

第 1 章 基本概念



学习目标

通过本章的学习，学生应具备以下能力：

会正确判断周期信号与非周期信号、能量信号与功率信号；

理解常用信号及其物理意义，特别是单位冲激信号与单位阶跃信号；

会正确判断系统的因果性、无记忆性、线性、时不变性、稳定性和可逆性等特性；

熟悉几个常见系统的模型；

熟悉 MATLAB 和 Multisim 仿真的方法。

信号传递消息，系统变换信号。本书讲述的是确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本理论。从概念上可以区分为信号分析与处理及系统分析与设计两个部分，描述的核心问题是：信号在系统中是如何变换的，系统特性对信号有什么影响，以及数字滤波器的分析与设计。将信号分解为不同的基本信号，则对应线性系统的分析方法分别为时域分析、频域分析和复频域（ z 域）分析。

1.1 信号与系统

什么是信号？什么是系统？为什么把这两个概念联系在一起？

首先区分消息、信息和信号这 3 个概念。消息是传输和处理的原始对象，如语言、文字、图像、数据中包含的内容等。信息是传递、交换、存储和提取的抽象内容，能消除某些知识的不确定性，即消息中有意义的内容。信号则是消息的载体，通过信号传递消息。换言之，消息是信息的形式，信息是消息的内容，而信号则是消息的表现形式。**信号定义为表示消息的函数，是消息的载体。**广义上信号是随时间或位置变换的某种物理量。如果该函数只依赖于单个变量，该信号称为一维信号。例如，语音信号是幅度随时间变化的一维信号，与讲话者及讲话内容有关。如果该函数依赖于两个以上的变量，则该信号称为多维信号。例如，图像信号是二维信号，它是水平和垂直两个方向坐标的函数。按物理属性信号分为光信号、声信号和电信号等。按照实际用途信号可分为电视信号、广播信号、雷达信号，通信信号等。信号以各种不同的形式存在于日常生活的方方面面，人们每天都会与各种各样载有信息的信号接触。例如，通过电话用语音信号进行交谈，通过视频信号和音频信号观看电视内容，通过 Internet 所使用的作为信息载体的信号收发邮件、收集资料等。

系统定义为对信号进行处理的物理装置。信号总与一个系统相联系，信号必定是由系统产生、发送、传输与接收的，离开系统没有孤立存在的信号。例如，在语音通信系统中，气流振动声带发出声音，声带就是一个系统。系统的功能是对信号进行加工、变换与处理，不同的系统具有不同的功能。例如，通信系统的功能是通过信道以可靠的方式将载有信息的信号从发送端传输到接收端；控制系统的功能是通过控制器使被控对象达到预定的状态。

通信系统：如图 1.1 所示，通信系统通常包含 3 个基本单元，即发射机、信道和接收机。这 3 个基本单元中的任何一个都可以看成一个与它们各自的信号相联系的子系统。发射机的作用是将信源产生的消息信号转换成适合在信道中传输的发射信号。消息信号可以是语音信号、视频信号或计算机数据。信道是联系发射机和接收机的物理媒介，可以是光纤、同轴电缆、卫星信道、移动电话信道等。受信道物理特性、信道噪声和来自其他信号源的干扰信号的影响，信号在信道中传输会产生失真，会使接收信号与发射信号相比出现畸变。接收机的作用是对接收信号进行处理，得到原始消息信号的估计。

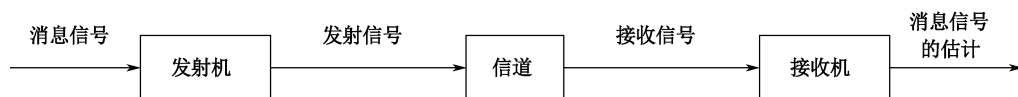


图 1.1 通信系统

发射机和接收机的工作原理取决于具体类型的通信系统。如图 1.2 所示的移动通信系统的发射机部分包括模数/数模转换、数字信号处理（语音编码、信道编码、加密、数字调制）、高频调制发送共 3 个部分。接收机部分过程相反，包括高频解调接收、数字信号处理（解调均衡、解密、信道译码、语音解码）、模数/数模转换等。

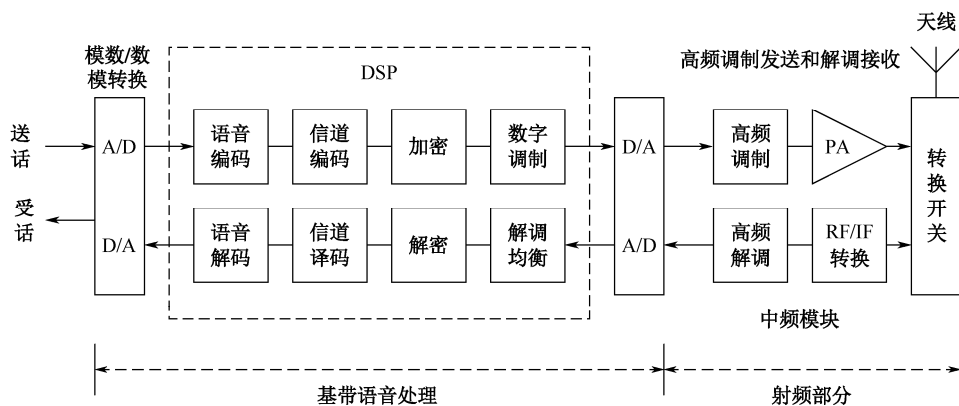


图 1.2 移动通信系统原理示意（手机）

物理世界的信号都是连续的模拟信号，而广泛采用的电子信号处理器如 CPU、DSP、存储器等都是数字的，因此需要将模拟信号转换成 CPU 等可以处理并保存的信号，这个过程称为模数转换（A/D），与之相反的过程称为数模转换（D/A）。模数转换和数模转换的工作原理、采样频率选择等因素将在本书中充分讨论和分析。调制和解调技术是移动通信系统必须采用的，本书将讲解其基本原理。

控制系统：以反馈系统理论为基础的自动控制技术在自动驾驶、地铁、机床、机器人等工业和军事领域都有广泛的应用。如图 1.3 所示，典型的反馈控制系统由控制器、受控装置和传感器构成。图中， $s(t)$ 表示外部干扰， $y(t)$ 表示控制或跟踪系统的输出信号，它与参考输入信号 $x(t)$ 比较得到误差信号 $e(t)$ ，这个误差信号作用于控制器产生信号 $v(t)$ ，使受控装置完成控制动作。例如，在飞机着陆系统中，受控装置是飞机机体和驾驶执行装置，导向器利用传感器确定飞机的横向位置，控制器是机载计算机；在汽车的自适应巡航系统中，受控装置是汽车车体和油门控制装置，利用雷达传感器或激光扫描仪确定前方车辆的距离，控制器是车载计算机。本书将讨论线性反馈系统的基本特性及其对系统性能的改变。

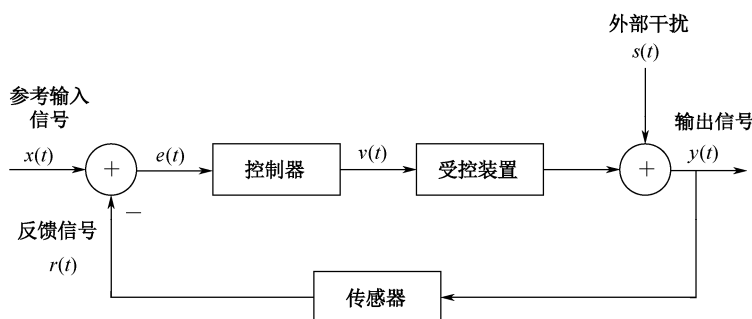


图 1.3 反馈控制系统

上述信号与系统的关系可以简化为如图 1.4 所示的系统输入与输出关系。输入信号称为**系统激励**，输出信号称为**系统响应**。它广泛地存在于各种工程和科学领域，因此信号与系统的概念、理论和方法成为许多科学和工程领域最基本的概念和方法之一。本书讲述的就是信号分析与处理及系统分析与设计两个部分的问题，从连续和离散两个方面介绍连续时间信号与系统及离散时间信号与系统的表示方法、系统分析和工程应用。

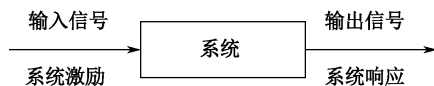


图 1.4 系统输入与输出关系

1.2 信号的分类

本书重点关注定义为时间的单值函数的一维信号。“单值”是指在任意时刻只有一个函数值，这个数值可以是实数也可以是复数，对应的信号称为实信号和复信号。

信号的分类方法视信号和自变量的特性而定，按不同的特点通常分为确定信号与随机信号、连续时间信号与离散时间信号、偶信号与奇信号、周期信号与非周期信号、能量信号与功率信号等。

1.2.1 确定信号与随机信号

确定信号是指能够以确定的时间函数表示的信号，如图 1.5 所示的周期方波信号 $G(t)$ 和方波脉冲信号（俗称门信号） $G_r(t)$ 都是确定信号。**随机信号**是指不能以确定的时间函数表示的信号，其在定义域内的任何时刻都没有确定的函数值。随机信号可以看作属于一个信号集，信号集中的每个信号具有不同的波形。如图 1.6 所示的噪声信号是随机信号的一个样本，雷电干扰信号、无线电通信系统的接收信号、脑波信号等都是随机信号。

注：本书后续章节均用符号 $G(t)$ 表示周期方波信号，用符号 $G_r(t)$ 表示方波脉冲信号。

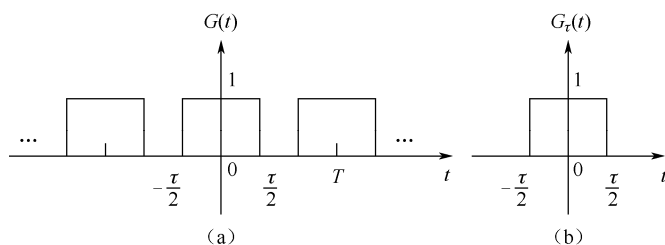


图 1.5 确定信号

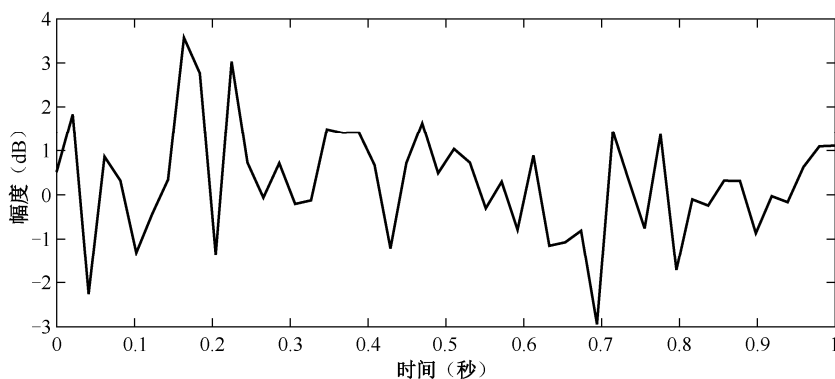


图 1.6 随机信号的一个样本——噪声信号

1.2.2 连续时间信号与离散时间信号

在信号的定义区间内除有限个间断点外，任意时刻都有确定函数值的信号称为**连续时间信号**。这里“连续”的含义是定义域时间是连续的，值域可连续也可不连续，通常用记号 $x(t)$ 表示。反之，**离散时间信号**只在某些离散时刻有定义，一般通过对一个连续时间信号进行等间隔抽样得到离散时间信号。若用 T 表示抽样周期， n 表示整数，则在时刻 $t = nT$ ，对一个连续时间信号 $x(t)$ 进行抽样将得到抽样值 $x(nT)$ ，记为

$$x[n] = x(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1)$$

因此，离散时间信号由一串顺序排列的数值 $\dots x[-2]$ 、 $x[-1]$ 、 $x[0]$ 、 $x[1]$ 、 $x[2]$ \dots 来表示，该顺序排列的数值称为一个时间序列，记为 $\{x[n], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ，用记号 $x[n]$ 表

示。在图 1.7 中，左图为连续时间信号 $x(t) = \text{Sa}(t)$ ，右图为经抽样得到的离散时间信号 $x[n] = \text{Sa}(2n)$ 。

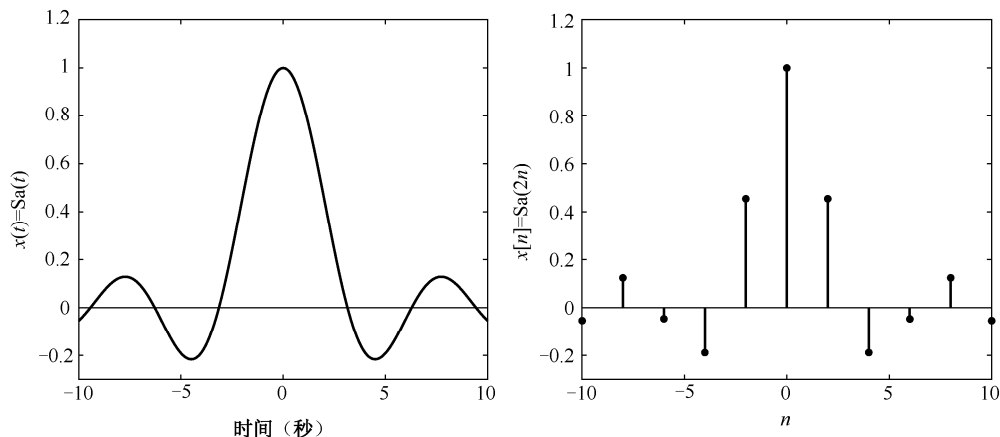


图 1.7 连续时间信号与离散时间信号

在图 1.7 中，左图所示连续时间信号称为抽样信号，一般记为 $\text{Sa}(t)$ ， $\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$ 。抽样信号在 MATLAB 中可用 $\text{sinc}(\cdot)$ 函数表示， $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ 。因此，如图 1.7 所示信号的 MATLAB 表示如下。

```
%figure1.7
t=-10:0.1:10;
x = sinc(t./pi);
subplot(1,2,1);
plot(t,x,'k-')
hold on
plot([-10 10],[0 0],'k')
axis([-10 10 -0.3 1.2]);
xlabel('时间(秒)')
ylabel('x(t)=Sa(t)')

n=-10:2:10;
x = sinc(n./pi);
subplot(1,2,2)
stem(n,x,'filled','-k')
axis([-10 10 -0.3 1.2]);
xlabel('n')
ylabel('x[n]=Sa(2n)')
```

抽样信号具有以下性质：

$$\text{Sa}(0) = 1$$

$$\text{Sa}(k\pi) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

本书始终用 t 表示连续时间信号的时间，用 n 表示离散时间信号的时间。相应地，用圆括号 (\cdot) 表示括号内的量取连续值，用方括号 $[\cdot]$ 表示括号内的量取离散值。

如果信号 $x[n]$ 的值均取自具有 N 个实数元素的集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ ，则称 $x[n]$ 为**数字信号**。因为数字信号只有有限个不同的数值，因此由抽样得到的离散时间信号不一定是数字信号。

1.2.3 偶信号与奇信号

如果一个连续时间信号 $x(t)$ 满足

$$x(-t) = x(t) \quad (1.2)$$

对所有的 t 都成立，则称该信号为**偶信号**。如果一个连续时间信号 $x(t)$ 满足

$$x(-t) = -x(t) \quad (1.3)$$

对所有的 t 都成立，则称该信号为**奇信号**。

若一个连续时间信号 $x(t)$ 为复信号，且满足

$$x(-t) = x^*(t) \quad (1.4)$$

则称该复信号为**共轭对称信号**。这里符号“ $*$ ”表示复共轭，即若 $x(t) = a(t) + jb(t)$ ，则 $x^*(t) = a(t) - jb(t)$ 。

根据式 (1.4)，有

$$x(-t) = a(-t) + jb(-t) = a(t) - jb(t) = x^*(t)$$

比较实部和虚部可得， $a(-t) = a(t)$ ， $b(-t) = -b(t)$ ，即**复信号为共轭对称信号需要满足该信号的实部为偶函数，虚部为奇函数**。

1.2.4 周期信号与非周期信号

在定义区间 $(-\infty, \infty)$ 内，每隔一定相同时间，按相同规律重复变化的信号称为**周期信号**。从数学上定义为对所有 t 满足

$$x(t) = x(t + mT), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.5)$$

或所有 n 满足

$$x[n] = x[n + mN], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

的信号分别为连续时间周期信号和离散时间周期信号。满足式 (1.5) 和式 (1.6) 的最小 T 和 N 称为信号的基本周期。不满足上述定义的信号称为非周期信号。

基本周期 T 表示信号 $x(t)$ 完成一个完整循环所需要的时间，单位为秒 (s)。基本周期的倒数 $f = 1/T$ 称为周期信号 $x(t)$ 的基本频率，表示周期信号重复快慢，单位为赫兹 (Hz)。由于一个完整循环对应 2π 弧度，用下式定义**角频率**，即

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1.7)$$

角频率 ω 的单位是弧度/秒 (rad/s)。在不引起混淆的情况下，本书直接将 ω 简称为频率。对应地，可定义离散周期信号 $x[n]$ 的角频率 (简称为频率) 为

$$\Omega = \frac{2\pi}{N} \quad (1.8)$$

角频率 Ω 的单位为弧度。

如图 1.5 (a) 所示的信号是周期为 T 、幅度为 1 的连续时间周期信号，今后将该信号称为占空比是 τ/T 的周期方波信号，约定用固定符号 $G(t)$ 表示。

众所周知，三角信号 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ ($-\infty < t < \infty$) 为周期信号，周期为 $T = 2\pi/\omega_0$ 。对该信号进行采样可得离散余弦信号 $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta)$ ，如图 1.8 所示，分别对周期信号 $x(t) = \cos(t/3)$ 和 $x(t) = \cos(\pi t/3)$ 进行采样，左图为离散时间非周期信号，右图为离散时间周期信号，周期 $N = 6$ 。

离散余弦信号 $x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \theta)$ 为周期信号的条件是 $\Omega_0/2\pi$ 为有理数，即可以表示为两个整数的比值。

证明：假设 $x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \theta)$ 为周期信号，周期为正整数 N ，则根据定义满足

$$x[n] = x[n + N]$$

即 $A \cos(\Omega_0 n + \theta) = A \cos[\Omega_0(n + N) + \theta]$ 。因此，存在整数 q ，满足 $\Omega_0 N = 2\pi q$ ，所以 $\Omega_0/2\pi = q/N$ 为有理数。

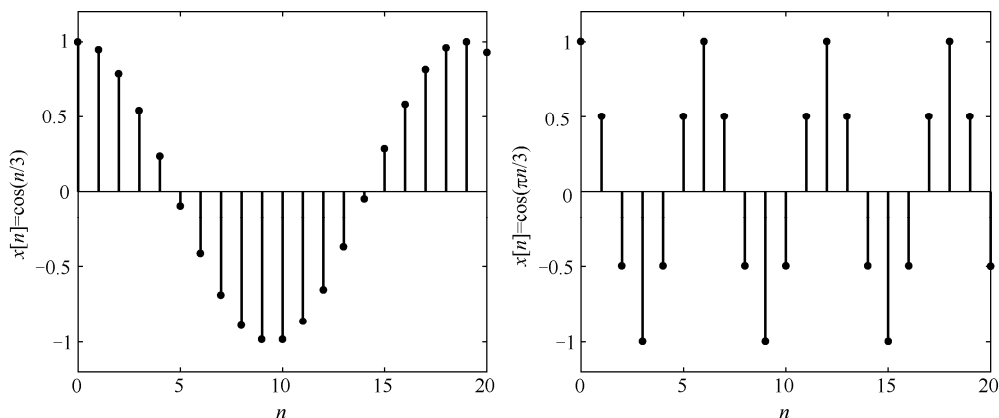


图 1.8 离散时间非周期信号与离散时间周期信号

两个周期分别为 T_1 和 T_2 的连续时间信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ ，其和信号 $x_1(t) + x_2(t)$ 仍为周期信号的充要条件是 T_1/T_2 为有理数，且周期 $T = [T_1, T_2]$ 。

证明：若 T_1/T_2 为有理数，则存在两个互素的整数 q 和 r ，满足 $T_1/T_2 = q/r$ ，则 $T = rT_1 = qT_2$ ，故

$$x_1(t + T) + x_2(t + T) = x_1(t + rT_1) + x_2(t + qT_2) = x_1(t) + x_2(t)$$

所以，和信号 $x_1(t) + x_2(t)$ 为周期信号。

若 $x_1(t) + x_2(t)$ 为周期信号，则存在周期 T ，满足

$$x_1(t + T) + x_2(t + T) = x_1(t) + x_2(t) = x_1(t + T_1) + x_2(t + T_2)$$

因此， T_1 整除 T ， T_2 整除 T 。设 $T = rT_1 = qT_2$ ，所以 $T_1/T_2 = q/r$ 为有理数，且 $T = [T_1, T_2]$ 。

例 1.1 确定下列信号是否为周期信号。如果是，则写出其基本周期。

(a) $x(t) = \cos^2(t)$;

(b) $x[n] = (-1)^{n^2}$;

(c) $x[n] = \cos(2n)$;

(d) $x[n] = \cos(2\pi n)$;

(e) $x(t) = \cos(2t) + \cos(\pi t)$;

(f) $x(t) = \cos(2\pi t) + \cos(\pi t)$ 。

解: (a) 因为

$$x(t) = \cos^2(t) = \frac{\cos(2t) + 1}{2}$$

因此，其是周期信号，基本周期为 π 。

(b) 因为

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

因此，其是周期信号，基本周期为 2。

(c) 非周期信号。

(d) 周期信号，基本周期为 1。

(e) 非周期信号。

(f) 周期信号，基本周期为 2。

笔记:

1.2.5 能量信号与功率信号

在电系统中，信号可以代表电压或电流，将电压 $v(t)$ 施加于 1 欧姆电阻上，产生的电流为 $i(t) = v(t)$ ，则消耗在电阻上的瞬时功率为

$$p(t) = v(t)i(t) = v^2(t) = i^2(t)$$

即无论一个信号 $x(t)$ 是代表电压还是电流，都可以将瞬时功率表示为 $p(t) = x^2(t)$ 。在区间 $(-\infty, \infty)$ 总能量和平均功率定义如下。

连续时间信号：

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (1.9)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.10)$$

若 $x(t)$ 为周期信号，且基本周期为 T ，则 $x(t)$ 的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.11)$$

离散时间信号：

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] \quad (1.12)$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2[n] \quad (1.13)$$

若 $x[n]$ 为周期信号，且基本周期为 N ，则 $x[n]$ 的平均功率为

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad (1.14)$$

能量有限、功率为零的信号称为**能量信号**，功率有限、能量无穷大的信号称为**功率信号**。能量信号因为其能量有限，在无穷大的时间区间内平均功率一定为零，所以对它无法从平均功率去考察；而功率信号在无穷大的时间区间内的总能量一定为无穷大，因而无法从总能量去考察。

一个信号不可能既是能量信号又是功率信号；

一个信号可能既不是能量信号，也不是功率信号。

例 1.2 判断下列信号是能量信号，还是功率信号。

(a) $x(t) = e^{-t}$ ；

(b) $x(t) = 5 \cos(\pi t) + \sin(5\pi t)$ ；

(c) $x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ；

(d) $x[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n, n \geq 0$ ；

(e) $x[n] = \begin{cases} \cos(\pi n), & -2 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ；

(f) $x[n] = \begin{cases} \cos(\pi n), & n \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

解：

(a) 既不是功率信号，也不是能量信号。

(b) $x(t)$ 是周期信号，所以为功率信号。

(c) 功率信号， $P = 0.5$ 。

(d) 能量信号， $E = 25/9$ 。

(e) 能量信号， $E = 5$ 。

(f) 功率信号， $P = 0.5$ 。

 笔记：

1.3 信号运算

信号的运算包括对因变量的运算和对自变量的运算两种类型。表 1.1 列出了 5 种（幅度变换、加法、乘法、微分/差分、积分/求和）对因变量的运算和 3 种（时移、尺度变换和反折）对自变量的运算。这些运算都具有鲜明的实际物理背景。例如，加法常用于信号传输过程中的干扰和噪声叠加；乘法常用于调制、解调、混频等；延时用于雷达的反射信号、多径传输的不同路径信号等；尺度变换常用于音频的快放和慢放等。在后面介绍各种变换的性质时，也需要运用这里的基本概念。

表 1.1 信号的基本运算

运 算	表 达 式
幅度变换	$y(t) = cx(t)$
	$y[n] = cx[n]$
加法	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$
	$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$
乘法	$y(t) = x_1(t)x_2(t)$
	$y(t) = x_1[n]x_2[n]$
微分	$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ ，记为 $y(t) = x'(t)$
积分	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$
时移	$y(t) = x(t - t_0)$ ，当 $t_0 > 0$ 时，表示信号延迟（右移）；当 $t_0 < 0$ 时，表示信号提前（左移）
	$y[n] = x[n - m]$
尺度变换	$y(t) = x(at)$ ，当 $a > 1$ 时，表示线性压缩；当 $0 < a < 1$ 时，表示线性扩展
	$y[n] = x[kn]$ ， k 取正整数
反折	$y(t) = x(-t)$
	$y[n] = x[-n]$
差分	$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$ ，后向差分
	$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$ ，前向差分
求和	$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

连续时间信号在断点 t_0 （不连续点）处存在跳变。若 $t_0^+ - t_0^-$ 为正值，称为正跳变；反之，若 $t_0^+ - t_0^-$ 为负值，称为负跳变。根据微分的定义，函数在不连续时不可微。然而，在这里仍然是存在微分的，称为广义微分。广义微分将在引入单位冲激信号 $\delta(t)$ 后加以介绍。

对离散时间信号的尺度变换 $x[kn]$ ，当 $k > 1$ 时，只能保留原信号 $x[n]$ 在 k 的整数倍时刻点的信号值，其余的信号值均被丢弃了。

当信号的变换出现时移、尺度和反折 3 种运算时，波形分析可以分步进行，次序可以有不同的选择，但结果应完全相同。无论采用何种次序都应相对于自变量 t 而言，否则就会出现错误。

例 1.3 求下列信号的运算。

$$(a) y(t) = G_2(-2t-3);$$

$$(b) x[n] = \begin{cases} 1, & n = -1, -2 \\ -1, & n = -1, 2 \\ 0, & n = 0, |n| > 2 \end{cases};$$

$$y_1[n] = x[n] + x[-n], \quad y_2[n] = x[2n+3];$$

$$(c) x[n] = \begin{cases} 1, & n = -1, 0, 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad \text{求 } y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k].$$

解: (a) 由

$$G_2(t) \rightarrow v(t) = G_2(t-3) \rightarrow y(-t) = v(2t)$$

可得

$$y(t) = G_1(t+1.5)$$

即 $y(t)$ 是宽度为 1、中心点为 -1.5 的方波脉冲信号。这种顺序时移不变。

或者由

$$y(t) = G_2(-2t-3) = G_2(-2(t+3/2))$$

先进行尺度变换得到 $v(t) = G_2(-2t)$ ，再进行时移变换得到 $y(t) = v(t+3/2)$ ，此时时移发生了改变。

(b) 根据信号 $x[n]$ 的定义可知

$$y_1[n] = x[n] + x[-n] = 0$$

由

$$x[n] \rightarrow v[n] = x[n+3] \rightarrow y_2[n] = v[2n]$$

可得

$$y_2[n] = \begin{cases} 1, & n = -1 \\ -1, & n = 1 \end{cases}$$

可见丢失了两个样本点。

$$(c) y[n] = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 1, & n = -1 \\ 2, & n = 0 \\ 3, & n \geq 1 \end{cases}.$$

 笔记:

信号的反折、时移和尺度变换只是函数自变量的简单变换，变换前后信号端点的函数值不变。因此，可以通过端点函数值的不变来确定信号变换前后其图形中各端点的位置。

设变换前后的信号为 $x(mt+n)$ 和 $x(at+b)$ ， t_1 和 t_2 为信号 $x(mt+n)$ 的两个端点坐标， t_{11} 和 t_{22} 为信号 $x(at+b)$ 的对应端点坐标，由于信号变换前后的端点函数值不变，即

$$x(mt_1+n) = x(at_{11}+b)$$

$$x(mt_2+n) = x(at_{22}+b)$$

所以

$$mt_1 + n = at_{11} + b$$

$$mt_2 + n = at_{22} + b$$

由此可以求出变换后信号的端点位置。在例 1.3 (a) 中, 信号 $G_2(t)$ 有两个端点, 分别为 -1 和 1 , 所以变换 $y(t) = G_2(-2t - 3)$ 的对应端点为

$$-1 = -2t_{11} - 3, t_{11} = -1$$

$$1 = -2t_{22} - 3, t_{22} = -2$$

由此也可得 $y(t) = G_1(t + 1.5)$ 。

连续时间信号在不连续点处仍然存在微分 (见 1.4 节);

当 $k > 1$ 时, 离散时间信号的尺度变换 $y[n] = x[kn]$ 会丢失一些样本点;

当既有时移又有尺度变换时, 先进行时移, 再进行尺度变换, 此时时移应不变。

1.4 常见信号

1.4.1 指数信号

连续时间指数信号的表达式为

$$x(t) = Be^{\alpha t} \quad (1.15)$$

式中, 若 B 和 α 均为实数, 则称为实指数信号, 此时 $\alpha > 0$ 为指数增长信号, $\alpha < 0$ 为指数衰减信号, $\alpha = 0$ 简化为直流信号; 若 α 为复数, 则称为复指数信号。常见的复指数信号为 $e^{j\omega t}$ 。

指数信号的物理原型是如图 1.9 所示的无源 RC 电路。将电池接到电容两端进行充电, 假定在 $t = 0$ 时刻移走电池, 用 V_0 表示电容两端的初始电压, 则当 $t \geq 0$ 时电容两端电压的变化由下列方程描述, 即

$$RC \frac{d}{dt} v(t) + v(t) = 0 \quad (1.16)$$

式中, $v(t)$ 为电容两端的电压, 用 $v'(t)$ 表示 $v(t)$ 的微分。式 (1.16) 的解为

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (1.17)$$

式 (1.17) 表明电容器两端的电压随时间指数衰减, 衰减的速度取决于时间常数 RC 。电阻 R 越大, $v(t)$ 的衰减速度越慢。如图 1.10 所示为当 $V_0 = 1$ 且 $C = 1$ 时的指数信号。

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$$

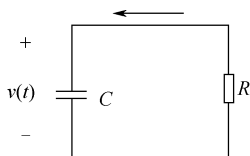


图 1.9 指数信号的物理原型

MATLAB 可以用 $\exp(\cdot)$ 函数产生指数信号。如图 1.10 所示信号的 MATLAB 表示如下。

```
%figure1.10
t=0:0.1:8;
x = exp(-t);
y = exp(-0.2*t);
plot(t,x,'-k',t,y,'-.k','linewidth',1)
axis([0 8 0 1.2]);
xlabel('时间(秒)')
ylabel('指数信号')
legend('R=1','R=5')
```

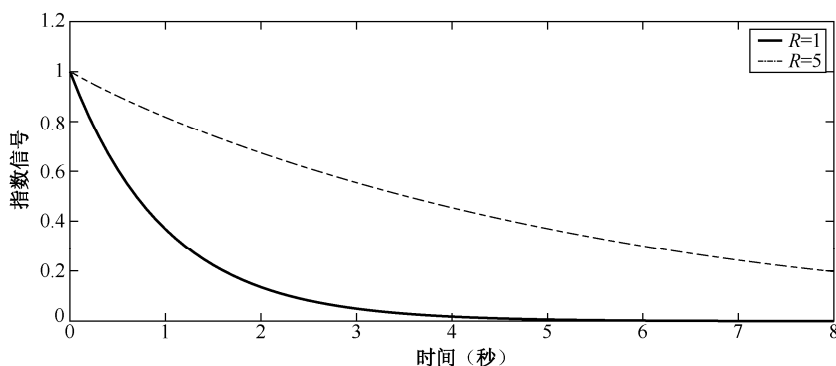


图 1.10 指数信号

离散时间指数信号的表达式为

$$x[n] = Br^n \quad (1.18)$$

式中，若 B 和 r 均为实数，则称为实指数信号，此时， $r > 1$ 为指数增长信号， $0 < r < 1$ 为指数衰减信号；若 r 为复数，则称为复指数信号。常见的复指数信号为 $e^{j\Omega n}$ 。

1.4.2 余弦信号

连续时间的余弦信号的表达式为

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (1.19)$$

式中， A 是幅度， ω_0 是角频率， θ 是相位角。

余弦信号的物理原型是如图 1.11 所示的 LC 并联电路。假定在电路中两个元件是理想的电感和电容，设 $t = 0$ 时刻电容两端的电压为 V_0 ，电感电流为 0，则当 $t \geq 0$ 时电容两端电压的变化由下列方程描述，即

$$LC \frac{d^2}{dt^2} v(t) + v(t) = 0 \quad (1.20)$$

式中， $v(t)$ 为电容两端的电压。式 (1.20) 的解为

$$v(t) = V_0 \cos(\omega_0 t) \quad (1.21)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.22)$$

式中, ω_0 是电路的固有振荡角频率。

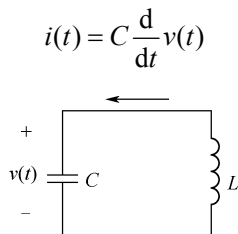


图 1.11 余弦信号的物理原型

应用欧拉公式, 有

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= \cos \theta + j \sin \theta \\ e^{-j\theta} &= \cos \theta - j \sin \theta \end{aligned} \quad (1.23)$$

设 $B = Ae^{j\theta}$, 则有

$$\begin{aligned} Be^{j\omega_0 t} &= Ae^{j(\omega_0 t + \theta)} \\ &= A \cos(\omega_0 t + \theta) + jA \sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

由此可知, 余弦信号 $A \cos(\omega_0 t + \theta)$ 是复指数信号 $Ae^{j\omega_0 t}$ 的实部, 正弦信号 $A \sin(\omega_0 t + \theta)$ 是复指数信号 $Ae^{j\omega_0 t}$ 的虚部。

1.4.3 指数衰减的正弦信号

指数衰减的正弦信号的表达式为

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \theta), \quad \alpha > 0 \quad (1.24)$$

式中, A 是幅度, α 为指数衰减因子, ω_0 是角频率, θ 是相位角。

指数衰减的正弦信号的物理原型是如图 1.12 所示的 RLC 并联电路。设 $t=0$ 时刻电容两端的电压为 V_0 , 电流为 I_0 , 则当 $t \geq 0$ 时电容两端电压的变化由下列方程描述, 即

$$C \frac{d}{dt} v(t) + \frac{1}{R} v(t) + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = 0 \quad (1.25)$$

式中, $v(t)$ 为电容两端的电压。式 (1.25) 的解为

$$v(t) = e^{-\frac{1}{2RC}t} [B_1 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t)] \quad (1.26)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2 R^2}} \quad (1.27)$$

在式 (1.27) 中, 要求 $R > \sqrt{\frac{L}{4C}}$, B_1 和 B_2 根据初始条件求解。

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$$

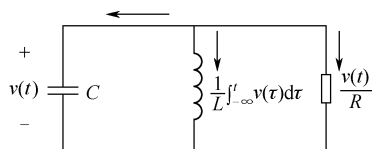


图 1.12 指数衰减的正弦信号的物理原型

取 $A=8$, $\alpha=3$, $\omega_0=10\pi$, $\theta=\pi/2$, 对应的指数衰减的正弦信号的波形如图 1.13 所示。信号的 MATLAB 表示如下。

```
%figure1.13
t=0:0.001:1;
x = 8*exp(-3*t).*sin(10*pi*t+pi/2);
plot(t,x,'-k','linewidth',1)
hold on
plot([-9 9],[0 0],'k')
axis([0 1 -9 9]);
xlabel('时间(秒)')
ylabel('指数衰减的正弦信号')
```

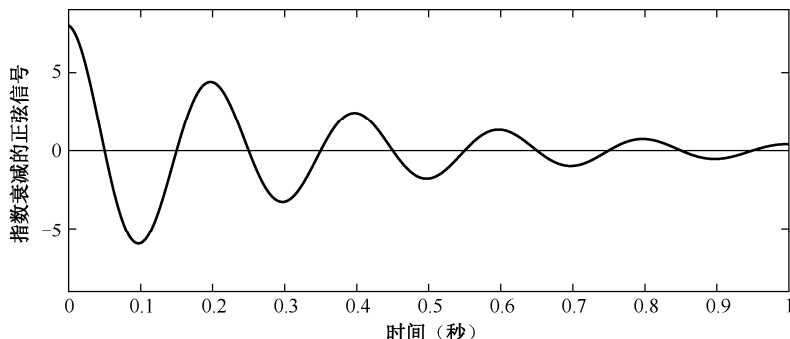


图 1.13 指数衰减正弦信号的波形

1.4.4 阶跃信号

连续时间单位阶跃信号定义为

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

连续时间单位阶跃信号的波形如图 1.14 (a) 所示。在 $t=0$ 处为不连续点, $u(t)$ 的值由 0 跳变到 1, 即 $u(0)$ 没有定义, 因此单位阶跃信号为奇异信号。注意到, $u(t)$ 除原点外都是连续的, $u(t)$ 为分段连续信号。

一般的阶跃信号定义为 $Au(t)$, 即在 $t=0$ 处由 0 跳变到 A 。阶跃信号的物理原型是如图 1.15 (a) 所示的 RC 电路, 当 $t=0$ 时闭合开关, 将对电容进行充电。图 1.15 (b) 是图 1.15 (a) 的等效电路, 用阶跃信号代替开关的动作。根据电容的特性, 电容两端的电压随时间常数 $\tau = RC$ 指数增长, $v(t)$ 可表示为

$$v(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) u(t) \quad (1.29)$$

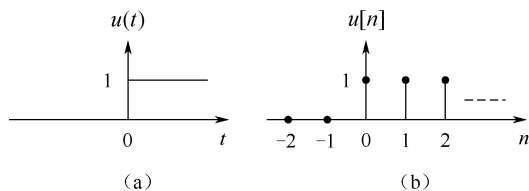


图 1.14 单位阶跃信号

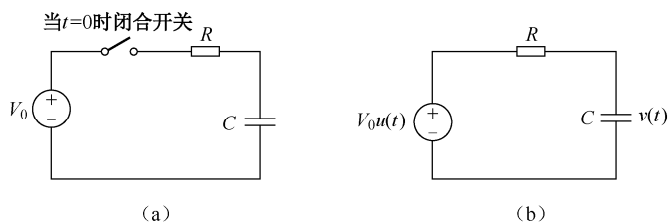


图 1.15 阶跃信号的物理原型

离散时间的单位阶跃信号定义为

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

离散时间的单位阶跃信号的波形如图 1.14 (b) 所示。

阶跃信号可用来表示任意信号的作用时间范围，如 $x(t)u(t-t_0)$ 表示在 $t_0 < t < \infty$ 的范围内有定义；

阶跃信号可用来表示方波脉冲信号。

如图 1.16 所示，信号 $\cos(t)u(t+2)$ 表示从 -2 时刻开始出现余弦信号。信号 $u(t+2) - u(t-3)$ 表示起点为 -2、终点为 3 的方波脉冲信号。

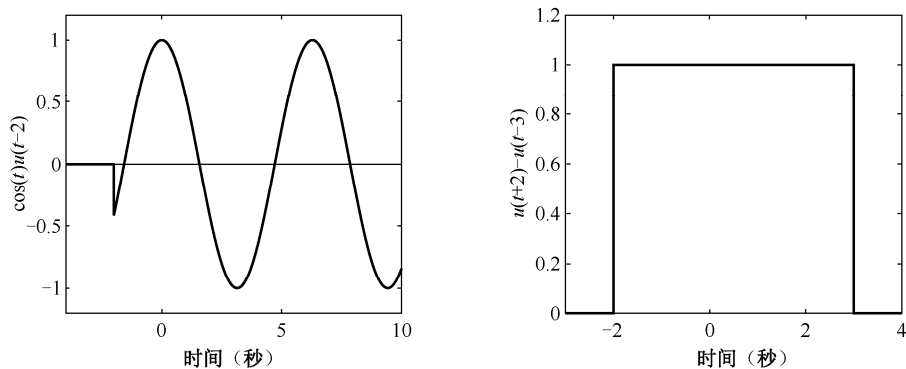


图 1.16 阶跃信号的作用

MATLAB 可以用 `heaviside(t)` 表示单位阶跃信号，如图 1.16 所示信号的 MATLAB 表示如下。


```

%figure1.16
t=-10:0.001:10;
x=cos(t).*heaviside(t+2);
subplot(1,2,1)
plot(t,x,'-k','linewidth',1)
hold on
plot([-4 10],[0 0],'k')
axis([-4 10 -1.2 1.2]);
xlabel('时间(秒)')
ylabel('cos(t)u(t-2)')
y=heaviside(t+2)-heaviside(t-3);
subplot(1,2,2)
plot(t,y,'-k','linewidth',1)
axis([-3 4 0 1.2]);
xlabel('时间(秒)')
ylabel('u(t+2)-u(t-3)')

```

例 1.4 将下列信号表示为两个阶跃信号的叠加。

$$(a) x(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases};$$

$$(b) x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}。$$

解: (a) $x(t) = Au\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - Au\left(t - \frac{\tau}{2}\right);$

(b) $x[n] = u[n] - u[n-6]。$

 笔记:

1.4.5 斜坡信号

连续时间斜坡信号定义为

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = tu(t) \quad (1.31)$$

由于

$$\int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = tu(t) = r(t)$$

因此, 斜坡信号是单位阶跃信号的积分。

离散时间斜坡信号定义为

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = nu[n] \quad (1.32)$$

斜坡信号的波形如图 1.17 所示。

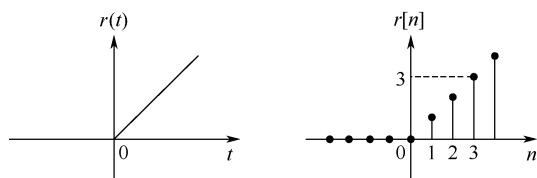


图 1.17 斜坡信号

1.4.6 单位冲激信号

单位阶跃信号的积分为斜坡信号，单位阶跃信号的微分为单位冲激信号，记为 $\delta(t)$ 。单位冲激信号的物理原型是如图 1.18 所示的串联电路及其等效电路。

在图 1.18 中，当 $t=0$ 时闭合开关等效于将电源电压 $V_0u(t)$ 接到电容两端，因此电容两端的电压可以表示为 $v(t) = V_0u(t)$ 。根据电容电流与电压的关系，流过电容的电流为

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t) = V_0 C \frac{d}{dt} u(t) \quad (1.33)$$

根据单位阶跃信号的定义， $u(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，因此式 (1.33) 中的微分为广义微分，表示的是信号在不连续点的微分。

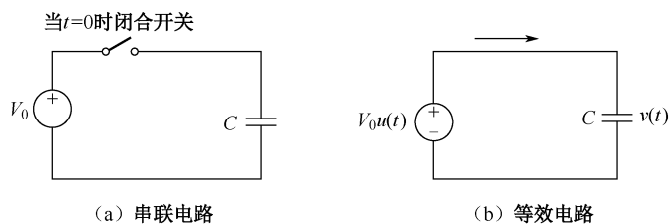


图 1.18 单位冲激信号的物理原型

由于电容的电压不能突变，即电容的充电过程是连续过程，因此在图 1.19 (a) 中，可用信号 $u_\Delta(t)$ 去逼近阶跃信号 $u(t)$ ，即

$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_\Delta(t)$$

这样就可以对 $u_\Delta(t)$ 进行微分，如图 1.19 (b) 所示， $\frac{d}{dt} u_\Delta(t)$ 是面积为 1 的窄脉冲，持续时间非常短，用 $\delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt} u_\Delta(t)$ 表示。因此，当 Δ 趋于零时，即可得到单位阶跃信号的广义微分

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} u_\Delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) \quad (1.34)$$

如图 1.19 (c) 所示是单位冲激信号 $\delta(t)$ 的波形表示，其中(1)表示该信号的强度，即信号所包围的面积为 1。其物理意义是表示作用时间极短而作用值很大的一种物理现象。同时，该信号还表示连续时间信号在间断点的导数，冲激的强度为跳变值的大小。

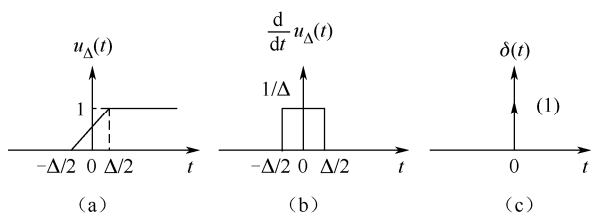


图 1.19 阶跃信号的微分导出过程

单位冲激信号的工程学定义为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau) d\tau = 1, & t = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

式 (1.35) 表明, 单位冲激信号 $\delta(t)$ 除原点外处处为零, 而且在 $0^- \sim 0^+$ 时刻的总面积为 1。单位冲激信号也称为狄拉克 (Dirac) 函数或 δ 函数。类似地, 可定义一般的冲激信号 $a\delta(t-t_0)$ 为

$$\begin{cases} a\delta(t-t_0) = 0, & t \neq t_0 \\ \int_{t_0^-}^{t_0^+} a\delta(\tau-t_0) d\tau = a, & t = t_0 \end{cases} \quad (1.36)$$

该信号表示强度为 (a) 的冲激信号。

由式 (1.35) 可知

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1.37)$$

即单位阶跃信号是单位冲激信号的积分。

单位冲激信号还可以用极限进行定义, 有

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right] \quad (1.38)$$

设 $x(t)$ 在 $t = t_0$ 处是连续的, 则单位冲激信号具有如表 1.2 所示的性质。

表 1.2 单位冲激信号的性质

奇偶性质	$\delta(-t) = \delta(t)$
筛选性质	$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
抽样性质	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0)$
尺度变换性质	$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t), a > 0$
卷积性质	$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

下面证明尺度变换性质。

由式 (1.34) 可知, $\delta(at) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} u_{\Delta}(at)$ 。将图 1.19 (b) 进行时间尺度变换, $\frac{d}{dt} u_{\Delta}(at)$ 的持续时间为 $-\frac{1}{2a}\Delta \sim \frac{1}{2a}\Delta$, 幅度 $\frac{1}{\Delta}$ 仍保持不变, 因此 $\frac{d}{dt} u_{\Delta}(at)$ 的面积为 $\frac{1}{a}$ 。由此可得

$$\delta(at) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} u_{\Delta}(at) = \frac{1}{a} \delta(t)。$$

在卷积性质中，卷积积分的定义为

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau \quad (1.39)$$

证明：由卷积积分的定义可知

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau) d\tau$$

根据奇偶性质，有

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(-\tau+t-t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-(t-t_0)) d\tau$$

根据抽样性质，有

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-(t-t_0)) d\tau = x(t-t_0)$$

单位冲激信号可以表示信号在不连续点处的导数；

单位冲激信号可作为基本单元信号，用来表示任意的连续信号。

假设信号 $x(t)$ 除在 t_0 点外均是连续的，则根据单位冲激信号的定义， $x(t)$ 的广义微分定义为

$$\frac{d}{dt} x(t) + [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \delta(t-t_0) \quad (1.40)$$

例 1.5 求如图 1.20 (a) 所示折线信号的广义微分，并画图表示。

解：如图 1.20 (b) 所示，有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) = & -\delta(t+2) + \delta(t+1) + \delta(t) - \delta(t-1) - \\ & 2\delta(t-3) + 2\delta(t-5) \end{aligned}$$

笔记：

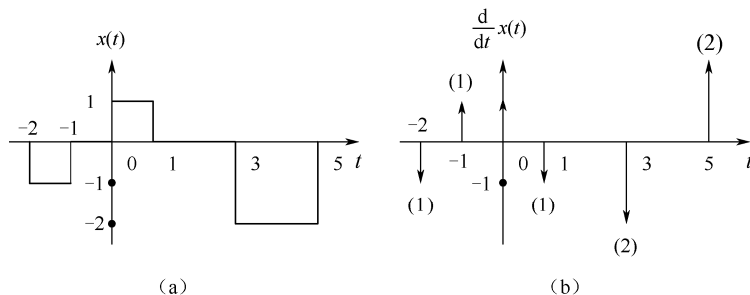


图 1.20 折线信号及其广义微分

1.4.7 单位脉冲信号

单位脉冲信号也称为单位函数信号，定义为