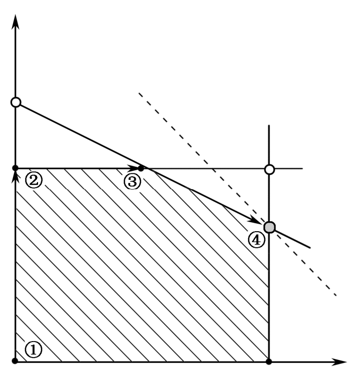
第3章

线性规划与单纯形法



线性规划问题的解空间是一个凸多边形区域，其最优解一定可以在顶点上找到，而单纯形法实质上就是在相邻顶点间进行迭代、逐步求得顶点上最优解的过程。就像一个登山者在一座单峰的山上寻找最高点，其只需要沿着山脊线不断向高处攀爬，就一定能够到达山顶。

Note

人们在生产生活中，经常遇到这类问题：如何使用有限的资源（人力、物力、财力或者时间等）达到一定的目标（具体目标视活动的不同而不同），很多时候还可能要求以最好的效果来达成目标。例如，工厂在一定的原材料约束下进行生产计划，要求获得最大的利润；在交通运输中要安排路线以使货物运输成本最低等。类似问题在军事领域也非常普遍，作战中武器编配方案的选定就是典型的例子，不同类型的武器对一定目标的杀伤效果不同，要合理配备作战单位的武器装备，使其达到最好的作战效果。

对于这样一类“资源使用优化”问题，1939 年，苏联数学家 L. B. 康托洛维奇出版了《生产组织与计划的数学方法》，首次对这类问题进行总结，提出了线性规划问题。1947 年，美国学者 G. B. 丹捷格博士[1]首次提出了现在被广泛使用的线性规划模型及其单纯形求解算法。在这之后，有关理论方法快速发展，在实际应用中日益广泛与深入，取得了巨大成效。特别在电子计算机普通应用之后，计算机已能处理规模庞大的线性规划问题，使得线性规划的适用领域更为广泛，应用范围从解决技术方面的最优化设计拓展到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等各领域。

3.1　线性规划的数学模型

3.1.1　线性规划问题示例

例 3.1.1（弹药使用优化问题）王强所在部队拟组织一次炮兵实弹训练，涉及

[1] 时任美国空军数学顾问的丹捷格（G. B. Dantzig，1914—2005）1947 年首次提出了本章使用的线性规划模型及其单纯形算法。在名词“线性规划”中，“线性”指模型中所有表达式均为线性等式或不等式；“规划”一词本身虽含有“计划”或“筹划”的意思，但在运筹学中更多地指“优化”，即寻找问题更好的答案。

Note

两型炮弹的使用问题。已知负责运输炮弹的可用车辆共 8 台，每辆运输车在可用时间内只能运输Ⅰ型炮弹 1 个基数[1]或Ⅱ型炮弹 0.5 个基数；而每型弹药的可用总量有限，Ⅰ型炮弹可用总量为4个基数，Ⅱ型炮弹可用总量为3个基数（见表3-1-1）。已知两型炮弹的战斗力指数[2]分别为 2 和 3，演习首长要求发挥最大的军事效益，则应该如何安排使用两种型号炮弹的数量，才能使总的战斗力指数最大？

表 3-1-1　弹药使用优化问题中的数据

	Ⅰ	Ⅱ	资源限量
运输车辆	1	2	8
Ⅰ型炮弹	1	0	4
Ⅱ型炮弹	0	1	3
战斗力指数	2	3	

对这类问题可进行如下分析：演习需要就不同型号炮弹的使用数量（称为方案）进行决策，这种决策受到了运输车辆、总量等方面的限制（称为资源限量），而希望获取的战斗力最强（称为目标）。由此，这类问题需要对方案、资源限量和目标这 3 个方面进行分析并建模，表达出相关要素的数量和相互关系。首先，用定量化表达使用炮弹的不同决策方案，设 x_1、x_2 分别表示演习使用两型炮弹的数量，则 (x_1, x_2) 表示不同的方案；其次，对资源限制进行建模，考虑运输车辆的限制，用不等式表达为

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$$

同理，考虑弹药总量的限制，得到不等式：

$$x_1 \leqslant 4$$

$$x_2 \leqslant 3$$

显然，所用炮弹基数必须为非负数，即有

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

最后，考虑目标是达成最大战斗力指数，用 z 表示战斗力指数，得到

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

[1] 弹药基数是弹药供应的一种计算单位，如 1 个基数 120 发等，基数简单好记、便于保密，可以给军事实践活动带来很大方便，不同级别、不同用途时规定的基数不尽相同。

[2] 战斗力指数是对作战力量战斗能力的一种指数化度量，一般通过和某一规定标准进行比较获得。它是对作战单位完成任务能力的简化认识，可根据用途、层级和对象的不同选用不同的战斗力指数。

综合上述分析，弹药使用优化的问题可以用数学模型表达为

$$\text{目标函数：}\quad \max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{约束条件：}\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

对经济活动来说，往往也是运用资源达到一定目的一类的问题，如工厂使用原材料、设备等资源制造不同类型的产品，通过出售产品获取利润。一般性的问题：如何安排生产不同的产品，使得在资源总量受限情况下获利最多？

例 3.1.2（工厂生产优化问题）某工厂拟生产甲、乙两种产品，已知生产每吨产品所需的设备台时[1]及 A、B 两种原材料的消耗，如表 3-1-2 所示，则应该如何安排生产使工厂获利最多？

表 3-1-2　工厂生产优化问题中的数据

	甲	乙	资源限量
设备台时（台时）	1	2	8
原材料 A（吨）	4	0	12
原材料 B（吨）	0	4	
单位利润（万元）	2	3	

类似上面的分析过程，首先，用定量表达出工厂的不同决策方案，可设 x_1、x_2 分别表示工厂安排生产时甲、乙两种产品的产量，则(x_1，x_2)表达不同的方案；其次，考虑目标（获利最多）和设备台时与原材料两类资源的限制，构建工厂优化生产的数学模型[2]为

$$\text{目标函数：}\quad \max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{约束条件：}\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

这个模型和例 3.1.1 中的模型的形式一致，这也意味着，问题虽然来自不同的领域，但本质是一样的。

上面的例子考虑的都是如何获取最大的收益，要求目标函数最大化。有些时

---

[1] 台时指设备、特别多套设备在某一时间段内的工作总时间，如 5 台设备，每台工作 2 小时，计为 10 台时，多用于工业生产中。

[2] 请注意这里模型的形式，其中的符号和书写顺序不仅直观易读，也是一种表达惯例。

候目标函数可能是最小化的形式，表示完成任务的成本或代价最小。

例 3.1.3 （装备编配造价优化问题）某部拟组建一个战斗机编队，按照使命任务要求，编队的总载弹量不能小于 32 个单位，挂载的空空导弹数不小于 48 个单位，现共有 3 种型号的战斗机可供选择，*A* 型、*B* 型与 *C* 型，它们具有的最大载弹量及最大可挂载空空导弹数如表 3-1-3 所示。已知 3 种飞机的造价分别为 9000 万元、6000 万元与 4500 万元，试求出造价最小且能满足任务要求的战斗机编队组建方案。

表 3-1-3　装备编配造价优化问题中的数据

	A 型	*B* 型	*C* 型	要求
载弹量	8	4	2	32
空空导弹数	8	5	4	48
造价（万元）	9000	6000	4500	

同上，对方案、资源限制和目标进行量化表达，设组建能够完成任务的战斗机 *A* 型、*B* 型、*C* 型分别为 x_1、x_2、x_3 架，考虑载弹量和空空导弹数两方面的限制以及目标要求，该问题可用以下数学模型[1]来描述：

$$\min z = 9000x_1 + 6000x_2 + 4500x_3$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 32 \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geqslant 48 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

3.1.2　线性规划模型的形式

对于上面的例子，无论是目标求最大化，还是求最小化，都属于同一类优化问题，它们具有共同的特征：首先，问题本身都需要进行决策，存在需要“优化”的变量；其次，有一定的资源约束，表现为“在哪些方面受到限制？”即有一个或多个方面受到制约；最后，决策本身有明确的目标，表现为“想达成什么目标？”并且目标能够明确地用数量表达出来。如果将一个问题的这几个方面的特征都弄清楚，就可以对问题进行量化，建立数学模型，进行求解、检验并实际应用，这

[1] 严格来说，本模型中变量表示战斗机的架数，应约束其为整数，则该模型将为整数规划模型，该类模型将在本书第 6 章中讨论，这里暂不考虑这一约束（实际上，本模型得到的确实是整数解）。

一过程也就是运筹学研究的工作步骤。模型特征总结如下。

（1）有可选方案，方案集合可用一组变量表示。允许在不同方案间进行选择，可用一组决策变量的所有可能取值表示全体方案集合，而其中一个具体取值就代表一个方案。

（2）存在一定的约束条件，且均可用线性表达式表达。在实际问题中总是存在各类资源约束，如时间、经费、原材料等方面。这里给出的模型要求这样的约束可以用线性等式或线性不等式表达出来。

（3）有一个可以线性表达的优化目标。问题有一个明确的目标，要求最大值或最小值，并且可用决策变量的线性函数（称为目标函数）表达出来。

将具有如上 3 个方面特征的数学模型称为**线性规划模型**。其一般形式为

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{3-1-1}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant)\ b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant)\ b_2 \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant)\ b_m \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}1\text{-}2) \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant (\leqslant) 0，\text{或无约束} \quad (3\text{-}1\text{-}3) \end{cases}$$

在上面的线性规划模型中，式（3-1-1）称为**目标函数**，式（3-1-2）和式（3-1-3）统称为**约束条件**，其中式（3-1-3）中如果变量为大于等于 0 的，也称为变量的**非负约束条件**，有时方便起见，也将式（3-1-2）直接称为约束条件。

线性规划模型中所有表达式必须是线性的！这样的要求对于实际问题来说是否太强了？的确如此，在实际中很多问题可能无法用线性来表达，或者说强行用线性表达，失真太多，以至于求出的解没有实用价值。由此就有“非线性规划”模型的问题，可惜的是，非线性规划模型中除了少数特别的形式（如凸规划）得到了很好的解决，一般模型的求解非常困难，那么在根据实际问题建模的时候，就存在“模型”复杂性和实用性之间的平衡问题，需要研究者在两者之间寻求最好的平衡点，保证模型可以求解，又具有实用价值。

一个有意思的问题：既然线性规划模型求解相对简单，而一般非线性规划模型难以求解，那么能否将后者转化为前者进行求解？当然肯定不是所有的非线性模型都能转化，但若干特殊形式的确是可以转化的，如分式形式、最大值表达、分段线性、可分离乘积等。

Note

3.2 线性规划的图解法

3.2.1 图解法示例

如何求解线性规划问题的模型呢？下面介绍一种基于几何图形的求解方法——图解法，这种方法简单直观，下面举例说明。

例 3.1.1 中的数学模型为

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \qquad\ \ \leqslant 4 \\ \qquad\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{3-2-1}$$

将所有约束条件放到以 x_1、x_2 为坐标轴的直角坐标系中考察，每个约束条件都代表一个“半平面”。所有约束条件限定的区域如图 3-2-1 中的阴影部分，其中每个点（包括边界点）都是这个问题的解（称为可行解），此区域是问题的“解集合”，称为**可行域**。

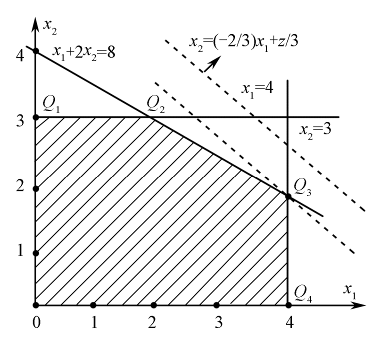


图 3-2-1 例 3.1.1 的图解法示意（唯一最优解在 Q_3 点）

目标函数 $z = 2x_1 + 3x_2$ 在坐标平面上可以表示为以 z 为参数、$-2/3$ 为斜率的一组平行线：$x_2 = (-2/3)x_1 + z/3$。位于同一直线上的点，具有相同的目标函数值，称它为“等线值”。当 z 值由小变大时，直线 $x_2 = (-2/3)x_1 + z/3$ 沿其法线方向向右上方移动。当移动到 Q_3 点时，z 值在可行域边界上实现了最大化，这就得到了

例 3.1.1 的最优解 Q_3，其坐标为（4，2）[1]。于是可以计算出最优目标函数值 $z^*=14$。

由此，该线性规划问题有唯一的最优解，对应例 3.1.1，也就是说应安排使用Ⅰ型炮弹 4 个基数、Ⅱ型炮弹 2 个基数，总的战斗力指数最大为 14。

3.2.2　解的 4 种情况

对于一般线性规划问题，求解结果可能出现以下几种情况：

（1）唯一的最优解，如例 3.1.1。

（2）无穷多最优解（多重解）[2]，将例 3.1.1 中目标函数变为 $\max z = 2x_1 + 4x_2$，则目标函数中以 z 为参数的这组平行直线与约束条件 $x_1 + 2x_2 \leqslant 18$ 的边界线平行。当 z 由小变大时，其将与线段 Q_2Q_3 重合。线段 Q_2Q_3 上的任意一点都使 z 取得相同的最大值，此时线性规划问题有无穷多最优解（也称为多重解，见图 3-2-2）。

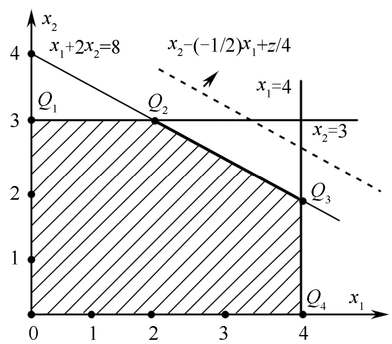


图 3-2-2　多重解示意：线段 Q_2Q_3 上所有点都是最优解

（3）无界解，指线性规划问题的目标函数可以趋向无穷大（求最大化）或者趋向无穷小（求最小化）的情况，如下述线性规划问题：

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用图解法求解如图 3-2-3 所示。可以看出，该问题可行域无界，目标函数值可以增大到无穷，称这种情况为无界解。

---

[1] 想一想，为什么最优解不在 Q_2 或 Q_4 点？

[2] 这里为什么没有说有超过 2 个以上的有限多个最优解呢？

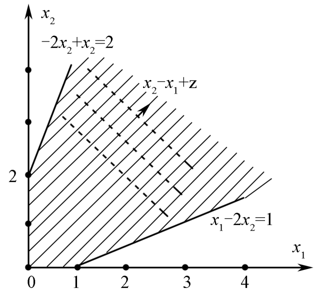


图 3-2-3　无界解示意：可行域是开放区域，且开口朝向目标函数优化的方向

（4）无可行解，如果在例 3.1.1 的数学模型中增加一个约束条件 $x_1+2x_2\geqslant 9$，则该问题的可行域为空集，即无可行解，当然也不存在最优解。

当求解结果出现（3）和（4）两种情况时，一般说明线性规划问题数学模型有问题，要么是没有找到足够的约束条件，要么约束之间存在矛盾，这时需要建模者重新返回到问题分析的步骤中，针对性地重新分析建模。

从图解法中可以直观地看到，当线性规划问题的可行域非空时，它是有界或无界凸多边形；若线性规划问题存在最优解，它一定在可行域的某个顶点得到；若在两个顶点同时得到最优解，则它们连线上的任意一点都是最优解，即有无穷最优解。

图解法虽然直观简便，但是当变量数多于 3 个时，它就无能为力了。下面介绍线性规划的通用求解方法——单纯形法。

3.3　单纯形法的求解思路

3.2 节介绍的图解法显然不是求解线性规划的通用解法。1947 年美国空军从事军队建设规划问题研究的学者丹捷格（G. B. Dantzig）提出了一种通用解法——单纯形法。这一方法建立在统一规定好的线性规划模型“标准形式”之上，并以线性代数中求解线性方程组的“主元消去法”为基础，通过“可行解”之间的不断迭代实现对线性规划问题的求解。下面先说明模型的标准形式，然后介绍单纯形法的基本过程。

本节暂不涉及单纯形法的理论分析（在 3.4 节讨论），也不需要读者有深入的线性代数知识，不过如果读者能够熟悉矩阵的基本概念及线性方程组的求解过程，并且能够跟着书中的例子自己演算，将会大大有助于理解。

3.3.1　数学模型的标准形式

根据 3.2 节的讨论，我们已经知道线性规划模型有各种不同形式。目标函数有的要求最大化，有的要求最小化；约束条件可以是“≤”，也可以是“≥”的不等式，还可以是等式；决策变量一般可以大于 0，也可以小于 0，甚至可以是无约束的。为便于讨论和寻求通用解法，需要将多种形式的数学模型统一变换为一种规范的形式（称为标准形式），本书中规定，满足以下 3 个条件的形式为线性规划数学模型的标准形式[1]。

（1）目标函数最大化。规定目标函数求最大值，若为其他形式，需要进行转化；

（2）约束条件等式化。需要将所有不等式转化为等式，且等式右端项必须为非负数；

（3）决策变量非负化。必须是大于或者等于 0，如果是其他形式，需要转化。

设线性规划模型中变量数为 n 个，非负约束条件共 m 个，标准形式可写为

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

可简写为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0 & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

[1] 可以用别的形式作为标准形式吗？答案是肯定的，标准形式只是一种规定，具体采取何种形式，可以根据使用者的习惯或需要而定，实际上不同的教材中也确实有不同的形式。本书中采取这一形式，此外另一种常见形式是目标函数取最小。不同的形式使求解过程中的若干细节有所不同，但逻辑上都是一致的。

Note

进一步地，可以用向量和矩阵符号表述为

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{3-3-1}$$

或者

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3-3-2}$$

其中，$\boldsymbol{0}$ 为 n 维全 0 的列向量，其他字母含义为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n)$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 称为 $m \times n$ 维**系数矩阵**，一般 $m < n$ 且 m，$n > 0$；$\boldsymbol{b}$ 称为**资源向量**，$\boldsymbol{C}$ 称为**价值向量**，$\boldsymbol{X}$ 称为**决策变量向量**，$\boldsymbol{P}_j$ 称为**系数列向量**。

显然式（3-3-2）的形式更为简洁，书写也更为方便，本书中会大量使用这种形式，但读者需要注意模型中各符号代表向量的含义以及维度。

实际上，线性规划模型的任何一般形式和标准形式是内在统一的，所有一般形式都可以转化为标准形式[1]，具体通过如下 3 个步骤进行。

（1）决策变量非负化：若原模型存在取值为负的变量，通过取负转化为非负变量，若存在无约束的变量如 x_k，可令 $x_k = x_k' - x_k''$，其中 $x_k', x_k'' \geqslant 0$。

（2）约束条件等式化：若原模型约束方程为不等式，若为“$\leqslant$”不等式，可在不等式的左端加入非负松弛变量；若约束方程为“$\geqslant$”不等式，可在不等式的左端减去非负剩余变量（也可称松弛变量）。这样就可以把不等式等价地转化为等式。

（3）目标函数最大化：若原模型目标函数要求实现最小化，形式为 $\min z = \boldsymbol{CX}$，只需要通过两边“取负”变换为目标函数最大化，即令 $z' = -z$，于是 $\max z' = (-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}$。

[1] 这种转化是否完全等价，即线性规划的标准形式与一般形式是一一对应的吗？

Note

下面举例说明这一过程。

例 3.3.1　将下述线性规划问题化为标准型。

$$\min z = -3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 \leqslant 5 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -1 \\ \qquad x_2 + x_3 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解：按照上面的 3 个步骤实施。

（1） x_1 不需转化, 令 $x_2 = -x_2'$， $x_3 = x_3' - x_3''$， 其中 $x_2', x_3', x_3'' \geqslant 0$；

（2）检查所有约束条件的右端项是否存在负数, 发现第二个约束条件右端为负, 该项两边同乘以“−1”, 变换为“≤”。在第一个约束不等式和变换后的第二个约束不等式左端加入松弛变量[1] x_4 和 x_5；在第三个约束不等式≥号的左端减去剩余变量 x_6；

（3）令 $z' = -z$，把求 $\min z$ 改为求 $\max z'$，得到该问题的标准形式如下：

$$\max z' = 3x_1 + 2x_2'$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2' - (x_3' - x_3'') + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2' + (x_3' - x_3'') + x_5 = 1 \\ -x_2' + (x_3' - x_3'') - x_6 = 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2' \geqslant 0,\ x_3' \geqslant 0,\ x_3'' \geqslant 0 \end{cases}$$

在如上操作中，将所有不等式约束转化为等式约束是关键一步，本质是将线性规划的约束条件不等式组变为线性方程组，也就是将线性规划问题的求解转化为在相应的线性方程组的解集中找最优解。

3.3.2　代数法的基本思路

丹捷格给出的通用解法的基础是线性代数中求线性方程组的“主元消去法”，下面以例 3.1.1 中的数学模型为例来说明它的思路。

例 3.1.1 的数学模型为

[1] 在转化后得到的标准形式中，松弛变量的基本含义是原不等式约束两侧的差值，实际可用来标记解相对于可行域的位置，若松弛变量取值为 0，说明解在“边界”上；若松弛变量严格大于 0，说明解在“内部”；而松弛变量小于 0，说明解实际上在可行解集合的“外部”，即不是可行解。

Note

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

先将上面的模型转化所有约束为等式的标准形式，并写为式（3-3-3a）的形式，其中 x_3、x_4、x_5 实质上是不等式左边和右边的差值。

$$z = 0 + 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 4 - x_1 \\ x_5 = 3 - x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{3-3-3a}$$

将 x_1、x_2 看作线性方程组中的自由变量，很自然想到坐标原点 $x_1 = x_2 = 0$，这时有 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}} = (0,0,8,4,3)^{\mathrm{T}}$，得到 x_3、x_4、x_5 的取值分别为 8、4、3，实际上就是全部的资源总量，意思是全部是剩余量，任何资源都没有使用，那么演习使用炮弹的数量实质上均为 0，战斗力指数 $z = 0$。

这自然不是我们想要的，观察目标函数表达式，我们只需要将 x_2 由 0 变为一个正数就可以得到更大的战斗力指数，而且显然 x_2 取值越大，战斗力指数增加越多，但 x_2 显然不能无限大，那么最大取多少呢？为此，我们将所有约束条件表达为 x_2 的表达式，其中第二个约束条件与 x_2 无关，不用考虑。得到

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{8}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= 3 - x_5 \end{aligned} \tag{3-3-3b}$$

这里 $x_1, x_3, x_5 \geqslant 0$，那么 x_2 最大只能取：

$$\min\left\{\frac{8}{2}, 3\right\} = 3 \tag{3-3-3c}$$

相应地有

$$x_2 = 3 - x_5$$

将它代入目标函数中，得到

$$z = 9 + 2x_1 - 3x_5$$

同时也将其代入第一个约束条件中，得到

$$x_3 = 2 - x_1 + 2x_5$$

实际上，这样得到了与式（3-3-3a）等价的模型表达形式，即

Note

$$z = 9 + 2x_1 - 3x_5$$
$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + 2x_5 \\ x_4 = 4 - x_1 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{3-3-4a}$$

在式（3-3-4a）中，取 $x_1 = x_5 = 0$，当 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}} = (0,3,2,4,0)^{\mathrm{T}}$ 时，战斗力指数变为 9。

对比式（3-3-4a）和式（3-3-3a）就会发现，在所有约束条件中，左端将原来的 x_5 换出了，而把 x_2 换入；右端恰好相反，把 x_2 换出，把 x_5 换入。变换操作实际是线性方程组求解中的“主元消去”过程，效果是用 x_2 取代了 x_5 的位置，其他未发生变化。

这时战斗力指数为 9，是否是最大值呢？显然不是，在表达式 $z = 9 + 2x_1 - 3x_5$ 中，如果 x_1 增大，由当前为 0 变成一个正数时，x_5 同时保持为 0，战斗力指数会变得更大。同样地，为了研究 x_1 最多能增大多少，将式（3-3-3a）中的约束条件写成 x_1 的表达式，其中第三个约束条件与 x_1 无关，不用考虑，得到

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + 2x_5 \\ x_1 = 4 - x_4 \end{cases} \tag{3-3-4b}$$

同样，这里要求所有变量均大于等于 0，在 x_5 同时保持为 0 的条件下（x_5 不是要换入的变量，仍让其保持为 0），x_1 最大只能取

$$\min\{2,4\} = 2 \tag{3-3-4c}$$

这时，有

$$x_1 = 2 - x_3 + 2x_5$$

将它代入目标函数 $z = 9 + 2x_1 - 3x_5$ 中，得到

$$z = 13 - 2x_3 + x_5$$

同时也将其代入第二个约束条件中，得到

$$x_4 = 2 + x_3 - 2x_5$$

同上得到了与式（3-3-4a）等价的模型表达形式，即

$$z = 13 - 2x_3 + x_5$$
$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + 2x_5 \\ x_4 = 2 + x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{3-3-5a}$$

在式（3-3-5a）中，当 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}} = (2,3,0,2,0)^{\mathrm{T}}$ 时，战斗力指数变为 13。

Note

对比式（3-3-5a）和式（3-3-4a）会发现，这里是用 x_1 取代 x_3 的位置，其他未发生改变。

这时战斗力指数为 13，是否仍存在更大的战斗力指数呢？答案是肯定的，在表达式 $z=13-2x_3+x_5$ 中，如果 x_5 增大，由当前为 0 变成一个正数时，战斗力指数会变得更大。和上面两步中操作一样，为了研究 x_5 最多能增大多少，将式（3-3-5a）中的约束条件写成 x_5 的表达式，得到

$$\begin{cases} x_5=-1+\dfrac{1}{2}x_3+\dfrac{1}{2}x_1 \\ x_5=1+\dfrac{1}{2}x_3-\dfrac{1}{2}x_4 \\ x_5=3-x_2 \end{cases} \tag{3-3-5b}$$

所有变量仍要求大于等于 0，在让约束等式右端的变量 x_3 同时保持为 0 的条件下，x_5 最大只能取

$$\min\{1,3\}=1 \tag{3-3-5c}$$

注意这里没考虑第一个约束条件，因为该式中由于 x_1 的系数为正，意味着 x_5 只要大于−1 即可，实际对其能取多大的正数没有构成约束，无须考虑。x_5 取最大值 1 时对应有

$$x_5=1+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4$$

同上操作，得到与式（3-3-5a）等价的表达式为

$$z=14-\frac{5}{2}x_3-\frac{1}{8}x_4$$

$$\begin{cases} x_1=4-\dfrac{1}{4}x_4 \\ x_5=4+2x_3-\dfrac{1}{2}x_4 \\ x_2=2-\dfrac{1}{2}x_3+\dfrac{1}{8}x_4 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases} \tag{3-3-6a}$$

在式（3-3-6a）中，当 $x_3=x_4=0$，即 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^{\mathrm{T}}=(4,2,0,0,4)^{\mathrm{T}}$ 时，战斗力指数变为 14。

对比式（3-3-6a）和式（3-3-5a）会发现，这里其实用 x_5 取代了 x_4 的位置，其他未发生改变。

这时目标函数值为 14，是否仍存在更大的目标值呢？显然不可能，因为目标

函数表达式中，只要不是 $x_3 = x_4 = 0$ 的取值组合，必然使得目标函数值更小，所以当前解就是线性规划问题的最优解，也就是说演习应使用 I 型炮弹 4 个基数，I 型炮弹 2 个基数，战斗力指数最大为 14。这与 3.2 节图解法的结论一致。

这样经历 3 步迭代和 4 次表达形式的变化，在式（3-3-6a）中，读者已经能够直接观察出最优解[1]。回顾以上求解过程，可以得到以下结论。

（1）这一过程开始时就将所有不等式约束条件转化为等式，从而可以将变量相互表达出来。

（2）利用变量在目标函数的系数判断目标函数是否可以增大，并利用约束条件给出相应变量的表达形式，计算出变量可以取的最大变化量。

（3）用变量的表达式更新所有约束条件及目标函数表达式，进而在新的表达式中判别目标函数是否可以继续增大，若是，则重复（2）中操作，直到无法使目标函数变大为止。

（4）在更新表示式时，实际上每次确定一个且只有一个新变量来代替一个旧变量，并确保新变量变成了一个正值，同时使得目标函数增大。

显然，这个过程具有通用性，任何线性规划问题都可以如此操作进行求解（尽管变量数或者约束条件很多时，过程很烦琐）。而部分读者可能已经想到，上面的过程非常固定，可以利用表格进行简化计算，更直观，更简洁。而在一个统一规定的表格上遂行如上计算的方法就是求解线性规划的通用代数解法——单纯形法。

3.3.3　单纯形法的基本过程

将上面示例的求解过程进行规范化，并用一个统一的表格表达相关数据和完成计算过程，即**“单纯形法”**（Simplex Method 或 Simplex Algorithm）[2]。总体来说，单纯形法是不同的解之间迭代计算的过程，一般分为 5 步：第 1 步寻找一个初始解，第 2 步构建单纯形表，第 3 步对解是否是最优解进行判别，第 4 步变

---

[1] 请读者自己验算上面的求解过程，并思考这一过程是如何发生的。可以更简便地实现这一计算过程吗？

[2] 单纯形法这个名称来源于“单纯形”的概念，它在拓扑学中指具有一定特征的凸多面体，可以大致看作一维空间中线段、二维空间中三角形、三维空间中四面体这类集合的自然拓展（一般表述为 n 维空间中 n+1 个顶点围成的多面体）。虽然单纯形法并不直接使用这一概念，但线性规划有界的可行域可看作“单纯形”或多个“单纯形”的组合，由此丹捷格听从了一位同事的建议，将这一解法命名为“单纯形法”。

Note

换到一个新解上去（如果第 3 步判别不是最优解），第 5 步在单纯形表中计算出新解的数值，然后返回到第 3 步，反复进行下去，直到得到最优解或达到其他终止条件。

这里用例 3.1.1 说明这个过程，也是重述 3.3.2 节的内容。对于单纯形法中更为复杂情况的处理将在 3.5 节介绍。

例 3.3.2 用单纯形法求解例 3.1.1 中的线性规划问题。

其数学模型为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \qquad\;\; \leqslant 4 \\ \qquad\; x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

第 1 步：找到一个初始解

这一步是通过将数学模型转化为标准形式完成的，对于上面的例子，添加 3 个松弛变量，得到如下的标准形式：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

注意 3 个新变量 x_3、x_4、x_5 的系数列向量为单位向量，按照“主元消去法”的过程，首先考虑这 3 个变量的表达式，在表达式中直接取其他变量 x_1、x_2 为零，这 3 个变量取值就是右端项，得到一个初始解，记为 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}} = (0,0,8,4,3)^{\mathrm{T}}$。

第 2 步：建立单纯形表

为便于计算，使用一种格式规范的计算表，称为单纯形表[1]。下面求解过程均在此表上进行。对于本例，构造初始单纯形表如表 3-3-1 所示。

---

[1] 这里给出的单纯形表形式可能和其他书中的并不完全一样，如在最后一行、最后一列或者 b 列有差异，读者可以完全无视这些差异，因为它们虽然形式不尽相同，但计算过程都是一致的。

Note

表 3-3-1　求解例 3.1.1 的第 1 张单纯形表，对应式（3-3-3a）

c_j			2	3	0	0	0	θ_i
$\boldsymbol{C_B}$	$\boldsymbol{X_B}$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	8	1	2	1	0	0	4
0	x_4	4	1	0	0	1	0	–
0	x_5	3	0	[1]	0	0	1	3
$\sigma_j \to$		0	2	3	0	0	0	

表中其他部分均为标准形式中的相关数据，下面解释最后一行和最后一列。

在最后一行中，***b*** 列对应位置为当前目标函数值，计算方法为

$$z^{(0)} = \sum_{i=1}^{5} c_i x_i^{(0)} = c_1 \times 0 + c_2 \times 0 + c_3 \times b_1 + c_4 \times b_2 + c_5 \times b_3 = 0 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 3 = 0$$

该行其他位置称为各变量的检验数，其中列入表中左侧 $\boldsymbol{C_B}$ 列的变量的检验数为 0（总是为 0），其他变量检验数的计算方法：

$$\sigma_1 = c_1 - (c_3 a_{11} + c_4 a_{21} + c_5 a_{31}) = 2 - (0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 0) = 2$$

$$\sigma_2 = c_2 - (c_3 a_{12} + c_4 a_{22} + c_5 a_{32}) = 3 - (0 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 1) = 3$$

其实，这一步计算，包括“检验数”的计算和上面“主元消去法”过程中的式（3-3-3a）实质上是一样的，各检验数实际上就是式（3-3-3a）中目标函数各变量的系数。

根据计算结果，选取一个检验数为正（很多时候选其中最大的）的变量作为换入变量，如 x_2。

最后一列称为 **θ 准则列**[1]，用来确定下一步需要换出的变量，计算方法是对于已经确定的换入变量 x_2 列的系数，进行如下计算：

$$\theta = \min\left\{\frac{b_1}{a_{12}}, -, \frac{b_3}{a_{32}}\right\} = \min\left\{\frac{8}{2}, -, \frac{3}{1}\right\} = 3$$

其中 x_2 列的系数中如果有负值或 0，则不用参与计算，直接用“－”表示即可。

一般地，表 3-3-1 中各行（列）的含义如表 3-3-2 所示。

[1] 这里 θ 值的计算方法是确保下一步得到的新解仍是可行解，详见 3.4 节。

Note

表 3-3-2 单纯形表中各要素的说明

位　置	名　称	含　义
第 1 行	“价值系数”	填入决策变量在目标函数中的系数
第 2 行	“标识”行	实际的表头，依次填入当前选入变量在目标函数中的系数标识 $\boldsymbol{C_B}$、相应变量标识 $\boldsymbol{X_B}$、约束条件右端项标识 $\boldsymbol{b}$ 及所有变量符号
第 3～m+2 行	“变量取值以及系数矩阵”	左侧 3 列分别写入选入变量的价值系数、变量名以及资源向量取值（实际也是当前基变量取值），并在变量对应位置填入所有约束条件中变量的系数（合称系数矩阵）
最后一行	“检验数”	计算检验数 σ，以此确定一个未选入变量作为换入变量；特别地，$\boldsymbol{b}$ 列对应的这一位置为目标函数当前数值
最后一列	“θ 准则”	计算 θ，以此确定哪个变量作为换出变量

观察上面的过程，可见这一步与式（3-3-3b）和式（3-3-3c）中的计算过程是相同的。

第 3 步：解的判别

判断当前的解是否使得目标函数已经达到最优。查看最后一行检验数的计算结果，如果发现所有检验数均小于等于 0，那么迭代终止（说明目标函数无法再增加）。如发现某个未选入变量检验数大于 0，说明当前解还不是最优解。这里：

$$\sigma_1 = 2 > 0,\quad \sigma_2 = 3 > 0$$

说明迭代还需要进行下去，转入下一步。

第 4 步：解变换

这一步的任务是确定一组新的选入变量，根据 3.3.2 节的思路，每次确定一个变量换入，同时换出一个变量。根据检验数行的计算结果，这里选取一个检验数大的变量作为换入变量，类似式（3-3-3a）中目标函数系数的判定，确定 x_2 为换入变量，进一步计算相应的 θ 值，得到 $\theta = 3$，由此确定 x_5 为换出变量，这样得到一组新变量为 x_3、x_4、x_2。

第 5 步：旋转运算

这一步的任务是计算新变量组的取值，并将变换后得到的新解反映到一个新的单纯形表中。具体做法如下。

首先，在上一步单纯形表的系数矩阵部分确定一个主元素（换入变量对应的

系数列和换出变量对应的系数行交叉处的系数称为**“主元素”**[1])，这里主元素为 $a_{32}=1$，方便起见，在单纯形表中用“[ ]”把这一元素圈出。其次，围绕主元素进行“消去法”计算，单纯形称之为**旋转运算**，使得在主元素所在的列中，主元素位置变为 1，同列中的其他位置变为 0。通过两种运算来达成这一目的：第 1 种运算是将某一行同时乘以某一非零数值，第 2 种运算是将某一行乘以某一数值后加到另一行上去。借助旋转运算就可以等价地把主元素所在的新变量的系数列变为单位列向量，同时不改变其他原有选入变量的系数列向量（仍为单位列向量）。本例中第 3 行主元素位置系数本身就为 1，将该行数值同乘以（−2）然后加到第 1 行上去，得到如表 3-3-3 所示的最后结果。最后，在 X_B 列把新的变量写入（用 x_2 替代 x_5），相应地把 $\boldsymbol{C_B}$ 列价值系数更新，准备重新计算检验数。

得到新的单纯形表如表 3-3-3 所示。

表 3-3-3　求解例 3.1.1 的第 2 张单纯形表，对应于式（3-3-4a）

c_j			2	3	0	0	0	θ_i
$\boldsymbol{C_B}$	$\boldsymbol{X_B}$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	[1]	0	1	0	–2	2
0	x_4	4	1	0	0	1	0	4
3	x_2	3	0	1	0	0	1	–
$\sigma_j \to$		9	2	0	0	0	–3	

可以看到，该表实际上对应于式（3-3-4a）。这时得到新的变量为 $x_3=2$，$x_4=4$，$x_2=3$，记为 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,3,2,4,0)^{\mathrm{T}}$，$z^{(1)}=9$。

对照表 3-3-3、表 3-3-1 和式（3-3-3a）就会发现，实际上新换入的变量 $x_2=3$ 取值就是表 3-3-1 中的 θ，换出变量 x_5 的取值变为 0；而仍留在 X_B 这一组的变量的取值经过一个旋转运算，取值更新了；其他仍为未选入的变量（这里是 x_1）取值保持为 0。

在这样变换完成后，目标函数由 0 变为 9，这一增加量实际上就是 $\theta\sigma=3\times3=9$。

对应于式（3-3-4a）、式（3-3-5a），下面重复第 3 步至第 5 步，直到目标函数再也无法增加为止，具体过程如下。

---

[1] 这里“主元素”类似求解线性方程组或者用“初等行变换”计算矩阵逆中的“主元”，而旋转运算就是“主元消去法”（没有行交换操作）。读者可以对照线性代数中相应内容，找一找两者的区别和联系。