第 1 篇　微积分

第 1 章　函数

函数是微积分学研究的对象，在初中我们已经学习过函数的概念，它是这样叙述的：

设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y，如果对于 x 的每一个值，y 都有唯一的值与它对应，那么就说 y 是 x 的函数，x 叫作自变量.

而这里我们将从全新的视角来对函数进行描述并重新分类.

1.1　函数的概念

1.1.1　常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量．例如：身高、体重、收入、成本、气温、产量等．这些量可以分为两类，一类量在研究它的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称为**常量**，例如，圆周率 π，某个成年人的身高、某种商品的价格在某一段时间内保持不变，这些量都是常量；另一类量在研究它的过程中是变化的，可以取不同的数值，我们把它称为**变量**，例如，一天中的气温，生产过程中的产量都是不断变化的，它们都是变量.

在理解常量与变量时，应注意以下几点：

（1）常量与变量依赖于所研究的过程．同一个量，在某一特定的过程中可以认为是常量，而从长期来看则可能是变量；反过来也是同样的.

（2）从几何意义上讲，常量对应着实数轴上的定点，变量则对应着实数轴上的动点.

（3）一个变量所能取的数值的集合叫作这个变量的**变动区域**．如果这个变量可以取介于两个实数之间的任意实数值，则称为**连续变量**．连续变量的变动区域常用区间表示.

常量习惯用字母 a，b，c，d 等表示；变量习惯用 x，y，z，u，v，w 等表示.

1.1.2　函数的概念及表示法

1. 函数的概念

例如一辆汽车以 60 km/h 的速度匀速行驶，那么随着行驶时间 x 的变化，汽车行驶的里程 y 也随着发生变化，有这样的关系式 $y = 60x$，我们称它为函数.

再如国际上常用恩格尔系数反映一个国家人民生活质量的高低，恩格尔系数越低，生活质量越高．表 1-1 是改革开放以来我国城镇居民部分年份恩格尔系数变化情况．

表 1-1　改革开放以来我国城镇居民部分年份恩格尔系数变化情况

年　份	1978	1988	1998	2008	2015	2017	2018
恩格尔系数（%）	57.5	51.4	44.7	37.9	34.8	29.3	28.4

从表中可以看出，对于每一年都有一个确定的恩格尔系数与之相对应，我们也称它为函数．

那么函数的概念是如何定义的呢？函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联，到了 1873 年，德国数学家狄利克雷抽象出了直至今日仍为人们易于接受，并且较为合理的函数概念．

定义 1.1　设有两个变量 x 与 y，若当变量 x 在实数的某一范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的对应规律 f，都有唯一的值与它对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作

$$y = f(x) \qquad x \in D,$$

其中，变量 x 称为自变量，变量 y 称为函数（或因变量）．自变量的取值范围 D 称为函数的定义域．

若对于确定的 $x_0 \in D$，通过对应规律 f，函数 y 有唯一确定的 y_0 相对应，则称 y_0 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0 = y_{|x=x_0} = f(x_0)$$

函数值的集合，称为函数的值域，记作 M．

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义．

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素，而函数的值域一般称为派生要素．

（1）对应规律．

例 1.1　$f(x) = x^2 + 2x - 3$ 是一个特定的函数，f 确定的对应规律为

$$f(\ \ ) = (\ \ )^2 + 2(\ \ ) - 3,$$

则 $f(\ 2\ ) = 2^2 + 2 \times 2 - 3$；　　$f(a) = (a)^2 + 2(a) - 3$；$\cdots$．

例 1.2　已知 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(\dfrac{1}{x})$，$f[f(x)]$ 的值．

解　$f(0) = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$，　　$f(-x) = \dfrac{1-(-x)}{1+(-x)} = \dfrac{1+x}{1-x}$，

$f(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{x-1}{x+1}$，　　$f[f(x)] = \dfrac{1-f(x)}{1+f(x)} = \dfrac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \dfrac{2x}{2} = x$

由于函数除用符号 $f(x)$ 表示外，还常用 $g(x)$，$F(x)$，$G(x)$ 等符号表示，因此对应关系 f 只是一个函数符号，在不同函数中，f 表示的具体对应规律是不一样的．

（2）定义域.

自变量的取值范围称为函数的定义域，给定一个函数，就意味着定义域同时给定了. 定义域常用区间或集合表示.

例 1.3 求下列函数的定义域

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x(x-3)}$；（2）$f(x)=\sqrt{16-x^2}$；（3）$f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$；

（4）$f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

解 （1）要使分数 $\dfrac{1}{x(x-3)}$ 有意义，分母不能为零，所以 $x(x-3)\neq 0$，解得 $x\neq 0$ 且 $x\neq 3$，即定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$；

（2）在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以 $16-x^2\geqslant 0$，解得 $-4\leqslant x\leqslant 4$，即定义域为 $[-4,4]$；

（3）在对数式中，真数必须大于零，即 $x-1>0$，$x>1$；又因为偶次方根式中，被开方式必须大于等于零，即 $\ln(x-1)\geqslant 0$，$x-1\geqslant 1$，$x\geqslant 2$. 所以定义域为 $[2,+\infty)$；

（4）反正弦或反余弦中的式子 $\varphi(x)$ 的绝对值必须小于等于 1，所以 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，解得 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，$-3\leqslant x\leqslant 4$，即定义域为 $[-3,4]$.

请思考： 函数 $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x(x-3)}$ 的定义域是什么?（定义域应是上述几个例子定义域的交集）.

函数的定义主要包括定义域和对应规律，因此判定两个函数是否相同时，就要看定义域和对应规律是否完全一致，而由对应规律把它对应到了值域，且值域被唯一确定，为此判断两个函数是否相同就看其定义域和值域是否相同即可.

例 1.4 判断下列函数是否是同一函数

（1）$y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$；　　（2）$y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；

（3）$y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$；　　（4）$y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$.

解 （1）不是同一函数. 尽管它们的对应规律一样，但 $y=x$ 的定义域是 R，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $\{x \mid x\in R，且 x\neq 0\}$；

（2）不是同一函数. 定义域不同，$y=x$ 的定义域是 R，而 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是 $[0,+\infty)$；

（3）是同一函数. 定义域与值域都相同，因此是同一函数；

（4）不是同一函数. 定义域不同，$y=\lg x^2$ 的定义域是 $x\neq 0$ 的全体实数，而 $y=2\lg x$ 的定义域是 $x>0$.

请思考： 下列函数是否是同一函数

（1）$f(x)=1$ 与 $g(x)=x^0$；

（2）$f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$；

（3） $y=f(x)$ 与 $x=f(y)$.

3. 函数的表示法

函数的表示方法，常用的有解析法、列表法、图像法三种.

（1） 解析法.

解析法是把两个变量的函数关系，用一个等式来表示，又称公式法.

例如，$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）；$A=\pi r^2$ 等都是用解析法表示函数关系的.

解析法的优点是：函数关系清楚，容易从自变量的值求出其对应的函数值，便于用解析式来研究函数的性质.

（2） 列表法.

列表法是列出表格来表示两个变量的函数关系.

例如，银行里常用的“利息表”、三角函数表、产品销售量表等.

又如，表 1-1 我国城镇居民 1978—2018 年恩格尔系数变化情况.

用列表法表示函数关系的优点是：不必通过计算就知道当自变量取某值时函数的对应值.

（3） 图像法.

图像法是用函数图像表示两个变量之间的关系. 图 1-1 是我国 1990—2006 年国内生产总值增速变化曲线.

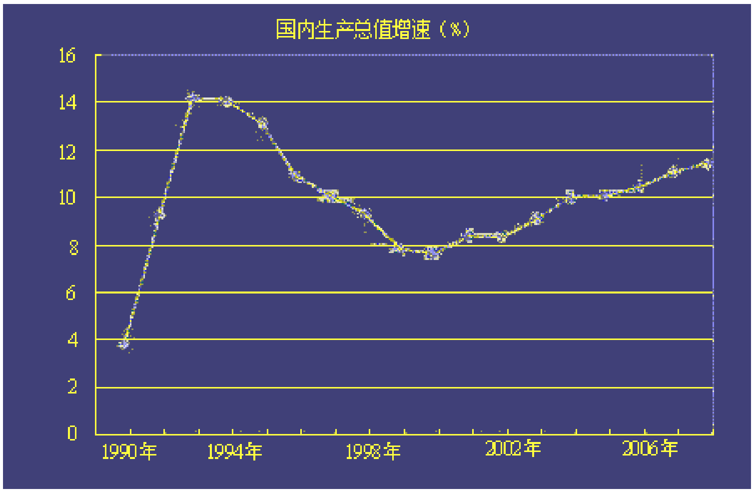

图 1-1

用图像法表示函数关系的优点是：能直观形象地表示出函数的变化情况.

4. 分段函数

某市移动通信公司有一款优惠套餐，规定收费标准为：当月所打电话时长不超过 40 分钟时，只收取月租费 15 元，超过 40 分钟，每分钟加收 0.12 元，则电话费 y 和用户当月所打电话的时长 x 的关系可用下面的形式给出：

$$y=\begin{cases}15, & x\leqslant 40;\\ 15+0.12(x-40), & x>40.\end{cases}$$

像这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**．分段函数是定义域上的一个函数，不要理解为多个函数，分段函数需要分段求值，分段作图．其定义域为各分段部分定义域的并集．

例 1.5 设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}0\quad, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ x^2\quad, & 0<x\leqslant 1;\\ 3-x\ , & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

求：（1）函数值 $f(-0.5)$，$f(0.5)$，$f(1.5)$；（2）函数的定义域；（3）画出该分段函数的图形．

解 （1）$f(-0.5)=0$；$f(0.5)=(0.5)^2=0.25$；$f(1.5)=3-1.5=1.5$

（2）由于分段函数的定义域为各分段部分定义域的并集，所以 $f(x)$ 的定义域为 $[\ -1,2\ ]$．

（3）该分段函数的图形如图 1-2 所示．

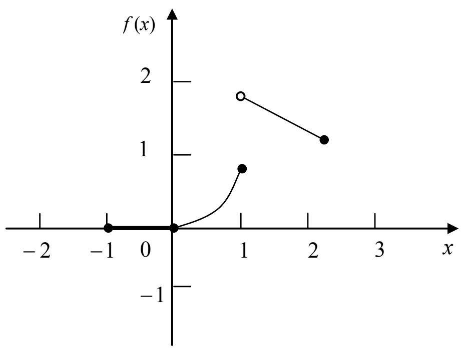

图 1-2

例 1.6 2018 年 10 月 1 日开始实施新的《中华人民共和国个人所得税法》，个税免征额调至 5000 元．

表 1-2 个人所得税税率表（工资、薪金所得适用）

级　　数	扣除三险一金后月收入减去扣除标准后应纳税所得额	税率（%）
1	不超过 3000 元的部分	3
2	超过 3000 元至 12000 元的部分	10
3	超过 12000 元至 25000 元的部分	20
4	超过 25000 元至 35000 元的部分	25
5	超过 35000 元至 55000 元的部分	30
6	超过 55000 元至 80000 元的部分	35
7	超过 80 000 元的部分	45

目前，在上表中“扣除三险一金后月收入减去扣除标准后应纳税所得额”是从工资、薪金收入中减去 5000 元后的余额．例如某人扣除三险一金后月工资、薪金收入 9000 元，减去 5000 元，应纳税所得额为 4000 元，由税率表可知，其中 3000 元税率为 3%，另 1000 元税率为 10%，所以此人应纳个人所得税为：$3000\times3\%+1000\times10\%=190$ 元．

请写出月工资、薪金的个人所得税 y 关于工资、薪金收入 x $(0<x\leqslant30000)$ 的函数表达式．

解 这个函数的定义域为 $[0,+\infty)$，自变量 x $(0<x\leqslant30000)$ 的解析表达式为：

$$y=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant5000;\\ (x-5000)\cdot3\%, & 5000<x\leqslant8000;\\ 90+(x-8000)\cdot10\%, & 8000<x\leqslant20000;\\ 90+1200+(x-20000)\cdot20\%, & 20000<x\leqslant30000.\end{cases}$$

例 1.7 为配合客户不同需要，某移动通信公司推出 A、B 两种优惠计划供客户选择，如表 1-3 所示，试根据提供信息，解答下列问题：

表 1-3 某移动通信公司推出 A、B 两种计划比较表

	计划 A	计划 B
服务项目	本地通话	本地通话
每月基本服务费	29 元	49 元
免费通话时间	190 分钟	390 分钟
超出部分每分钟收费	0.14 元	0.12 元

（1）设通话时间为 x 分钟，所需付出的费用为 y 元，分别写出计划 A、计划 B 中 y 与 x 之间的函数关系式．

（2）通话时间超过多少分钟时，计划 B 会比计划 A 更省钱？

（3）在直角坐标系中画出计划 A、计划 B 所对应的函数图像．

解 （1）计划 A

$$y=\begin{cases}29, & x\leqslant190\\ 29+0.14(x-190), & x>190\end{cases};$$

计划 B

$$y=\begin{cases}49, & x\leqslant390\\ 49+0.12(x-390), & x>390\end{cases}.$$

（2）要使计划 B 比计划 A 省钱，即 $29+0.14(x-190)>49$，解得 $x>333$

（3）两个计划的图像如图 1-3 所示．

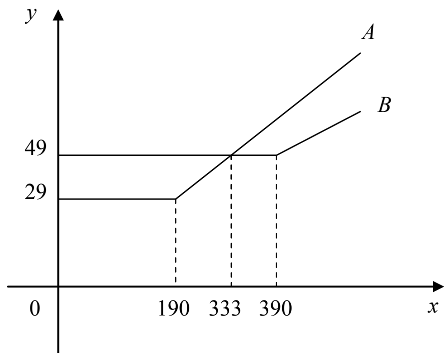

图 1-3

习题 1.1

1. 判断下列各对函数是否是同一函数.

（1） $y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$；（2） $y=\ln\sqrt{x}$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\ln x$；

（3） $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；（4） $y=\dfrac{1}{x-1}$ 与 $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$.

2. 求下列函数的定义域

（1） $y=\sqrt{x-2}+\lg(5-x)$；（2） $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln(x+2)$；（3） $y=\arccos\dfrac{x-1}{2}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leqslant x\leqslant 2; \\ 1, & 2<x\leqslant 4; \\ \dfrac{x}{2}, & x>4. \end{cases}$

求：（1） $f(-1)$， $f(3)$， $f(4)$， $f(6)$ 的函数值；（2）函数 $f(x)$ 的定义域；

（3）作出函数的图形.

1.2　函数的性质

研究函数就要了解函数的性质，下面介绍函数的几种特性.

1.2.1　函数的有界性

设函数 $y=f(x)$，若存在正数 M，使得在区间 D 上有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**．否则称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 区间内的图像被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间．如图 1-4 所示.

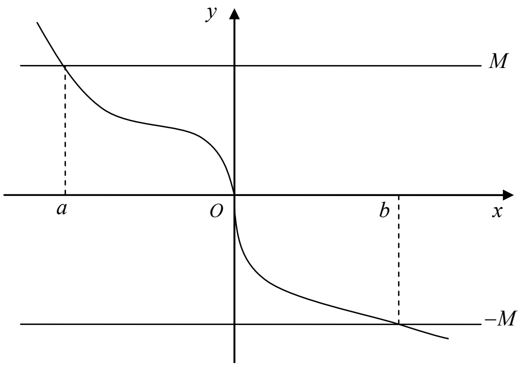

图 1-4

对于函数的有界性，要注意以下几点.

1. 有界函数的界并不是唯一的.

如 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，有 $|\sin x|\leqslant 1$，但我们也可以取 $M=2$，即 $|\sin x|<2$ 总是成立的，实际上 M 可以取任何大于 1 的数.

2. 有界性是依赖于区间的.

如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，而在区间 $(1,2)$ 内是有界的.

请思考：我们以前学过哪些有界函数？

例 1.8 判断函数 $f(x)=\dfrac{x\cos x}{1+x^2}$ 的有界性.

解 因为 $1+x^2\geqslant 2x$，$|\cos x|\leqslant 1$，故

$$|f(x)|=\left|\frac{x\cos x}{1+x^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2x}\right|=\frac{1}{2}$$

所以，$f(x)$ 是有界函数.

1.2.2 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，如果对于属于 D 内任意两个点 x_1，x_2，

当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**单调增加**；

当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**单调减少**.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正方向逐渐上升的，如图 1-5 所示；单调减少函数的图像是沿 x 轴正方向逐渐下降的，如图 1-6 所示.

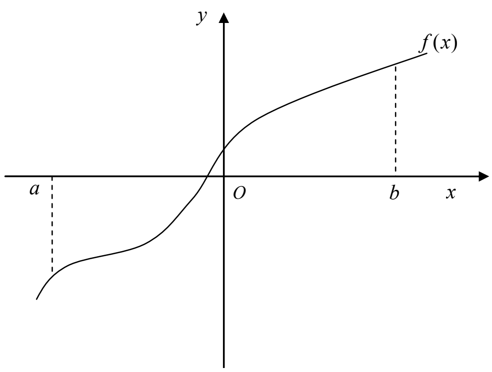

图 1-5

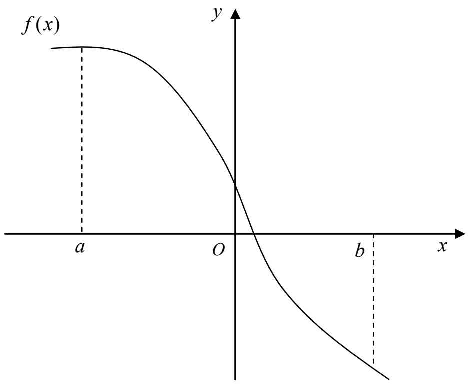

图 1-6

例 1.9　图 1-7 是定义在闭区间$[-5,5]$上函数$y=f(x)$的图像，根据图像说出函数的单调区间，以及在每一单调区间上，函数$y=f(x)$的单调性.

解

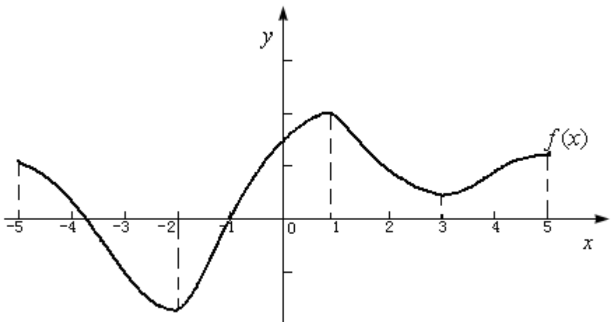

图 1-7

函数$y=f(x)$的单调区间有$[-5,-2)$，$[-2,1)$，$[1,3)$，$[3,5]$. 其中$y=f(x)$在区间$[-5,-2)$，$[1,3)$上是单调减函数；在区间$[-2,1)$，$[3,5]$上是单调增函数.

例 1.10　证明函数$f(x)=3x+2$在R上是增函数.

证　设x_1，x_2是R上的任意两个实数，且$x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=(3x_1+2)-(3x_2+2)\\&=3(x_1-x_2)\end{aligned}$$

由$x_1<x_2$，得$x_1-x_2<0$，

于是　$f(x_1)-f(x_2)<0$，　　　　　　即$f(x_1)<f(x_2)$

所以，函数$f(x)=3x+2$在R上是增函数.

1.2.3　函数的奇偶性

设D为关于原点对称的区间，若对于任意的自变量x（$x\in D$），都有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**；若对于任意的自变量x（$x\in D$），都有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**.

例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数，如图 1-8 所示；

$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数，如图 1-9 所示.

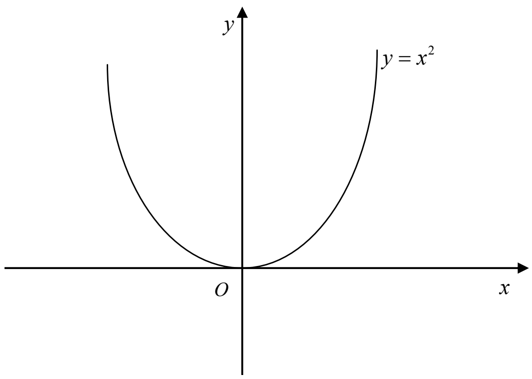

图 1-8

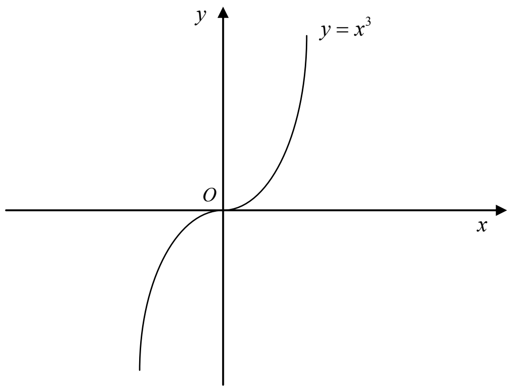

图 1-9

从图 1-8 和图 1-9 可以看出，偶函数是关于 y 轴对称的；奇函数是关于坐标原点对称的.

例 1.11 判断下列函数的奇偶性.

（1） $f(x)=3x^4-5x^2+7$；

（2） $f(x)=2x^2+\sin x$；

（3） $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x) \quad (a>0, a\neq 1)$.

解 由定义可知，三个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，是关于原点对称的.

（1） $f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$，

所以， $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数.

（2） $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$，同样 $f(-x)\neq -f(x)$，

所以， $f(x)=2x^2+\sin x$ 是非奇非偶函数.

（3） $f(-x)=\dfrac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})=-\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$，

所以， $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$ 是奇函数.

请思考：

举例说明下列说法是否正确：（1）两个奇函数之和是奇函数；（2）两个偶函数之和是偶函数；（3）奇函数与偶函数之和是非奇非偶函数；（4）两个奇函数的乘积是偶函数；（5）两个偶函数的乘积是偶函数；（6）奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

1.2.4 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 T，使得对于任意 $x\in D$，且 $x+T\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**．满足这个等式的最小正数 T，称为函数 $f(x)$ 的**周期**．例如 $y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π .

请思考：我们以前还学过哪些周期函数？

习题 1.2

判断下列函数的奇偶性.

1. $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$； 2. $f(x)=x^{2}\cos x$； 3. $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$.

1.3 反函数

1.3.1 反函数的概念

设某种商品的价格为 p，销售量为 q，则销售收入 R 是销售量 q 的函数：

$$R=pq$$ 这时 q 是自变量，R 是函数.

若已知收入 R，反过来求销售量 q，则有 $q=\dfrac{R}{p}$，这时 R 为自变量，q 变成了函数.

$R=pq$ 与 $q=\dfrac{R}{p}$ 是同一关系的两种写法，但从函数的角度来看，由于对应规律不同，它们是两个不同的函数，我们称它们互为反函数.

又如，在函数 $y=2x\ \ (x\in R)$ 中，x 是自变量，y 是 x 的函数；由 $y=2x$ 可以得到 $x=\dfrac{y}{2}$ $(y\in R)$，y 是自变量，x 是 y 的函数，此时我们则说 $x=\dfrac{y}{2}$ 是函数 $y=2x$ 的反函数.

一般地，在函数 $y=f(x)\ \ (x\in D)$ 中，设它的值域为 M. 我们根据这个函数中 x，y 的关系，用 y 把 x 表示出来，得到 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 M 中的任何一个值，通过 $x=\varphi(y)$，x 在 D 中都有唯一的值和它对应，那么 $x=\varphi(y)$ 就表示 y 是自变量，x 是 y 的函数，这样的函数 $x=\varphi(y)\ \ (y\in M)$ 叫作函数 $y=f(x)\ \ (x\in D)$ 的**反函数**，记作：

$$x=f^{-1}(y).$$

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 表示函数. 但在习惯上，我们一般用 x 表示自变量，y 表示函数，为此我们常常对调 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x 和 y，把它们改写成为 $y=f^{-1}(x)$. 我们称 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的**矫形反函数**，简称**反函数**（今后凡不特别说明，函数 $f(x)$ 的反函数都采用这种经过改写的形式）. 而 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的**直接反函数**，$y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的**反函数**.

例如 $y=2x$ 的直接反函数是 $x=\dfrac{y}{2}$，反函数是 $y=\dfrac{x}{2}$.

1.3.2 互为反函数的函数图像间的关系

如果函数 $y=f(x)\ \ (x\in D)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，那么在直角坐标系 xoy 中，它们的图像有什么关系呢？

例 1.12 求函数 $y=3x-2\ \ (x\in R)$ 的反函数，并且画出原来的函数和它的反函数的

图像.

解 由 $y=3x-2$ 得 $x=\dfrac{y+2}{3}$. 因此函数 $y=3x-2$ $(x\in R)$ 的反函数是 $y=\dfrac{x+2}{3}$ $(x\in R)$.

函数 $y=3x-2$ 和它的反函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ 的图像如图 1-10 所示.

从图 1-10 中可以看出，函数 $y=3x-2$ 和它的反函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

请思考： $y=x^2$ 和它的反函数 $y=\sqrt{x}$ 的图像有关系吗？

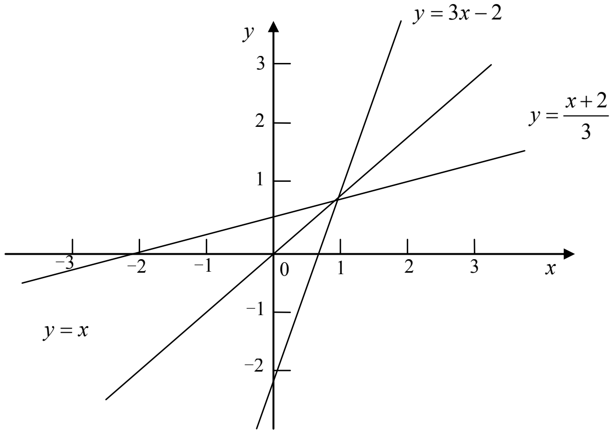

图 1-10

习题 1.3

1. 求下列函数的反函数.

（1）$y=\dfrac{x-1}{x+3}$； （2）$y=\ln(2x-1)$.

2. 求函数 $y=x^3$ （$x\in R$）的反函数，并画出该函数与它的反函数的图像.

1.4 初等函数

微积分的研究对象主要是初等函数，而初等函数是由基本初等函数构成的. 基本初等函数包括：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数六大类. 虽然大部分函数在中学已经学过，但我们在这里对它们重新分类，并重点掌握它们的定义域、值域、图像和性质.

1.4.1 基本初等函数

1. 常数函数 $y=c$ （c 为常数）

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，由于无论 x 取何值，都有 $y=c$，所以，它的图像是过 $(0,c)$ 平行于 x 轴的一条直线. 如图 1-11 所示，它是偶函数.

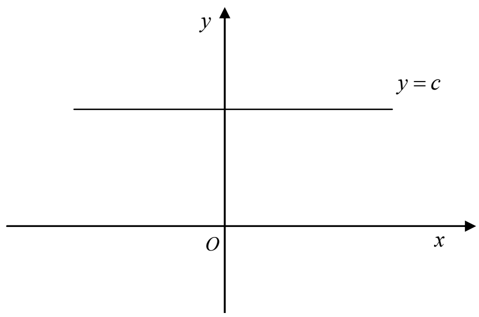

图 1-11

2. 幂函数 $y=x^u$ （u 为实数）

幂函数的情况比较复杂，我们分$u>0$和$u<0$来讨论.

当u取不同值时，幂函数的定义域不同，为了便于比较，我们只讨论$x>0$的情况，而$x<0$的图像可根据函数的奇偶性确定.

当$u>0$时，取$u=1$、2、3、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$，我们可以看到函数图像通过原点$(0,0)$和点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内单调增加且无界，如图 1-12 所示.

当$u<0$时，取$u=-\frac{1}{2}$、-1、-2，我们可以看到图像不过原点，但仍通过点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内单调减少且无界，曲线以x轴和y轴为渐近线，如图 1-13 所示.

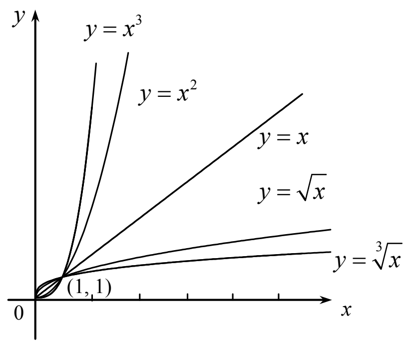

图 1-12

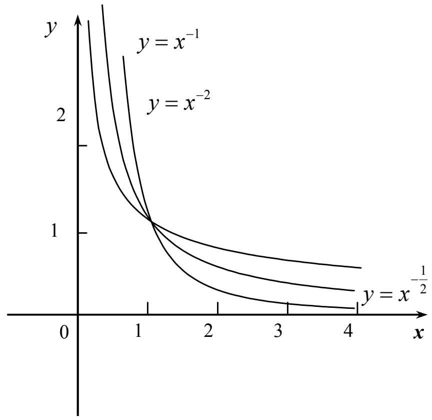

图 1-13

3. 指数函数 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，由于无论x取何值，总有$a^x>0$，且$a^0=1$，因此指数函数的图像全部在x轴上方且通过点$(0,1)$，也就是说，它的值域是$(0,+\infty)$.

例 1.13 画出$y=2^x$，$y=(\frac{1}{2})^x=2^{-x}$的图像.

解 根据表 1-4 用描点法画图.

表 1-4 $y=2^x$ 和 $y=2^{-x}$ 的变化情况表

x	…	−3	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	3	…
2^x	…	0.13	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.4	2	2.8	4	8	…
2^{-x}	…	8	4	2.8	2	1.4	1	0.71	0.5	0.35	0.25	0.13	…

从图 1-14 中可以看出，$y=2^x$ 的图像与 $y=2^{-x}$ 的图像关于 y 轴对称.

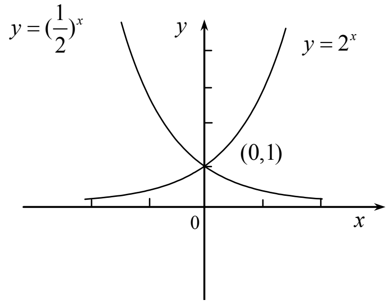

图 1-14

通过例 1.13 我们可知，对于指数函数当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 x 轴负半轴为渐近线；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 x 轴正半轴为渐近线.

4. 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$, $a\neq 1)$

“对数源于指数”，即对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，因此对数函数与指数函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.14 在同一坐标系画出函数（1）$y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$；（2）$y=(\frac{1}{2})^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像.

解

从图 1-15 函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 的图像和图 1-16 函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像可以看出，它们关于直线 $y=x$ 对称.

因此，对数函数的定义域是 $(0,+\infty)$，图像全部在 y 轴的右方，值域是 $(-\infty,+\infty)$，无论 a 取何值，曲线都通过点 $(1,0)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 y 轴负半轴为渐近线；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 y 轴正半轴为渐近线.

通常将以 10 为底的对数函数叫作**常用对数**函数，记作 $y=\log_{10} x=\lg x$；以无理数 $\mathrm{e}=2.718\,281\,8\cdots$ 为底的对数函数 $y=\log_{\mathrm{e}} x$ 叫作**自然对数**函数，记作 $y=\log_{\mathrm{e}} x=\ln x$，自然对数函数是微积分中常用的函数.

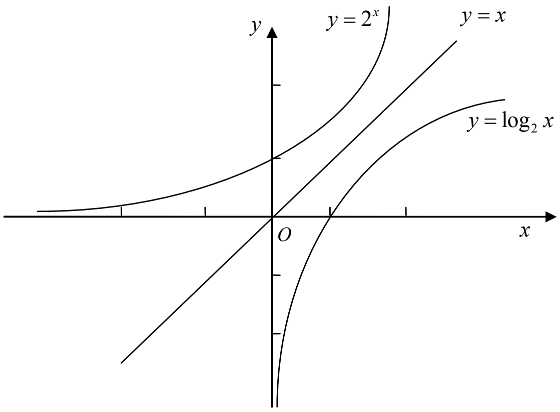

图 1-15

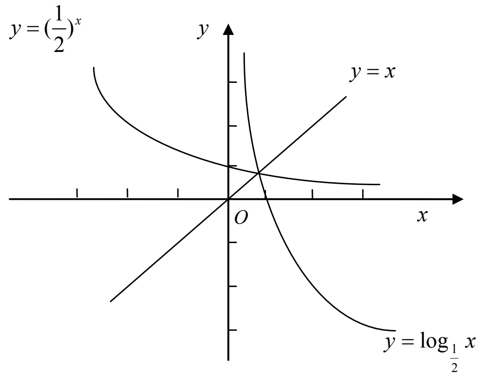

图 1-16

5. 三角函数

三角函数包括下面六个函数：

（1）正弦函数　$y = \sin x$；

（2）余弦函数　$y = \cos x$；

（3）正切函数　$y = \tan x$；

（4）余切函数　$y = \cot x$；

（5）正割函数　$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$；

（6）余割函数　$y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$．

在微积分中，三角函数的自变量 x 采用弧度制，弧度与角度的换算公式：

$$1\ \text{rad} = (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57.3^\circ = 57^\circ 18'$$

下面分别介绍一下前四个三角函数的特点和性质．

（1）正弦函数　$y = \sin x$．

定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，当 $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ 时取得最大值 1，当 $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ 时取得最小值 -1．奇函数，以 2π 为周期的周期函数，有界，如图 1-17 所示．

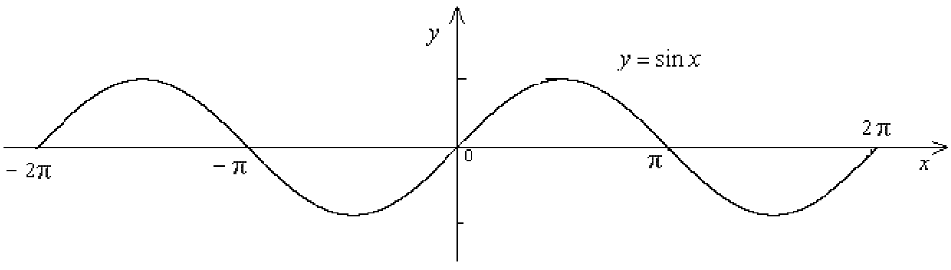

图 1-17

（2）余弦函数　$y=\cos x$．

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，当$x=2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$时取得最大值1，当$x=2k\pi+\pi\ (k\in\mathbf{Z})$时取得最小值$-1$．偶函数，以$2\pi$为周期的周期函数，有界，如图1-18所示．

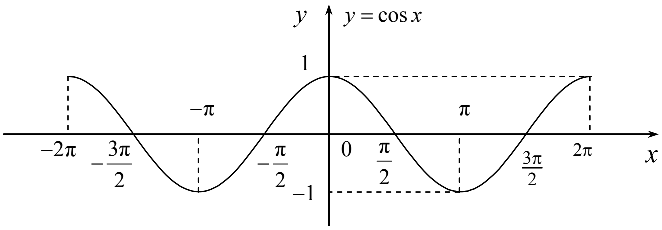

图 1-18

（3）正切函数　$y=\tan x$．

定义域为$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$．以$\pi$为周期，在每个周期内单调增加，以直线$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为渐近线，如图1-19所示．

（4）余切函数　$y=\cot x$．

定义域为$x\neq k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$．以$\pi$为周期，在每个周期内单调减少，以直线$x=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为渐近线，如图1-20所示．

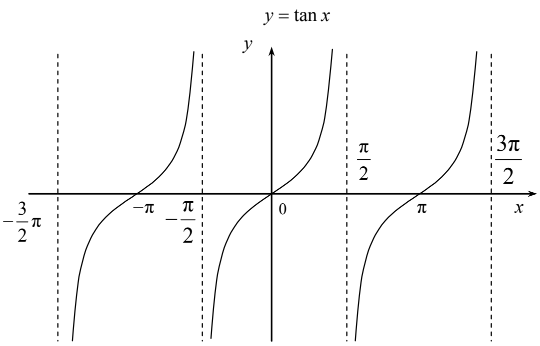

图 1-19

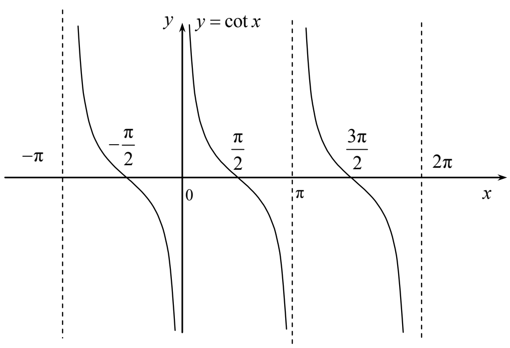

图 1-20

关于函数$y=\sec x$和$y=\csc x$，我们不作讨论，只需知道$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$和$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$．

6. 反三角函数

常用的反三角函数有四个：

（1）反正弦函数　$y=\arcsin x$；

（2）反余弦函数　$y=\arccos x$；

（3）反正切函数　$y=\arctan x$；

（4）反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$．

它们是作为相应三角函数的反函数定义出来的．

$y=\arcsin x$ 的含义是正弦值等于 x 的角．与三角函数相反，这里自变量 x 表示正弦值，而 y 则表示角，准确地说是角的弧度数．例如 $y=\arcsin\frac{1}{2}$ 表示正弦值为 $\frac{1}{2}$ 的角，我们知道 $\frac{\pi}{6}$ 的正弦值是 $\frac{1}{2}$，所以有 $y=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$．但实际上，$y=2k\pi+\frac{\pi}{6}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）的正弦值都是 $\frac{1}{2}$，这与我们前面讲的函数的定义不符合，为了避免 $y=\arcsin x$ 的多值性，我们限定了一个区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，叫作反正弦函数的**主值区间**．在这个区间内，自变量 x 与函数值 y 之间建立了一一对应的关系．

类似地对应其他几种反三角函数都规定了相应的主值区间，保证了它们的单值性．当然，由于函数的性质不同，它们的主值区间范围不同．今后在本书中凡不做特殊说明的反三角函数都是指在它们的主值区间内．

下面讨论四个反三角函数的特点和性质．

（1）$y=\arcsin x$．

定义域 $[-1,1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，单调增函数，奇函数，有界，如图 1-21 所示．

（2）$y=\arccos x$．

定义域 $[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$，单调减函数，有界，如图 1-22 所示．

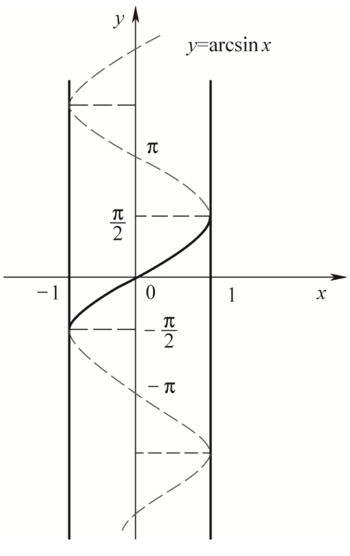

图 1-21

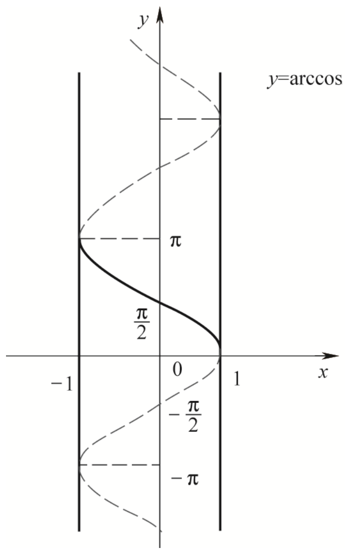

图 1-22

（3）$y=\arctan x$．

定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，单调增函数，奇函数，有界，如图 1-23 所示．

（4）$y=\operatorname{arccot} x$．

定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,\pi)$，单调减函数，有界，如图 1-24 所示．

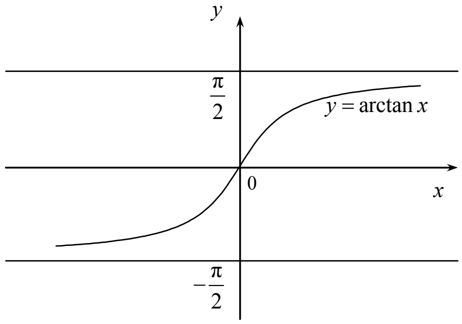

图 1-23

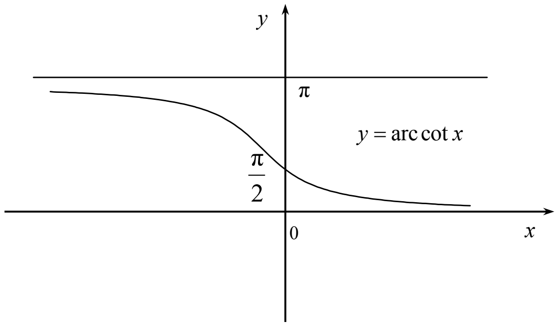

图 1-24

1.4.2　复合函数与初等函数

1. 复合函数

在实际经济活动中，我们会遇到这样的问题：一般来说成本 c 可以看作产量 q 的函数，而产量 q 又是时间 t 的函数，时间 t 通过产量 q 间接影响成本 c，那么成本 c 仍然可以看作时间 t 的函数，c 与 t 的这种函数关系称作一种复合的函数关系，产量 q 可以看作这种复合关系的中间变量.

定义 1.2　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 如果 $u=\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的**复合函数**，记作

$y=f[\varphi(x)]$　　　　其中，x 是自变量，u 称作中间变量.

对于复合函数，我们做如下说明：

（1）不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

例如 $y=\lg u$，$u=-\sqrt{x-1}$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=-\sqrt{x-1}$ 在其定义域 $[1,+\infty)$ 中任何 x 的取值所对应 u 值均为非正数，它们都不可能落在 $y=\lg u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内，所以 $y=\lg u$ 与 $u=-\sqrt{x-1}$ 不能复合成一个复合函数.

（2）复合函数不仅可以由两个函数，还可以由两个以上的函数复合而成. 例如 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 就是由 $y=\ln u$，$u=x+v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1+x^2$ 四个函数复合而成的，其中 u，v，w 都是中间变量.

我们不仅要研究函数的复合，而且还要研究函数的分解，在分解函数时，首先要认真地分析一个复合函数的构成，搞清楚它的复合关系和复合层次，然后由外往里一层层地顺次分解，将各层次分解为基本初等函数或由基本初等函数经过有限次四则运算形成的简单函数. 因此说复合函数的合成和分解往往是对简单函数而言的.

例 1.15　已知 $y=\ln u$，$u=\sin x$，将 y 表示成为 x 的函数.

解　将 $u=\sin x$ 代入 $y=\ln u$ 中，可得

$$y=\ln\sin x.$$

例 1.16 已知 $y=\ln u$，$u=4-v^2$，$v=\sin x$，将 y 表示成为 x 的函数.

解 $y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\sin^2 x)$.

例 1.17 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

（1）$y=\sqrt{\sin\dfrac{x}{2}}$；（2）$y=5^{\cos(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{6})}$.

解 （1）设 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{x}{2}$. 则 $y=\sqrt{\sin\dfrac{x}{2}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成的.

（2）设 $y=5^u$，$u=\cos v$，$v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{6}$. 则 $y=5^{\cos(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{6})}$ 是由 $y=5^u$，$u=\cos v$，$v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{6}$ 复合而成的.

2. 初等函数

定义 1.3 由六类基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合而成的函数叫作**初等函数**.

一般来说，初等函数都可以用一个解析式子表示.

例如 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}+\sin^2(2x+\dfrac{\pi}{3})$，$y=\arcsin[\cos^2(x^3+x)]$ 都是初等函数. 今后我们在讨论函数时，绝大多数都是初等函数.

而 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 不满足有限次运算和分段函数 $y=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 2, & x<0.\end{cases}$ 一般都不是初等函数.

习题 1.4

1. 写出所给函数的复合函数：

（1）$y=\sqrt{u},\quad u=1+e^x$；（2）$y=\arcsin u,\quad u=\dfrac{x^2}{1+x^2}$；

（3）$y=e^u,\ u=\sin v$，$v=x^2+1$；（4）$y=\ln u,\ u=\sqrt{v},\ v=2^x+1$.

2. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的：

（1）$y=\sqrt{5x+1}$；（2）$y=(1+\ln x)^3$；（3）$y=\ln[\ln(\ln x)]$；

（4）$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；（5）$y=\sin^3(2x^2+x)$；（6）$y=\log_2\tan\sqrt{x^2+1}$；

3. 在同一坐标系上画出 $y=x^3$，$y=x^3+1$，$y=(x+1)^3+1$ 的图像，并从图像上观察三个函数有何关系.

1.5 常用的经济函数

我们知道，函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，不同的变化规律需要用不同的函数模型来描述．经济函数就是用数学方法解决经济问题，找出经济变量之间的函数关系，建立数学模型．

下面介绍几种常用的经济函数．

1.5.1 需求函数与供给函数

1. 需求函数

“需求”是指在一定条件下，人们愿意购买并且有支付能力购买的商品量．人们对某种商品的需求是由多种因素决定的，如收入、商品的价格、季节、地区等．当我们的目的是研究需求量Q与商品价格p之间的依赖关系时，常常把需求量的其他影响因素固定在某一常数上，这样需求量Q可以看成是价格p的一元函数，称为**需求函数**．记作

$$Q=Q(p),\qquad (p\text{ 为自变量，}Q\text{ 为因变量}).$$

一般来说，降低商品的价格，需求量增加；提高商品的价格，需求量减少．因此说，需求函数为价格p的单调减少函数．

常见的需求函数模型有：

线性函数形式 $Q=b-ap$，（$a>0$，$b>0$）；

反比函数形式 $Q=\dfrac{k}{p}$，（$k>0$，$p\neq 0$）；

二次函数形式 $Q=a-bp-cp^2$，（$a>0$，$b>0$，$c>0$）；

幂函数形式 $Q=\dfrac{k}{p^u}$，（$u>0$，$k>0$，$p\neq 0$）；

指数函数形式 $Q=a\mathrm{e}^{-bp}$，（$a>0$，$b>0$）．

需求函数$Q=Q(p)$的反函数，就是**价格函数**，记作

$$P=P(q),\qquad (q\text{ 为自变量，}P\text{ 为因变量}).$$

价格函数也是一个单调减少函数，也能反映出商品的需求与价格的关系．

2. 供给函数

“供给”是指在一定价格条件下，生产者愿意出售并且有可能提供出售的商品量．

供给与需求是相对的概念，需求是对购买者而言，供给是对生产者而言．供给也是由许多因素决定的，如果略去价格p以外的其他影响因素，则商品的供给量S也是价格p的一元函数，称为**供给函数**，记作

$$S=S(p),\qquad (p\text{ 为自变量，}S\text{ 为因变量}).$$

一般来说，价格上涨，生产者愿意向市场提供更多的商品，使供给量增加；反之，价