第1章

有限元法简介

◇ 本章简单介绍有限元法的基本概念、起源与发展，有限元法的基本原理及分析过程，有限元法在工程中的应用。另外还介绍弹性力学的基础知识，包括基本变量、基本方程、能量原理、平面问题等，这些知识是有限元法的理论基础。有限元法的基本原理及分析过程是本章的重点。

1.1 有限元法的产生

随着现代工业技术的发展，不断要求设计高质量、高水平的大型、复杂和精密的机械及工程结构。为此人们必须预先通过有效的计算手段，确切地预测即将诞生的机械和工程结构，在未来工作时所发生的应力、应变和位移状况。但是传统的一些方法往往难以完成对工程实际问题的有效分析，弹性力学的经典理论由于求解偏微分方程边值问题的困难，只能解决结构形状和承受载荷较简单的问题，对于几何形状复杂、不规则边界、有裂缝或厚度突变，以及几何非线性、材料非线性等问题，试图按经典的弹性力学方法获得解析解是十分困难的，甚至是不可能的。因此，需要寻求一种简单而又精确的数值计算方法，有限元法正是为满足这种要求而产生和发展起来的一种十分有效的数值计算方法。

有限元法自问世以来，在其理论和应用研究方面都得到了快速、持续不断的发展。目前，有限元法已经成为工程设计和科研领域的一项重要分析技术和手段。

1.1.1 有限元法的发展过程

有限元法离散化的思想可以追溯到20世纪40年代。1943年，R.Courant在求解扭转问题时为了表征翘曲函数，首次将截面分成若干三角形区域，在各个三角形区域设定一个线性的翘曲函数，求得扭转问题的近似解。其实质就是有限元法分片近似、整体逼近的基本思想。与此同时，一些应用数学家和工程师由于各种原因也涉及过有限元的概念，但由于受到当时计算能力的限制，这些工作并没有引起人们的注意，被认为没有多大应用价值，直到电子计算机出现并得到应用之后，这一思想才引起关注。

有限元法第一次成功的尝试是1956年波音公司的Turner，Clough等人在分析飞机结构时，将分片近似、整体逼近的思想和结构力学的矩阵位移法应用于弹性力学的平面问题，采用直接刚度法，按照弹性力学的基本原理建立了分片小区域（即三角形单元）上的特性方程，首次采用计算机求解，给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。1960年，Clough在题为“平面应力分析的有限单元法”的论文中首次使用有限单元法一词。此后这一名称得到了广泛承认，这一方法也被大量工程师开始用于处理结构分析、流体和热传导等复杂问题。

20 世纪六七十年代，是有限元迅速发展的时期，除力学界外，大量数学家也参与了这一工作。1967 年，O.C.Zienkiewicz 和 Y.K.Cheung（张佑启）出版了第一本有关有限元分析的专著《连续体和结构的有限元法》，此书是有限元法的名著，后更名为《有限单元法》。1972 年，J.T.Oden 出版了第一本处理非线性连续介质问题的专著《非线性连续体的有限元法》。从此，有限元法就以坚实的理论基础和完美的计算格式屹立于数值计算方法之林，被认为是一种完美无缺和无所不能的方法。

近几十年来，有限元法得到迅速发展，已出现多种新型单元和求解方法。自动网格划分和自适应分析技术的采用，也大大加强了有限元法的解题能力。由于有限元法的通用性及其在科学研究和工程分析中的作用和重要地位，众多著名公司更是投入巨资来研发有限元分析软件，推动了有限元分析软件的巨大发展，使有限元法的工程应用得到迅速普及。目前在市场上得到认可的国际知名有限元分析通用软件有 ANSYS、NASTRAN、MARC、ADINA、ABAQUS、ALGOR、COSMOS 等，还有一些适用特殊行业的专用软件，如 DEFORM、AUTOFORM、LS-DYNA 等。

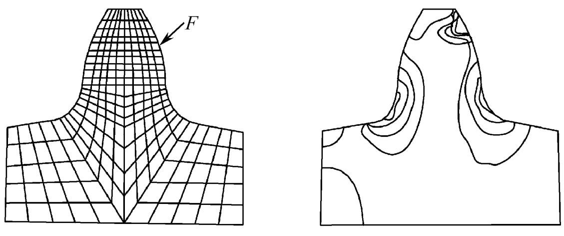
我国的力学工作者为有限元方法的初期发展也做出了许多贡献。近几十年，我国在有限元应用及软件开发方面也做了大量的工作，取得了一定的成绩，只是和国外的成熟产品相比还存在较大的差距。

经过半个世纪的发展，有限元法已经相当成熟，作为一种通用的数值计算方法，已经渗透到许多科研和工程应用领域。基于其良好的理论基础、通用性和实用性，可以预计，随着现代力学、计算数学、计算机技术、CAD 技术等的发展，有限元法必将得到进一步的发展和完善，并在国民经济建设和科学技术领域发挥更大的作用。

1.1.2 有限元法的基本思想

有限元法是一种基于变分法而发展起来的求解微分方程的数值计算方法，该方法以计算机为手段，采用分片近似，进而逼近整体的研究思想求解物理问题。

有限元法的基本思想为“化整为零、集零为整”。首先，将物体（或求解域）离散为有限个互不重叠仅通过节点相互连接的子域(即单元),原始边界条件也被转化为节点上的边界条件，此过程常称为离散化。其次，在每个单元内，选择一种简单近似函数来分片逼近未知的单元内位移分布规律，即分片近似，并按弹性理论中的能量原理（或用变分原理）建立单元节点力和节点位移之间的关系。最后，把所有单元的这种关系式集合起来，就得到一组以节点位移为未知量的代数方程组，解这些方程组就可以求出物体上有限个节点的位移。这就是有限元法的创意和精华所在。



（a）有限元模型　　（b）最大切应力等应力线

图 1-1　对直齿圆柱齿轮的轮齿进行的变形和应力分析

图 1-1 是用有限元法对直齿圆柱齿轮的轮齿进行的变形和应力分析，其中图 1-1（a）为有限元模型，图 1-1（b）是最大切应力等应力线。在图 1-1（a）中采用八节点四边形等参数单元把轮齿划分成网格，这些网格称为单元。网格间相互连接的点称为节点。网格与网格的交界线称为边界。显然，图中的节点数是有限的，单元数目也是有限的，这就是“有限单元”一词的由来。

在整个有限元分析过程中，离散化是分析的基础。有限元法的离散对单元形状和大小没有规则划分的限制，单元可以为不同形状，且不同单元可以相互连接组合。所以，有限元法可以模型化任何复杂几何形状的物体或求解区域，离散精度高。

分片近似是有限元法的核心。有限元法是应用局部的近似解来建立整个求解域的解的一种方法。针对一个单元来选择近似函数，积分计算也是在单元内完成的，由于单元形状简单，一般采用低阶多项式函数就能较好地逼近真实函数在该单元上的解，此过程可认为是里兹法的一种局部化应用。而整个求解域内的解可以看作是所有单元近似解的组合。对于整个求解域，只要单元上的近似函数满足收敛性要求，随着单元尺寸的不断缩小，有限元法提供的近似解将收敛于问题的精确解。

矩阵表示和计算机求解是有限元法的关键。因为有限元方程是以节点值和其导数值为未知变量的，节点数目多，形成的线性方程组维数很高，一般工程问题都有成千上万，复杂问题可达百万或更多。所以，有限元方程必须借助矩阵进行表示，只有利用计算机才能求解。

1.1.3　有限元法的分类

有限元法从选择基本未知量的角度来看，可分为三类：位移法、力法和混合法。

（1）位移法：以节点位移为基本未知量的求解方法。

（2）力法：以节点力为基本未知量的求解方法。

（3）混合法：一部分以节点位移，另一部分以节点力作为基本未知量的求解方法。

由于位移法通用性较强，计算机程序处理简单、方便，因此得到广泛的应用。本书只讨论最为普遍的位移法。

1.2　有限元法的基本步骤、误差和特点

1.2.1　有限元法基本步骤

有限元分析的基本步骤可归纳为：结构离散化、单元分析和整体分析。

1．结构离散化

结构离散是有限元分析的基础，是进行有限元分析的第一步。所谓结构离散，就是用假想的线或面将连续物体分割成由有限个单元组成的集合体，且单元之间仅在节点处连接，单元之间的作用仅由节点传递。如图 1-2 所示为平面连续体被离散为三角形单元的集合。

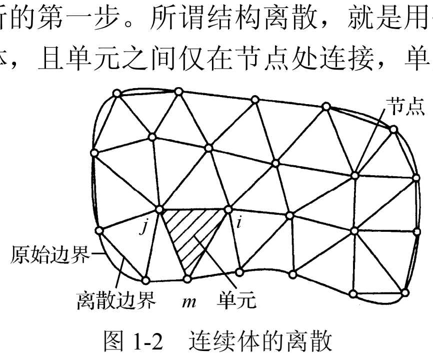


图 1-2　连续体的离散

单元和节点是有限元法中两个重要的概念。从理论上讲，单元形状是任意的，没有形状的限制，但在实际计算中，常用的单元形状都是一些简单的形状，如一维的线单元，二维的三角形单元、矩形单元、四边形单元，三维的四面体单元、五面体单元、六面体单元等。可见，不管单元取什么样的形状，一般情况下，单元的离散边界总不可能与求解区域的真实边界完全吻合，这就带来了有限元法的一个基本近似性——几何近似。在一个具体的机械结构中，确定单元的类型

和数目，以及哪些部位的单元可以取得大一些，哪些部位的单元应该取得小一些，需要由经验来做出判断。单元划分越细，则描述变形情况越精确，即越接近实际变形，但计算量越大。

所以，有限元法中分析的结构已不是原有的物体或结构，而是同样材料的众多单元以一定方式连结成的离散物体。这样，用有限元分析计算所获得的结果只是近似的。若划分的单元数目足够多而又合理，则所获得的计算结果就越逼近实际情况。

2. 单元分析

单元分析包括三方面内容。

（1）选择位移函数。

连续体被离散成单元后，每个单元上的物理量（如位移、应变等）的变化规律，可以用较简单的函数来近似表达。这种用于描述单元内位移的简单函数称为位移函数，又称位移模式。通常的方法是以节点位移为未知量，通过插值来表示单元内任意一点的位移。根据数学理论，定义某一闭区域内的函数总可用一个多项式来逼近，且多项式的数学运算比较容易，所以，位移函数常常取为多项式。多项式的项数越多，则逼近真实位移的精度越高，项数的多少由单元的自由度数决定。

由于所采用的函数是一种近似的试函数，一般不能精确地反映单元中真实的位移分布，这就带来了有限元法的另一种基本近似性。

采用位移法时，物体或结构离散化之后，就可把单元中的一些物理量如位移、应变和应力等由节点位移来表示。

（2）建立单元平衡方程。

在选择了单元类型和相应的位移函数后，即可按弹性力学的几何方程、物理方程导出单元应变与应力的表达式，最后利用虚位移原理或最小势能原理建立单元的平衡方程，即单元节点力与节点位移间的关系。此方程也称为刚度方程，其系数矩阵称为单元刚度矩阵。

$$\boldsymbol{k}^e\boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{F}^e \tag{1-1}$$

式中 e——单元编号；

$\boldsymbol{\delta}^e$——单元的节点位移向量；

$\boldsymbol{F}^e$——单元的节点力向量；

$\boldsymbol{k}^e$——单元刚度矩阵。

根据单元的材料性质、形状、尺寸、节点数目、位置等，找出单元节点力和节点位移的关系式，这是单元分析中的关键一步。

（3）计算等效节点力。

物体离散化后，假定力是通过节点从一个单元传递到另一个单元的。但是，对于实际的连续体，力是从单元的公共边界传递到另一个单元中去的。因而，这种作用在单元边界的表面力、体积力或集中力都需要等效地移到节点上去，也就是用等效节点力来代替所有作用在单元上的力。

3. 整体分析

整体分析的基本任务包括建立整体平衡方程，形成整体刚度矩阵和节点载荷向量，完成整体方程求解。

（1）整体平衡方程的建立。

有限元法的分析过程是先分后合，即先进行单元分析，在建立了单元平衡方程以后，再进

行整体分析。也就是把各个单元的平衡方程集成起来，形成求解区域的平衡方程，此方程为有限元位移法的基本方程。集成所遵循的原则是各相邻单元在共同节点处具有相同的位移。

形成整体平衡方程为

$$\boldsymbol{K\delta} = \boldsymbol{F} \tag{1-2}$$

式中　$\boldsymbol{K}$——整体结构的刚度矩阵；

$\boldsymbol{\delta}$——整体节点位移向量；

$\boldsymbol{F}$——整体载荷向量。

（2）方程求解。

在引入边界条件之前，整体平衡方程是奇异的，这意味着整体方程是不可解的。从物理上讲，若物体的几何位置没有被约束，受力处于平衡状态的物体也会产生刚体位移，因而，不可能有唯一的位移解。只有在整体平衡方程中引入必要的边界约束条件，整体平衡方程才能求解。方程求解包括边界条件引入和数值计算，利用适当的数值方法求出未知的节点位移以后，就可按弹性力学的应力、应变公式计算出各个单元的应变、应力等物理量。

1.2.2　有限元解的误差及产生原因

有限元法是一种数值计算方法，所得到的解只是问题的一个近似解，不能像弹性力学那样获得其精确解，因此，存在误差是不可避免的。理论上讲，产生误差的原因主要来自两个方面，即模型误差和计算误差。所谓模型误差是指将实际物理问题抽象为适合计算机求解的有限元模型时所产生的误差，即有限元模型与实际问题之间的差异。它包括物理问题的抽象表示误差（即数学描述的正确性）、有限元法离散处理和简化造成的误差。如模型边界离散过程中的以直代曲会导致离散模型与实际模型有差异，如图 1-2 所示；单元位移函数的近似构造导致与实际位移场存在差异；边界条件的简化近似处理导致与实际情况存在差异；单元形状的不规则或尺寸相差太大会导致局部应力严重失真，产生很大误差。不过这类误差，理论上都是可以消除的，只要有限元单元尺寸趋于无穷小或单元数目足够多，则离散误差、位移函数误差及边界条件误差都将趋于零。所以，这类误差是可控的，可以按工程要求进行控制。所谓计算误差是指由于计算机的数值字长的限制导致计算过程中存在的舍入误差和计算方法所产生的截断误差。就目前计算机的数字表示和计算方法而言，计算误差理论上是不可避免的，只能通过提高计算机性能、选择合适的运算次数和计算方法等来降低计算误差。有限元计算结果误差的分类如图 1-3 所示。

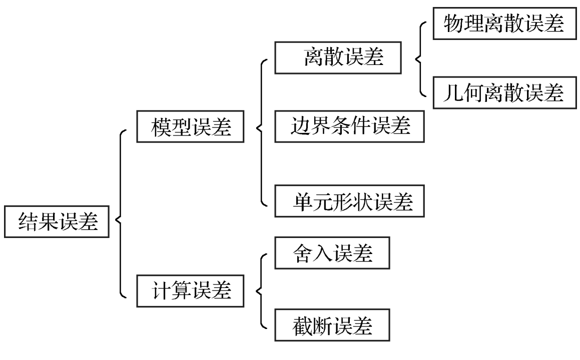


图 1-3　有限元计算结果误差分类

1.2.3　有限元法的特点

有限元法经过几十年的发展，已成为一种通用的数值计算方法。它具有鲜明的特点，具体表现在以下方面。

1．基本思想简单朴素，概念清晰易理解

有限元法的基本思想就是几何离散和分片插值，其概念清晰、容易理解。用离散单元的组合体来逼近原始结构，体现了几何上的近似；而用近似函数逼近未知变量在单元内的真实解，

体现了数学上的近似；利用与原问题等效的变分原理（如最小势能原理）建立有限元基本方程（刚度方程）又体现了其明确的物理背景。

2．理论基础厚实，数值计算稳定、高效

有限元法计算格式的建立既可基于物理概念推得，如直接刚度法、虚功原理，也可基于纯数学原理推得，如泛函变分原理、加权残值法。通常直接刚度法、虚功原理用于杆系结构或结构问题的方程建立；而变分原理涉及泛函极值，既适用于简单的结构问题，也适用于更复杂的工程问题（如温度场问题）。当给定的问题存在经典变分叙述时，利用变分原理很容易建立这类问题的有限元方程。当给定问题的经典变分不存在时，可采用更一般的方法来建立有限元方程，如加权残值法。加权残值法由问题的基本微分方程出发而不依赖于泛函，可用于处理一般问题的有限元方程的建立，如流固耦合问题。所以，有限元法不仅具有明确的物理背景，更具有坚实的数学基础，且数值计算的收敛性、稳定性均可从理论上得到证明。

3．边界适应性强，精度可控

和早期的其他数值计算方法（如差分法）相比，有限元法具有更好的边界适应性。由于有限元法的单元不限于均匀规则的单元，单元形状有一定的任意性，单元大小可以不同，且单元边界可以是曲线或曲面，不同形状的单元可进行组合，所以，有限元法可以处理任意复杂边界的结构。同时，由于有限元法的单元可以通过增加插值函数的阶次来提高有限元解的精度，避免了里兹法在整个计算区域构造逼近函数，难以满足局部区域的计算精度的问题。因此，理论上讲，有限元法可通过选择单元插值函数的阶次和单元数目来控制计算精度。

4．计算格式规范，易于程序化

有限元法计算格式规范，用矩阵表达，方便处理，易于计算机程序化。

5．计算方法通用，应用范围广

有限元法是一种通用的数值计算方法，应用范围广，不仅能分析具有复杂边界条件、线性和非线性、非均质材料、动力学等结构问题，还可推广到解答数学方程中的其他边值问题，如热传导、电磁场、流体力学等问题。理论上讲，只要是用微分方程表示的物理问题，都可用有限元法进行求解。

总之，有限元法已被公认为应力分析的有效工具，受到普遍的重视和广泛应用。

1.3　有限元法的应用

1.3.1　有限元法的应用领域

有限元法虽起源于结构的平面问题分析，但经过众多学者的不断努力，加之计算机技术的突飞猛进，有限元法的应用领域得到迅速扩展。现在已由二维问题扩展到三维问题、板壳问题，由平衡问题扩展到动态问题、特征值问题和波动问题。分析的对象也从弹性材料扩展到弹塑性、塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等。从固体力学扩展到流体力学、电磁学、传热学等学科，由线性问题扩展到多重非线性的耦合问题。应用领域逐步扩展，从航空技术领域扩展到航天、土木建筑、机械制造、水利工程、造船、电子技术及原子能等，由单一物理场的求解扩展到多

物理场的耦合，由单一构件问题扩展到多个物体的结构问题，其应用的深度和广度都得到了极大的拓展。有限元法的工程应用如表 1-1 所示。

表 1-1　有限元法的工程应用

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
结构力学和宇航工程学	梁、板、壳结构的分析；复杂或混杂结构的分析；二维与三维应力分析	结构的稳定性；结构的固有频率和振型；线性粘弹性阻尼	应力波的传播；结构对于非周期载荷的动态响应；耦合热弹性力学与热粘弹性力学
土力学，基础工程学	二维与三维应力分析；填筑和开挖问题；边坡稳定性问题；土壤与结构的相互作用；坝、隧洞、钻孔、涵洞、船闸等的分析；流体在土壤和岩石中的稳态渗流	土壤与结构组合物的固有频率和振型	土壤与岩石中的非定常渗流；在可变形多孔介质中的流动-固结 应力波在土壤和岩石中的传播；土壤与结构的动态相互作用
热传导	固体和流体中的稳态温度分布		固体和流体中的瞬态热流
流体动力学，水利工程学和水源学	流体的势流；流体的粘性流动；蓄水层和多孔介质中的定常渗流；水工结构和大坝的分析	湖泊和港湾的波动（固有频率和振型）；刚性或柔性容器中流体的晃动	河口的盐度和污染研究（扩展问题）；沉积物的推移；流体的非定常流动；波的传播；多孔介质和蓄水层中非定常渗流
核子工程学	反应堆安全壳结构的分析；反应堆和反应堆安全壳结构的稳态温度分布		反应堆安全壳结构的动态分析；反应堆结构的热粘弹性分析；反应堆和反应堆安全壳结构中的非稳态温度分布
电磁学	二维和三维静态电磁场分析		二维和三维时变、高频电磁场分析
生物力学工程问题	人体的脊柱、头骨、骨关节、牙移植等应力分析		响应分析

1.3.2　有限元法在工程中的应用

基于功能完善的有限元分析软件和高性能的计算机硬件，可以对设计的结构进行详细的力学分析，以获得尽可能真实的结构受力信息，这样就可以在设计阶段对可能出现的各种问题进行安全评判和设计参数修改。据有关资料显示，一个新产品的问题有 60%以上可以在设计阶段消除，甚至有的结构在施工过程也需要进行精细的设计，要做到这一点就需要有限元分析这样的手段。

1．有限元法在汽车产品开发中的应用

有限元法在汽车工业中得到了广泛应用。有限元法在汽车零部件结构强度、刚度分析中最显著的应用是车架、车身的设计。车架和车身有限元分析的目的在于提高其承载能力和抗变形能力，减轻其自身重量并节省材料。有限元法在汽车安全性评价方面更是发挥了重要作用。早期的汽车安全性评价主要通过汽车碰撞实验进行，存在的主要问题是周期长、费用高和容易造成人身伤害。此外，此类实验属于发现实验，主要通过实验发现的现象对汽车的设计进行修改和优化。现在将有限元方法用于汽车安全性评价，可以通过虚拟仿真发现问题，大量实验通过虚拟仿真完成，实验性质也从发现实验转变为验证实验，与传统的实验方法相比，具有周期短、费用低和能够减少人员伤害的优点。

2．有限元法在鸟巢建设中的应用

北京的国家体育场鸟巢由纵横交错的钢铁枝蔓筑成，如图 1-4 所示，是世界上跨度最大的钢结构建筑，它是鸟巢设计中最精彩的部分，也是鸟巢建设中最艰难的。看似轻灵的枝蔓总质量达 42000 吨，其中顶盖以及周边悬空部分的质量为 14000 吨。在鸟巢建设过程中，采用了 78 根临时搭建的支撑塔架支撑着 14000 吨钢铁的枝蔓，也就是产生了 78 个受力区域。在钢结构焊接完成后，需要将其缓慢而又平稳地卸去，让鸟巢由被外力支撑的状态变成完全由自身结构支撑。支撑塔架的卸载，对整个钢结构本身来说其实是加载，如何卸载，需要进行非常详细的数值分析，以确定出最佳的卸载方案。

图 1-4　国家体育场鸟巢的钢铁枝蔓结构

3．有限元法在金属成型模具和工艺设计中的应用

有限元法在金属成型模具和工艺设计中得到了广泛应用。金属成型过程十分复杂，理论上属于弹塑性、大变形和接触非线性相互耦合问题。采用有限元法研究焊管、无缝钢管的成型过程，可以为成型工艺和模具设计提供参考。有限元法的应用，使基于经验的成型工艺与模具设计逐步转变为基于数值模拟结果的成型工艺与模具设计，提高了设计水平，降低了设计周期。

1.3.3　有限元法在产品开发中的作用

有限元法的出现和发展，使产品设计与制造发生了根本性的改变，使产品开发朝着数字化设计、分析、优化及数字化制造与控制的综合化方向发展。

在现代产品开发过程中，CAD/CAE/CAM 已成为基本工具，作为 CAE 工具重要组成之一的有限元法，更是产品开发必不可少的工具。CAD 工具用于产品结构设计，形成产品的数字化模型。有限元法则用于产品性能的分析与仿真，帮助设计人员了解产品的物理性能和破坏的可能原因，分析结构参数对产品性能的影响，对产品性能进行全面预测和优化，帮助工艺人员对产品的制造工艺及试验方案进行分析设计。实际上，当前有限元法在产品开发中的作用，已从传统的零部件分析、校核设计模式发展为与计算机辅助设计、优化设计、数字化制造融为一体的综合设计。有限元法已成为提高产品设计质量的有效工具。图 1-5 给出产品开

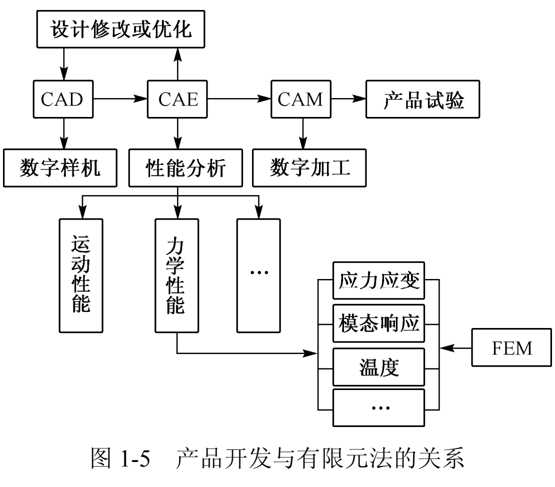


图 1-5　产品开发与有限元法的关系

发与有限元法的关系。可以预见，随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展，有限元法作为一个具有坚实理论基础和广泛应用效力的通用数值分析工具，必将在产品开发中发挥更大的作用。

有限元法已经成为提高产品设计质量的有效工具。有限元法的应用大大提高了产品设计效率，缩短了产品开发周期；优化了设计方案，提高了产品质量和工作性能；降低了材料消耗 ，减少了试件制作，降低了成本 。

有限元法在产品设计和研究中显示出很强的优越性，越来越多的企业和技术人员意识到CAE 技术是一种巨大是生产力，不久的将来，有限元法的应用必将更加普及，必将推动科技进步和社会发展，并会取得巨大的经济效益。

1.4 弹性力学基本知识

弹性体是指卸载后能够完全恢复其初始状态的物体。弹性力学则是研究弹性体在载荷和约束作用下应力和变形分布规律的一门学科。有限元法起源于弹性力学问题的求解，本节将通过弹性力学问题来介绍有限元法的基本理论。首先介绍弹性力学问题的基本方程，然后介绍弹性力学问题的能量原理，它是有限元法近似求解的基本原理。

1.4.1 弹性力学的基本假设

在建立弹性力学基本方程时，如果考虑的因素过多，就会导致方程过于复杂，很难求解。因此，为了突出问题的实质，使问题简单化，必须按照所求解的实际问题，给出一些基本假设，忽略一些暂不考虑的因素。通常情况下，弹性力学中有以下五个基本假设。

（1）连续性假设。假设物体是连续的，整个物体的体积被组成该物体的介质所填满，没有任何空隙，而且在整个变形过程中保持连续。这样，物体中的一些物理量，例如应力、应变、位移等，可用坐标的连续函数表示它们的变化规律，物体在变形过程中始终保持连续，即原来相邻的两个任意点，变形后仍为相邻点，不会出现开裂或重叠的现象。

（2）均匀性假设。假定整个物体由同一种材料组成，在各不同点处都具有相同的物理性质，物体各部分具有相同的弹性，物体的弹性不随位置坐标而改变。

（3）各向同性假设。假定整个物体在各个方向都有相同的力学性质，与方向无关。这样，物体的弹性常数不会随方向而改变。反之，称为各向异性，如木材等。

（4）完全弹性假设。假设使物体产生变形的外力去除以后，物体能够完全恢复原形，没有任何剩余变形。若这样的材料服从胡克定律，即应变与引起该应变的应力成正比，则称这样的材料为线弹性材料，反之，称为非线性的弹性材料。若不满足，则材料为塑性的。

（5）小变形假设。假设物体的位移和应变是微小的，即物体在外力等作用下所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸。这样，在建立物体受力变形后的平衡方程时，可以采用变形前的尺寸代替变形后的尺寸，而不会引起显著误差。

满足前四个假定的物体，称为理想弹性体。若满足全部假设，则称为理想弹性体的线性问题，简称线弹性问题。

1.4.2 弹性力学的基本变量

在弹性力学中经常涉及四个基本物理量：外力、应力、应变和位移，应力、应变和位移是

描述物体物理状态的基本变量。分别说明如下。

1．外力

作用在物体上的外力可分为体积力和表面力两大类，分别简称为体力和面力。

（1）体力（体积力）：是指分布在物体体积内的力，如重力、惯性力、磁性力等。常用其在单位体积上的体力表示，该矢量在坐标轴 x、y、z 上的投影记为 P_x、P_y、P_z，称为体力分量，量纲为[力][长度]$^{-3}$。符号规定为沿坐标轴的正向为正，反之为负。

（2）面力（表面力）：是指作用在物体表面上的力，如流体压力、接触压力、风载荷、约束反力等。常用其在单位面积上的面力表示，该矢量在坐标轴 x、y、z 上的投影记为 q_x、q_y、q_z，称为面力分量，量纲为[力][长度]$^{-2}$。符号规定为沿坐标轴正方向为正，反之为负。

有限元分析中也使用集中力这一概念，其正负号规定同上。

2．应力

当弹性体受外力作用，或由于温度有所改变时，其内部将产生内力。为了研究物体内某一点 P 处的内力，假想用通过物体内 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分，如图 1-6 所示。将 B 部分撇开，根据力的平衡原则，B 部分将在截面 mn 上对留下的 A 部分作用一定的内力。在 mn 截面上取包含 P 点的微小面积 ΔA，设作用于 ΔA 上的内力为 $\Delta\boldsymbol{Q}$，则内力的平均集度，即平均应力为 $\dfrac{\Delta\boldsymbol{Q}}{\Delta A}$。令 ΔA 无限减小而趋于 P 点时，$\dfrac{\Delta\boldsymbol{Q}}{\Delta A}$ 将趋于一定的极限 S，这个极限矢量 $\boldsymbol{S}$ 就是物体在 P 点的应力，表示为

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{Q}}{\Delta A}=\boldsymbol{S}$$

显然，应力就是弹性体内某一点作用于某截面单位面积上的内力，它反映了内力在截面上的分布密度。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中，通常都不会使用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量和物体的变形或材料强度都没有直接的关系。与物体的变形及材料强度直接相关的是应力在作用截面的法向和切向的分量，也就是正应力 σ 和剪应力 τ，如图 1-7 所示。应力及其分量的量纲为[力][长度]$^{-2}$。

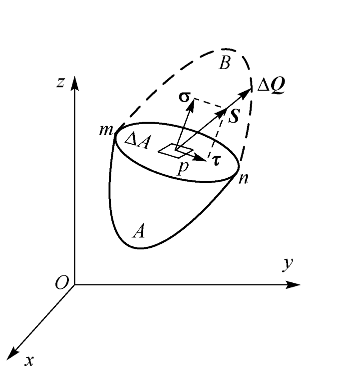


图 1-6　应力概念

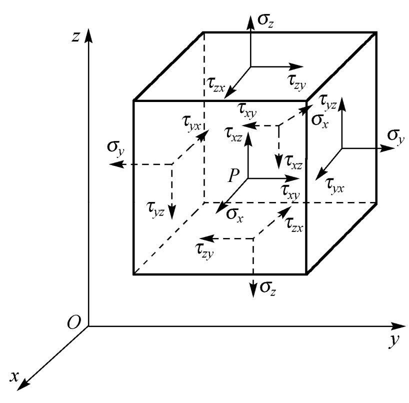


图 1-7　应力分量

显然，在物体内同一点 P 的不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的各个截面上应力的大小和方向，即应力状态，在这一点从物体内取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行

于坐标轴，如图 1-7 所示。把每个侧面上的应力沿坐标轴方向进行分解，垂直于微元体表面的应力称为正应力，用字母σ表示，并用一个角标表示受力面及作用方向。例如，σ_x表示正应力作用在法线为x轴的平面上，方向与x轴平行的应力。平行于微元体表面的应力称为剪应力，用字母τ表示，并用两个角标表示受力面及作用方向，第一个角标表示受力面的法线方向，第二个角标表示力的方向。例如，τ_{xy}表示剪应力作用在法线为x轴的平面上，方向与y轴平行的应力。

根据剪应力互等定律，即作用在两个互相垂直的面上，并且垂直于该两个面交线上的剪应力互等，微元体上 6 个剪应力存在如下关系：

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}\,,\quad \tau_{yz}=\tau_{zy}\,,\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

这样在任意点P的应力只有 6 个独立分量，即图 1-7 所示的 3 个正应力分量和 3 个剪应力分量。因此，弹性体在载荷作用下，体内任意一点的应力状态可由 6 个应力分量σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}来表示。

应力的矩阵形式

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1-3}$$

称为应力向量或应力列阵。

由于弹性体内各点的应力状态不一定相同，因此应力分量不是常量，而是坐标x，y，z的函数。

如果某一个截面上的外法线为沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一个正面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个截面上的外法线为沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图 1-7 中所示的应力分量全部都是正的。注意，虽然有上述正负号规定，对于正应力来说，其结果和材料力学中的规定相同（拉应力为正，而压应力为负），但是，对于剪应力来说，结果却和材料力学中的规定不完全相同。

3．应变

物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示，物体形状的改变可归结为长度的改变和角度的改变。在外力作用下弹性体将产生变形，其变形的大小可以用微元体棱边的长度和它们之间夹角的变化来描述。

为了研究物体内任一点P的变形情况，同样在点P附近用平行于坐标面的平面截取一微元体，三个微小的棱边线段$PA=\mathrm{d}x$，$PB=\mathrm{d}y$，$PC=\mathrm{d}z$，如图 1-8 所示。

当微元体变形时，三个棱边的长度和它们之间的直角都将发生改变。各棱边单位长度的伸缩称为正应变，各面之间直角的改变量称为剪应变。正应变用ε表示，ε_x表示x方向的PA的正应变，$\varepsilon_x=\dfrac{\Delta x}{a}$，如图 1-9（a）所示，其余类推。剪应变用$\gamma$表示，$\gamma_{xy}$表示线段$PA$、$PB$之

间直角的改变，它由两部分组成，即 $\gamma_{xy}=\alpha+\beta$，如图 1-9（b）所示，用弧度表示。显然，$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$，其余类推。应变的正负号规定是：正应变以伸长为正，缩短为负；剪应变以直角变小时为正，变大时为负。

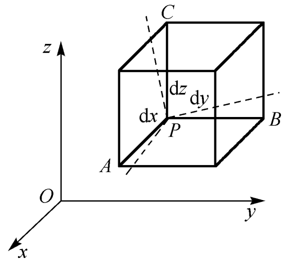


图 1-8　点 P 应变状态

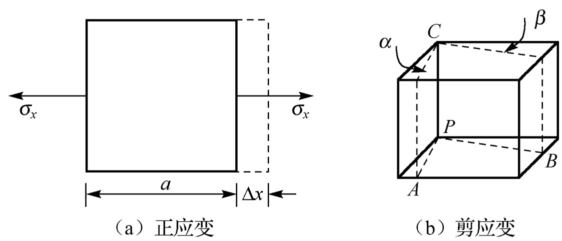


图 1-9　应变的几何意义

弹性体内任意一点的应变状态，可以由 6 个应变分量 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx} 来表示。

应变的矩阵形式

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1-4}$$

称为应变向量或应变列阵。

应变分量同样不是常量，而是坐标 x，y，z 的函数，当这 6 个分量为已知时，则该点的变形就完全确定了。

4．位移

弹性体在载荷作用下，不仅会发生变形，还将产生位移，即弹性体内质点位置的变化。物体内任意一点的位移可由沿直角坐标轴 x、y、z 方向的三个位移分量 u、v、w 来表示。它的矩阵形式

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u & v & w\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1-5}$$

称为位移向量或位移列阵。

正负号规定是沿坐标轴正向为正，反之为负。弹性体发生变形时，各质点的位移不一定相同，因此，位移也是坐标 x，y，z 的函数。

值得注意的是，位移由两部分组成：一是周围介质变形使之产生的刚体位移，二是本身变形使内部质点产生的位移。后者与应变有确定的几何关系。

一般而论，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量，都是随该点的位置变化而变化的，是位置坐标的函数。在弹性力学问题中，通常物体的形状大小、材料特性、受力和边界约束情况是已知的，而受力作用后的应力分量、应变分量和位移分量是待求的，是未知的。因此，通常将应力、应变和位移作为描述弹性力学问题的基本变量，弹性体内任意一点在任意方向的位移、应力和应变都可通过它们来进行描述。

1.4.3　弹性力学的基本方程

弹性力学的基本方程描述了弹性体内任一点应力、应变、位移和外力之间的关系，包括几何方程、物理方程和平衡方程三类。

1．几何方程

描述弹性体应变分量与位移分量之间关系的方程称为几何方程。对于空间问题，应变分量和位移分量之间的几何关系可以表示为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \tag{1-6}$$

把式（1-6）写成矩阵形式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

上式说明空间一点的 6 个应变分量可用该点的 3 个位移分量来表示，当物体的位移分量完全确定时，应变分量即被完全确定。反之，当应变分量完全确定时，位移分量却不能完全确定。这是因为物体产生位移有两个原因，一是由于物体受力变形而引起的位置变化，二是物体的刚体运动而产生的位置变化，称为刚体位移。而刚体位移是物体的整体移动，是与变形无关的位移，这说明即使物体有位移也不表示就一定有变形产生。由此可知，虽然物体的变形已定，而它还可能存在各种刚体位移，所以不能由应变分量来唯一确定位移分量。

2．物理方程

物理方程描述应力分量与应变分量之间的关系，对于完全弹性体的各向同性体，它们为广义胡克定律：

$$\sigma_x = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_z\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x + \varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_z\right)$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y + \varepsilon_z\right) \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \\
\tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz} \\
\tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{zx}
\end{aligned}
\tag{1-8}
$$

式中，E、μ 均为材料的弹性常数，E 为材料的弹性模量，μ 为泊松比。

把式（1-8）写为矩阵形式：

$$
\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}
\tag{1-9a}
$$

简记为

$$
\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1-9b}
$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 称为弹性矩阵，由材料的弹性模量 E 和泊松比 μ 确定，与坐标位置无关。

3．平衡方程

当弹性体在外力作用下保持静止或等速直线运动时，称此弹性体处于平衡状态。此时，弹性体中的应力不是任意的，它必须满足静力平衡条件，即弹性体内任一点满足平衡方程，在给定表面力的边界上满足应力边界条件。

体积力一般用单位体积上的力在 3 个坐标轴方向上的投影 P_x、P_y、P_z 表示。根据微元体的静力平衡条件，可以得到直角坐标系中的三维平衡方程：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + P_x = 0 \\
\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + P_y = 0 \\
\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z = 0
\end{cases}
\tag{1-10}
$$

平衡方程是弹性体内部任一点都必须满足的条件，它说明 6 个应力分量不是独立的，它们

通过3个平衡方程互相联系。

4．边界条件

由上述几何方程（1-6）、物理方程（1-9）和平衡方程（1-10）可知，足够数目的微分方程（15个）可求解未知的应力、应变及位移（15个未知量，即6个应力分量、6个应变分量和3个位移分量），而微分方程求解中出现的常数，则必须根据定解条件确定。静力学的定解条件只包含边界条件，它通常分为位移边界条件和应力边界条件。

物体在边界上的位移分量已知的条件称为位移边界条件，即在已知边界$\varGamma_u$上，有

$$u_{\varGamma_u}=\bar{u}，\quad v_{\varGamma_u}=\bar{v}，\quad w_{\varGamma_u}=\bar{w} \tag{1-11}$$

其中$\bar{u}$、$\bar{v}$和$\bar{w}$为在边界$\varGamma_u$上沿x，y，z方向的已知位移。

物体在边界上所受的面力分量已知的条件称为应力边界条件，即在已知边界$\varGamma_p$上，有

$$\begin{cases} q_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ q_y = l\tau_{yx} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ q_z = l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_z \end{cases} \tag{1-12}$$

式中，q_x、q_y、q_z为边界上一点处单位面积上表面力分量，l、m、n分别表示边界$\varGamma_p$上外法线方向的方向余弦。

值得注意的是，弹性力学问题的实际求解，并不是同时求解上述15个方程，得出全部未知量，而是先求出一部分（称为基本未知量），然后再通过基本方程求解其他未知量。

实际上，对于复杂的弹性结构，上述15个方程的求解，不论采用哪种方法来寻求解析解都极其困难。因此，常采用泛函变分原理近似求解上述弹性力学问题，即把上述求解微分方程的边值问题转化为求解泛函的极值问题。由于在弹性力学中，这种泛函就是物体的能量表达式，所以，弹性力学问题的这种基于变分原理的求解方法称为能量原理。它是求解复杂弹性结构近似解最有效的方法，也是有限元法的理论基础。

1.4.4　弹性问题的能量原理

1．虚位移原理

虚位移是一种假想加到结构上的可能的、任意的、微小的位移。其中，所谓“可能的”是指结构所允许的，即满足结构的约束条件和变形连续条件的位移；所谓“任意的”是指位移类型　（平移、转动）和方向不受限制，但必须是结构所允许的位移；所谓“微小的”就是在发生虚位移过程中，各力的作用线保持不变。它的发生与时间无关，与弹性体所受的外载荷无关，而在发生虚位移过程中外力在虚位移上所做的功称为虚功。与此同时，在发生虚位移的过程中，弹性体内将产生虚应变。若把弹性体上外力在虚位移发生过程中所做的虚功记为δW，弹性体内的应力在虚应变上所做的虚功，即储存在弹性体内的虚应变能记为δU，则虚位移原理可表达如下：

在外力作用下处于平衡状态的弹性体，当发生约束允许的任意微小的虚位移时，则外力在虚位移上所做的总虚功等于弹性体内总的虚应变能（即整个体积内应力在虚应变上所做之功），即

$$\delta W=\delta U \tag{1-13}$$

如图1-10所示，设弹性体在外力F_1，F_2，F_3，…等作用下处于平衡状态，外力记为

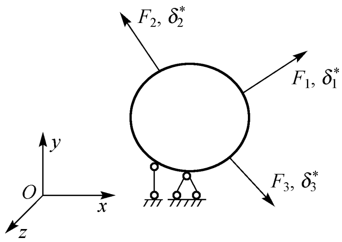


图 1-10 平衡状态的弹性体

$\boldsymbol{F}=[F_1,F_2,F_3\cdots]^{\mathrm{T}}$，弹性体内的应力为 $\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}]^{\mathrm{T}}$，并假设满足约束条件所产生的虚位移为 $\boldsymbol{\delta}^*=[\delta_1^*,\delta_2^*,\delta_3^*,\cdots]^{\mathrm{T}}$，相应的虚应变为 $\boldsymbol{\varepsilon}^*=[\varepsilon_x^*,\varepsilon_y^*,\varepsilon_z^*,\gamma_{xy}^*,\gamma_{yz}^*,\gamma_{zx}^*]^{\mathrm{T}}$，则外力在虚位移上所做的总虚功为

$$\delta W=F_1\delta_1^*+F_2\delta_2^*+F_3\delta_3^*+\cdots=\boldsymbol{\delta}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$$

在物体的单位体积内，应力在虚应变上的虚应变能为

$$\sigma_x\varepsilon_x^*+\sigma_y\varepsilon_y^*+\sigma_z\varepsilon_z^*+\tau_{xy}\gamma_{xy}^*+\tau_{yz}\gamma_{yz}^*+\tau_{zx}\gamma_{zx}^*=\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}$$

整个物体的虚应变能是

$$\delta U=\iiint\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

则式（1-13）可记为

$$\boldsymbol{\delta}^{*T}\boldsymbol{F}=\iiint\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1-14}$$

上式又称为虚功方程。

2．变分原理

若把自变量的函数称为自变函数，则泛函就是自变函数的函数。如应力和应变是坐标的函数，是自变函数，而应变能是应力和应变的函数，应变能就是泛函。变分原理就是求泛函的变分问题。

假设 u 是一组坐标的连续函数，以函数 u 为自变函数，构造新的函数，则得到泛函

$$\Pi=\int_{\Omega}F\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\right)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}E\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{1-15}$$

它是自变函数 u 及其导数的函数，F、E 是特定的微分算子。如果 u 是所求问题的真实解，则 u 使泛函 Π 对于自变函数任意微小的变化 δu 取驻值，即泛函的变分（变分运算法则类似微分运算法则）等于零：

$$\delta\Pi=0 \tag{1-16}$$

这就是变分原理。相对于问题的微分方程提法，变分原理也称为问题的泛函变分提法。问题的泛函可通过微分方程等效积分的弱形式或其他方式得到，如弹性问题的势能就是一种泛函，它可由平衡微分方程和边界条件的等效积分的弱形式得到。而问题的求解就是基于变分原理寻求使泛函取驻值的函数。显然，问题的微分方程表达与泛函变分表达具有等价性。但是，必须注意并不是所有问题都能建立起相应的泛函，即使问题的微分方程表达存在。

3．势能变分原理

对于弹性问题，系统总势能就是一种泛函。势能变分原理是指在所有满足边界条件的可能位移中，那些满足平衡方程的真实位移使物体的势能泛函取驻值，即势能的变分为零：

$$\delta\Pi=\delta U-\delta W=0 \tag{1-17}$$

上式也称为变分方程。对于线性弹性体，势能取最小值，即

$$\delta^2\Pi=\delta^2U-\delta^2W\geqslant 0 \tag{1-18}$$

此时的势能变分原理就是著名的最小势能原理，其物理意义就是在自然状态下系统势能总是趋于最小化，这是一个普遍的物理规律。

最小势能原理很容易证明。假设位移分量发生了满足边界条件所容许的微小改变，即虚位

移或位移变分 δu， δv， δw 变为

$$u^* = u + \delta u\text{，}\quad v^* = v + \delta v\text{，}\quad w^* = w + \delta w$$

u^*, v^*, w^*称为可能位移。考察系统势能的变化（为了简便，假设不存在初应力和初应变），并注意相应的应变分量，则对应可能位移的势能为

$$\begin{aligned}\Pi^* &= \frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon}^* \mathrm{d}\Omega - \\ &\int_{\Omega} (Xu^* + Y\upsilon^* + Zw^*)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma} (\bar{X}u^* + \bar{Y}\upsilon^* + \bar{Z}w^*)\mathrm{d}\Gamma \\ &= \Pi + \delta\Pi + \frac{1}{2}\delta^2\Pi\end{aligned}$$

其中 $\delta\Pi$， $\delta^2\Pi$ 分别是系统势能的一阶变分和二阶变分，其表达式为

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} (X\delta u + Y\delta\upsilon + Z\delta w)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma} (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta\upsilon + \bar{Z}\delta w)\mathrm{d}\Gamma$$

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega$$

根据泛函驻值条件，一阶变分 $\delta\Pi = 0$。考虑到应变能的非负性，即二阶变分 $\delta^2\Pi$ 非负，由上式知

$$\Pi^* - \Pi \geqslant 0 \tag{1-19}$$

式（1-19）说明满足位移边界条件的所有可能位移所对应的势能总是不小于真实位移所对应的势能，即真实位移使系统总势能取最小值，最小势能原理得证。

比较虚功原理和最小势能原理可知，势能变分原理与虚功原理是完全等价的。同时，通过运算，还可以由最小势能原理（或虚功原理）导出弹性体的微分平衡方程与应力边界条件。这说明最小势能原理或虚功原理都可以代替平衡微分方程与应力边界条件，用于描述弹性体的平衡状态，只是前者是基于能量的描述，后者是基于力的平衡。

1.4.5　弹性力学的平面问题

在工程实际中，任何一种结构都是空间物体，作用其上的外力一般也都是空间力系。但是，如果所研究的结构具有某种特殊形状，并且承受某些特殊外力，往往可以把空间问题简化为平面问题来处理。这样可以使方程组大大简化，减少分析和计算的工作量，同时也能满足工程上的精度要求。弹性力学将平面问题分为平面应力问题和平面应变问题。

1．平面应力问题

若结构满足以下两个条件，则称为平面应力问题。

（1）几何条件。结构是一等厚度薄板，其厚度远远小于结构另外两个方向的尺寸。

（2）载荷条件。其所受的载荷平行于板面，且沿厚度方向均匀分布，在两个板面上不受外力作用。

如图 1-11（a）所示结构属于平面应力问题；而如图 1-11（b）所示结构因载荷不均布，如图 1-11（c）所示结构因尺寸 L，t 相近，都不属于平面应力问题。

以薄板的中面为 xOy 面，以垂直于中面的直线为 z 轴，设薄板的厚度为 t。因为板面上$\left(z = \pm\frac{t}{2}\right)$无外力作用，则有

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{t}{2}} = 0\text{，}\quad (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}} = 0\text{，}\quad (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}} = 0$$

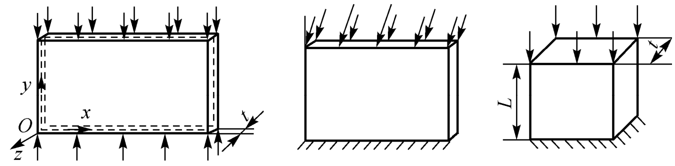


图 1-11　平面应力问题与非平面应力问题

实际上在板内部，上述 3 个应力分量是不为零的，但是由于板很薄，外力又不沿厚度变化，薄板不受弯曲作用，应力沿着板的厚度又是连续分布的，所以这些应力肯定很小，可以不计。这样，可以认为在整个板内各点都有

$$\sigma_z = 0\text{，}\ \tau_{zy} = 0\text{，}\ \tau_{zx} = 0$$

这类问题任一点的应力状态可用 xOy 平面内的 3 个应力分量 σ_x，σ_y，τ_{xy} 描述，所以称这类平面问题为平面应力问题。

根据物理方程，可得平面应力问题的应变为

$$\gamma_{zy} = 0\text{，}\qquad \gamma_{zx} = 0$$

同时，

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

尽管 ε_z 和 z 方向的位移 w 均不为零，即 $\varepsilon_z \neq 0$，$w \neq 0$，但是它们都不是独立变量，可用其他独立物理量来表示。

经上述简化处理，可得描述平面应力问题的 8 个独立的基本分量为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{1-20}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{1-21}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [u \quad v]^{\mathrm{T}} \tag{1-22}$$

它们仅是 x，y 的函数而与 z 无关。

平面问题可以看作一般三维问题的特例，其变量必须满足一般三维问题的基本方程。将上述变量代入空间问题的几何方程、物理方程及平衡方程可得到平面问题的基本方程。

（1）几何方程

由于 $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$，平面应力问题只考虑平面内的几何方程

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{1-23}$$

（2）物理方程

在平面应力问题中 $\varepsilon_z \neq 0$，但 ε_z 并不是独立的，所以求解时只考虑面内的三个应力和应变分量，物理方程为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{1-24}$$

式中

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{1-25}$$

称为平面应力问题的弹性矩阵。

则物理方程写成矩阵的形式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\varepsilon} \tag{1-26}$$

（3）平衡方程

由于 $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$，且 σ_z 与 z 无关，平面应力问题的平衡方程可化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + P_x = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + P_y = 0 \end{cases} \tag{1-27}$$

在工程实际中，受拉力作用的薄板、链条的平面链板、内燃机中的连杆以及齿宽较小的直齿圆柱齿轮的轮齿等均可看作平面应力问题，如图1-12所示为平面应力问题实例。通常对于厚度稍有变化的薄板、带有加强筋的薄环、平面刚架的节点区域、起重机的吊钩等，只要符合前述载荷特征，也往往可按平面问题用有限元法近似计算。

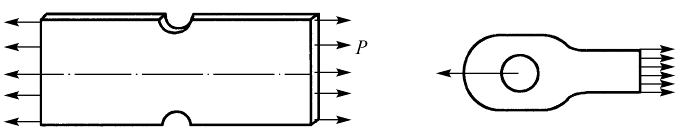


图1-12　平面应力问题实例

2．平面应变问题

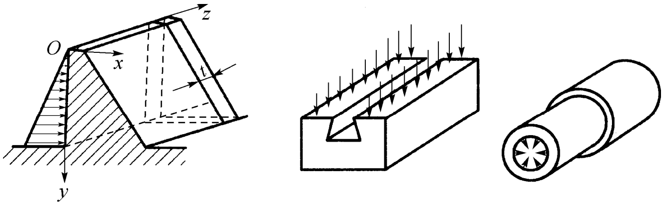
所谓平面应变问题是指满足以下两个条件的弹性力学问题。

（1）几何条件。所研究结构是长柱体（理论上假设为无限长的细长结构），即长度方向的尺寸远远大于横截面的尺寸，且横截面沿长度方向不变。

（2）载荷条件。作用于长柱体结构上的载荷平行于横截面且沿纵向方向均匀分布，两端面不受力。

如图1-13（a）所示结构属于平面应变问题；而如图1-13（b）所示结构因载荷沿纵向不是均匀分布，如图 1-13（c）所示结构的截面形状不能简化为等截面，则所示结构都不属于平面

应变问题。



（a）　　（b）　　（c）

图 1-13　平面应变问题与非平面应变问题

设结构的纵向为 z 轴方向，垂直于 z 轴的横截面为 xOy 平面，考虑远离结构两端垂直于 z 轴的任一平面。由于结构纵向尺寸大，可近似认为垂直于 z 轴的任一横截面都是结构的对称面。根据结构的对称性，认为结构不能发生沿 z 方向的位移，横截面内的其他两个位移分量 u 、v 也与 z 无关，即

$$w=0\ ,\quad u=u(x,y)\ ,\quad v=v(x,y)$$

这种问题称为平面应变问题。

由几何方程可得平面应变问题的应变特点为

$$\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$$

根据物理方程，可得这类结构的应力特点为

$$\tau_{zy}=\tau_{zx}=0\ ,\quad \sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$$

由于 σ_z 是可由 σ_x 、 σ_y 确定的非独立应力分量，因此在分析时可以不作为基本变量，故描述平面应变问题的独立的基本变量的分量也只有 8 个，与平面应力问题的一样，即式（1-20）～式（1-22）。且应力与应变、位移与应变之间的关系也基本和平面应力问题的相同，即式（1-23）、式（1-24），只是弹性矩阵变为

$$\boldsymbol{D}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 0\\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix}\tag{1-28}$$

比较式（1-25）和式（1-28）可知，把平面应力问题弹性矩阵中的 E 换成 $\dfrac{E}{(1-\mu^2)}$， μ 换成 $\dfrac{\mu}{1-\mu}$，就可得到平面应变问题的弹性矩阵。

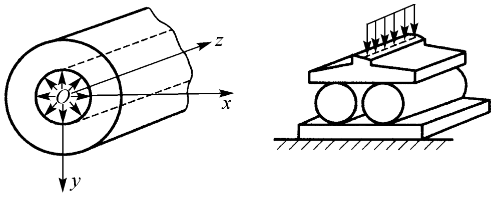


图 1-14　平面应变问题实例

在工程实际中，受水压力作用的水坝、受内压作用的炮筒和管道、轧钢机的轧辊、滚针轴承的滚针、花键轴，乃至齿宽较大的直齿轮轮齿等都可按平面应变问题处理。如图 1-14 所示结构为平面应变问题实例。

综上所述，平面问题只有 3 个应力分量、3 个应变分量和 2 个位移分量，且它们都是 x, y 的函数，而与 z 坐标无关。因此，结构内的应力和应变的分布规律可以 xOy 平面内的应力和变形的分布规律来代替，其求解可以归结为平面区域