&=\varphi(x).
\end{aligned}
$$

因此(Φ,D)是一个信息代数.

定理 1.3.15　若半环A是一个关于乘法幂等的约束半环，则由半环A诱导的赋值代数$(\Phi,\ D)$是一个信息代数.

实际上，人工智能中的很多问题的模型都可以看作由一些特殊的半环诱导而得的信息代数，如指示函数、可能性位势等. 以下我们讨论定理 1.3.14 与定理 1.3.15 这种类型的特殊半环诱导的信息代数的特性.

定理 1.3.16[13]　设信息代数(Φ,D)是由满足乘法幂等的约束半环 A 诱导而得的，$\forall\varphi,\psi\in\Phi$，满足 $d(\varphi)=s$，$d(\psi)=t$，则$\varphi\leqslant\psi$当且仅当对任意的$x\in\Omega_t$，$\psi(x)\leqslant\varphi(x^{\downarrow s})$.

定理 1.3.17[13]　设信息代数$(\Phi,\ D)$是由满足乘法幂等的约束半环A诱导而得的，$\forall\varphi,\psi\in\Phi_s$，且赋值$\gamma:\Omega_s\rightarrow A$定义为：对任意的$x\in\Omega_s$，$\gamma(x)=\sup\{\varphi(x),\ \psi(x)\}$，则$\gamma=\varphi\wedge\psi$.

定理 1.3.18[13]　设信息代数$(\Phi,\ D)$是由满足乘法幂等的约束半环A诱导而得的，则$(\Phi,\ \leqslant)$是一个完备格当且仅当A是一个完备格.

1.4　本章小结

信息代数是一种与局部计算密切相关的、用于描述信息处理方式的特殊的代数结构模型. 在信息代数中，系统通过对变量的赋值来表达知识和信息，通过联合运算对信息进行合成，通过投影运算得到在指定变量集上的相关信息，从而完成信息的提取. 因此，联合运算与投影运算是信息代数中最基本的运算，也是该系统的最主要的特征. 本章介绍了信息代数的基本概念、信息序，给出了半环及半环赋值代数与半环信息代数的相关概念，对于每部分内容都结合实例给出了说明.