第一章

Brown 运动的随机积分

§1.1　有关 Brown 运动的某些性质

在本节中，$(\Omega,\mathscr{F},P)$恒指某个概率空间，其中 Ω 为样本点的全体，$\mathscr{F}$为 Ω 上的一个 σ 代数，而 P 是 $\mathscr{F}$上的一个概率测度。用 d 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 记 d 维欧氏空间 R^d 中的元，并用 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 表示它的转置，用 $|\boldsymbol{x}|$ 表示它的模。

记

$$R^{[0,\infty)}=\{u:u=(u_t)_{0\leqslant t<\infty}\}$$

$$\mathscr{B}(R^{[0,\infty)})=\sigma(u_t:0\leqslant t<\infty)$$

(由一切 u_t 生成的最小 σ 代数，即使得一切 u_t 均为可测的最小 σ 代数)。

我们称$(\Omega,\mathscr{F})$到$(R^{[0,\infty)},\mathscr{B}(R^{[0,\infty)}))$的一个可测变换为随机过程。一般用 $X,Y,Z,\cdots$或$(X_t)_{0\leqslant t<\infty},(Y_t)_{0\leqslant t<\infty},\cdots$等（有时也用希腊字母，如 $\xi(t)$）表示。

定义 1.1　若 U 为完备可分距离空间，由 U 的全体开子集生成的 σ 代数记为 $\mathscr{B}(U)$，则可测空间$(U,\mathscr{B}(U))$称为 Polish 空间。

例 1　设 $C[0,\infty)=\{w:w=(w_t)_{0\leqslant t<\infty},w_t$ 为 t 的连续函数$\}$。在 $C[0,\infty)$中定义距离 ρ_c：

$$\rho_c(w^{(1)},w^{(2)})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|w^{(1)}-w^{(2)}\|_n\wedge 1}{2^n}$$

$$(w^{(i)}=(w_t^{(i)})_{0\leqslant t<\infty},i=1,2)\tag{1.1}$$

其中

$$\|w\|_n=\sup_{0\leqslant t\leqslant n}|w_t|\tag{1.2}$$

那么 $C[0,\infty)$在 ρ_c 下成为完备可分距离空间，$(C[0,\infty),\mathscr{B}(C[0,\infty)))$就是一个 Polish 空间。

显然，如果用$[0,n]$代替$[0,\infty)$，那么相应的 $C[0,n]$在模 $\|w\|_n$ 下成为 Banach 空间。因此实际上 $C[0,\infty)$是 Frechet 空间，即具有不变距离（满足 $\rho_c(w^{(1)}+w,w^{(2)}+w)=\rho_c(w^{(1)},w^{(2)})$）的完备可分距离线性空间。在这空间中收敛性 $w_t^{(n)}\to w_t$ 等价于 $w_t^{(n)}$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 上局部一致收敛到 w_t，即在$[0,\infty)$的任意紧子集上均为一致收敛。

为了使记号简洁，今后记 W^d 为 $C[0,\infty)$的 d 次笛卡儿乘积。

我们指出 $\mathscr{B}(W^d)$ 就是在 W^d 上的下述坐标过程

$$\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{w})\equiv\boldsymbol{w}_t,\boldsymbol{w}(=(\boldsymbol{w}_t)_{0\leqslant t<\infty})\in W^d$$

生成的 σ 代数。为此先记后面的 σ 代数为 $\mathscr{B}'$。

注意，在 t 固定时 $X_t(\boldsymbol{w})$ 是 W^d 上的连续函数（确切地说，是连续泛函）。于是对这个 t 及任意实向量 $\boldsymbol{a}$，$\{\boldsymbol{w}:\boldsymbol{w}_t<\boldsymbol{a}\}$ 是 W^d 的开集，因此 $\{\boldsymbol{w}:\boldsymbol{w}_t<\boldsymbol{a}\}\in\mathscr{B}(W^d)$。由典型逼近就得到 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}(W^d)$；反之，对任意 n，m 及 $\boldsymbol{w}^0\in W^d(\boldsymbol{w}^0=(\boldsymbol{w}_t^0)_{0\leqslant t<\infty})$，有

$$\left\{\boldsymbol{w}:\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^0\|_n<\frac{1}{m}\right\}=\bigcap_{\substack{t_i\text{有理}\\0\leqslant t_i\leqslant n}}\left\{\boldsymbol{w}:|\boldsymbol{w}_{t_i}-\boldsymbol{w}_{t_i}^0|<\frac{1}{m}\right\}\in\mathscr{B}'$$

因此 $\mathscr{B}(W^d)\subset\mathscr{B}'$。这样就得到 $\mathscr{B}'=\mathscr{B}(W^d)$。

定义 1.2 由可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(W^d,\mathscr{B}(W^d))$ 的可测变换 $\boldsymbol{X}(\equiv(\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{w}))_{0\leqslant t<\infty})$ 称为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的连续随机过程（显然，当 t 固定时，$\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{w})$ 是取值于 R^d 的随机变量，即 d 维随机向量）。

定义 1.3 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的连续随机过程

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_t)_{0\leqslant t<\infty}$$

称为 d 维 Brown 运动，如果 $\boldsymbol{B}_0=0$，那么 $\boldsymbol{B}_t$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的独立增量过程：

$$E(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_u-\boldsymbol{B}_v)=0\quad(\forall v<u\leqslant s<t)$$

而且 $\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s$ 遵从数学期望为 0，方差矩阵为 $(t-s)\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵）的 Gauss（实际上也是正态）分布（记成 $\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s\sim\mathscr{N}(0,(t-s)\boldsymbol{I})$）。

若 $(W^d,\mathscr{B}(W^d),P)$ 上的坐标过程 $\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{w})\equiv\boldsymbol{w}_t$ 是 Brown 运动且 $P(\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{0})=1$，则也称 P 为 Wiener 测度，$(W^d,\mathscr{B}(W^d),P)$ 为 Wiener 空间。今后专用记号 P^W 表示 Wiener 测度。

定义 1.4 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数族 $(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t<\infty}$ 称为参考族，如果它对 t 是递增的右连续族，即

$$\mathscr{F}_{t_1}\subset\mathscr{F}_{t_2}(t_1<t_2);\mathscr{F}_t=\bigcap_n\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}(\equiv\mathscr{F}_{t+})$$

对 $\mathscr{F}$ 的任意子 σ 代数族 $(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t<\infty}$，其右连续化族 $(\mathscr{F}_{t+})_{0\leqslant t<\infty}$ 总是参考族。记

$$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_t\mathscr{F}_t$$

（这里 $\mathscr{F}\vee\mathscr{G}$ 表示含 σ 代数 $\mathscr{F}$ 及 $\mathscr{G}$ 的最小 σ 代数）。若在 $(\Omega,\mathscr{F}_\infty)$ 上定义了概率测度 P，σ 代数 $\mathscr{F}_t$ 可以在 P 下完备化（即加进一切 $\mathscr{F}_\infty$ 零测集），则将它记成 $\overline{\mathscr{F}}_t^P$，或简记成 $\overline{\mathscr{F}}_t$。易见

$$\overline{(\mathscr{F}_{t+})}=\overline{\mathscr{F}}_{t+}$$

把它简写成 $\overline{\mathscr{F}}_{t+}$，并称 $(\overline{\mathscr{F}}_{t+})$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 的完备化参考族。

有时也把参考族 $(\mathscr{F}_t)$ 与概率空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 放在一起，记成 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t<\infty})$（或 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t))$）。随机过程 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_t)_{0\leqslant t<\infty}$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程，如果对任意 $t\geqslant0$ 固定，$\boldsymbol{X}_t$ 均为 $\mathscr{F}_t$ 可测（简记成 $\boldsymbol{X}_t\in\mathscr{F}_t$）。

定义 1.5 设 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_t)_{0\leqslant t<\infty}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的随机过程。记

$$\mathscr{F}_t^0=\sigma(X_s:s\leqslant t)$$

（括号中的随机变量所生成的 σ 代数），

$$\mathscr{F}_t^X=\mathscr{F}_{t+}^0$$

我们称 $(\mathscr{F}_t^X)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 生成的参考族。

这里要先指出 Brown 运动的一个等价条件。

命题 1.1　对于$(\Omega,\mathscr{F},P)$上零初值的连续随机过程$\boldsymbol{B}$而言，下列三个断言彼此等价：

1°　$\boldsymbol{B}$ 是 Brown 运动；

2°　对任意$\boldsymbol{\lambda}\in R^d$及$t>s\geqslant 0$恒有

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\mathscr{F}_s^0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2(t-s)}\quad(\text{a. e. d}P)\tag{1.3}$$

3°　对任意$\boldsymbol{\lambda}\in R^d$及$t>s\geqslant 0$恒有

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\mathscr{F}_s^B)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2(t-s)}\quad(\text{a. e. d}P)\tag{1.4}$$

证明　1°⇒2°。由于$\boldsymbol{B}_t$是独立增量过程，对$t>s\geqslant 0$及任意$\eta\in\mathscr{F}_s^0$有

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\eta)=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}E\eta$$

取$\eta=I_\Lambda$（I_Λ为$\mathscr{F}_s^0$中任意一个集合Λ的示性函数），根据条件期望的定义，上面公式等价于

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\mathscr{F}_s^0)=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\quad(\text{a. e. d}P)$$

这就是式（1.3）。

2°⇒3°。取n使$s+\dfrac{1}{n}<t$。由式(1.3)及条件期望的性质

$$\begin{aligned}E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}})&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_{s+\frac{1}{n}}-\boldsymbol{B}_s)}E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_{s+\frac{1}{n}})}\mid\mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}})\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2(t-s-\frac{1}{n})}\quad(\text{a. e. d}P)\\&\to\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2(t-s)}\quad(n\to\infty)\end{aligned}\tag{1.5}$$

令$n^*=-n$。记

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{n^*}=\mathscr{F}^0_{t-\frac{1}{n^*}}\quad(n^*=-1,-2,\cdots)$$

$$X_{n^*}=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\widetilde{\mathscr{F}}_{n^*})=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}})$$

于是X_{n^*}是一个复值的逆时鞅列，而且$E|X_{n^*}|=1(<\infty)$。因此X_{n^*}存在L_1极限。式（1.5）就变成

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\mathscr{F}^0_{s+\frac{1}{n}})\xrightarrow{L_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2(t-s)}$$

同时，逆时鞅列X_{n^*}与其L_1极限$X_{-\infty}(\equiv\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2(t-s)})$一起组成$(\widetilde{\mathscr{F}}_{n^*},\widetilde{\mathscr{F}}_{-\infty})$逆时闭鞅列，其中

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{-\infty}\equiv\mathscr{F}^0_{s+}$$

也就是说

$$\begin{aligned}E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\mathscr{F}^0_{s+})&=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\widetilde{\mathscr{F}}_{-\infty})\\&=X_{-\infty}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2(t-s)}\quad(\text{a. e. d}P)\end{aligned}$$

此即式（1.4）。

3°⇒1°。对$\mathscr{F}_s^B$可测的任意d维随机向量$\boldsymbol{\eta}$及$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\mu}\in R^d$，$t>s\geqslant 0$，利用3°，有

$$\begin{aligned}E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}})&=E[E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}}\mid\mathscr{F}_s^B)]\\&=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}}E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\mathscr{F}_s^B)]\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2(t-s)}E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}}\end{aligned}$$

这说明$\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s$与$\boldsymbol{\eta}$是相互独立的，而且$\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s\sim\mathscr{N}(\boldsymbol{0},(t-s)\boldsymbol{I})$。因此$(\boldsymbol{B}_t)_{0\leqslant t<\infty}$是 Brown 运动。

命题 1.1 说明式（1.3）可以作为 Brown 运动的特性刻划。由此可以把 Brown 运动的定义稍做推广。

定义 1.6 对$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的完备参考族$(\mathscr{F}_t)$（有时简记为$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$），我们称$(\Omega,\mathscr{F},P)$上连续的$(\mathscr{F}_t)$适应过程$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_t)_{0\leqslant t<\infty}$为（$d$ 维）$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，如果 B 满足：对$\forall\boldsymbol{\lambda}\in R^d,t>s\geqslant 0$ 恒有

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s)}\mid\mathscr{F}_s)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\lambda}|^2(t-s)}\quad(\text{a. e. d}P)\tag{1.6}$$

注意，此时 $\boldsymbol{B}_0$ 未必为零。因此有时也称 $\boldsymbol{B}$ 为初值 $\boldsymbol{B}_0$ 的$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动。$\boldsymbol{B}_0$ 可以是 $\mathscr{F}_0$ 中的任意随机变量。

仿命题 1.1 证明中 $3°\Rightarrow 1°$的部分的证明，也有：对$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立（因而也与 B_0 独立）。

注 1 利用 $\mathscr{F}_t^B\subset\mathscr{F}_t$ 及式（1.4）可知：若 $\boldsymbol{B}$ 是$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，则 $\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_0$ 是 Brown 运动。

注 2 易见：$\boldsymbol{B}$ 是$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动，当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 是$(\overline{\mathscr{F}}_t)$Brown 运动（记住，记号$\overline{\mathscr{F}}_t$是$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$的完备化）。

注 3 式（1.6）中只需假定对有理的 $\boldsymbol{\lambda}$ 成立就足够了。

注 4 如果$(\mathscr{F}_t)$不是参考族，只是 $\mathscr{F}$的递增子 σ 代数族（不右连续），那么式（1.6）保证了 $\boldsymbol{B}$ 是$(\mathscr{F}_{t+})$Brown 运动。

本章将定义随机过程对$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动的积分。

这里先指出：沿$(\mathscr{F}_t)$Brown 运动的轨道定义积分一般是行不通的（除非把“可积”函数——随机过程——类限制得很小，这样也就失去了意义）。为此需要回忆 Brown 运动的如下特性。因为 Brown 运动的分量都是一维 Brown 运动，所以以下只考虑一维 Brown 运动。

引理 1.1（Levy 的振动性质） 设 B 为 Brown 运动，又

$$s_1=t_0<t_1<\cdots<t_n=s_2$$
$$\Delta t_k=t_{k+1}-t_k,\Delta B_{t_k}=B_{t_{k+1}}-B_{t_k},h=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\Delta t_k$$

那么

$$E\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2-(s_2-s_1)\right|^2\leqslant 2h(s_2-s_1)\tag{1.7}$$

证明
$$\begin{aligned}\text{左}&=E\left|\sum_{k=0}^{n-1}[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k]\right|^2\\&=\sum_{k=0}^{n-1}E[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k]^2+\sum_{k\neq 1}E[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k][(\Delta B_{t_j})^2-\Delta t_j]\end{aligned}$$

由于 ΔB_{t_k}与 $\Delta B_{t_j}(k\neq j)$相互独立，所以第二项为 0，而第一项为

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}E[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k]^2\\&=\sum_{k=0}^{n-1}[E(\Delta B_{t_k})^4+(\Delta t_k)^2-2E(\Delta B_{t_k})^2\Delta t_k]\\&=\sum_{k=0}^{n-1}[3[E(\Delta B_{t_k})^2]^2-(\Delta t_k)^2]\\&=2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2\leqslant 2h(s_2-s_1)\end{aligned}$$

引理 1.2　令$[s_1,s_2]$的 2^n 等分点为

$$s_1=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{2^n}^{(n)}=s_2$$

那么

$$S_n \equiv \sum_{k=0}^{2^n-1}(\Delta B_{t_k^{(n)}})^2 \xrightarrow{n\to\infty} s_2-s_1 \quad (\text{a. e. d}P) \tag{1.8}$$

证明　对$\forall\varepsilon_n>0$，由 Chebyshev 不等式及式(1.7)有

$$\begin{aligned}P(|S_n-(s_2-s_1)|\geqslant\varepsilon_n)&\geqslant\frac{1}{\varepsilon_n^2}E|S_n-(s_2-s_1)|^2\\&\leqslant\frac{1}{\varepsilon_n^2}2h(s_2-s_1)\\&=\frac{2}{2^n\varepsilon_n^2}(s_2-s_1)\end{aligned}$$

取 $\varepsilon_n=1/n$，则 $\sum\limits_1^\infty\dfrac{1}{2^n\varepsilon_n^2}<\infty$。记

$$A_n=\{|S_n-(s_2-s_1)|\geqslant\varepsilon_n\}$$

于是 $\sum\limits_1^\infty P(A_n)<\infty$。用 Borel-Cantelli 引理得到

$$P(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n^c)=1$$

(A_n^c 为 A_n 的余集)。因此以概率为 1 地存在 $n_0(\omega)$（$\omega\in\Omega$ 为 Brown 运动 B 所在的概率空间)，当 $n\geqslant n_0(\omega)$时恒有$|S_n-(s_2-s_1)|<1/n$。此即式（1.8)。

Brown 运动的轨道（即 B_t 的一个样本函数）虽然是连续的，但“极不规则”。它们以概率为 1 地在任何有限（时间 t）区间内都不可求长。这就带出引理 1.3。

引理 1.3　以概率为 1 地 Brown 运动的样本函数在 t 的任何有限区间都不是有界变差的。

证明　令$\{t_k^{(n)}\}$为引理 1.2 中的分割。记

$$\lambda_n(\omega)=\max_k|\Delta B_{t_k^{(n)}}|$$

由 $B_t(\omega)$在$[s_1,s_2]$上的一致连续性，当$\max\limits_k\Delta t_k^{(n)}\to 0$ 时，

$$\lambda_n(\omega)\to 0 \quad (\text{a. e. d}P)$$

于是对引理 1.2 中的 S_n，有

$$|S_n|\leqslant\lambda_n(\omega)\sum_k|\Delta B_{t_k^{(n)}}|$$

因此由引理 1.2 得到

$$\sum_k|\Delta B_{t_k^{(n)}}|\geqslant\frac{|S_n|}{\lambda_n(\omega)}\to\infty \quad (\text{a. e. d}P)$$

Brown 运动的以上性质说明不宜对 Brown 运动定义按轨道的积分。

§1.2　Ito 积分的可积函数类

在给出 Ito 积分的经典定义之前，还需要讨论一下可称为“可积”函数的类。由于维数

不起本质作用，所以假设 $d=1$。

定义 1.7　$(\Omega,\mathscr{F})$ 上随机过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为可测过程，如果 $X(t,\omega)\equiv X_t(\omega)$ 是 $([0,\infty)\times\Omega,\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F})$ 可测函数。如果 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上有参考族 $(\mathscr{F}_t)$，而且对 $\forall T>0$，$X(t,\omega)|_{0\leqslant t\leqslant T,\omega\in\Omega}$（指把 t 限于 $[0,T]$ 上）均为（$[0,T]\times\Omega$，$\mathscr{B}([0,T])\times\mathscr{F}_T$）可测函数，那么称 X 为 $(\mathscr{F}_t)$ 循序过程。

法国 Strasbourg 学派在随机过程的一般理论中把随机过程看成 (t,ω) 的二元函数。由此区分出了一些特殊的二元可测类，它们在随机积分理论中起了重要作用。本书假定了 $(\mathscr{F}_t)$ 的右连续性，从而可以把定义叙述得稍微简单。

定义 1.8　给定 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t))$。考虑 $([0,\infty)\times\Omega,\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F})$ 的子集类：

$\mathscr{P}_g=\{A:A\in\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F},I_A$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 循序过程$\}$；

$\mathscr{O}=\sigma$(右连左极 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程)；

$\mathscr{O}^*=\sigma$(右连 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程)；

$\mathscr{P}=\sigma$(左连 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程)；

$\mathscr{P}^*=\sigma$(左连右极 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程)；

$\mathscr{P}^{**}=\sigma$(连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程)。

$\mathscr{P}_g$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$ 循序 σ 代数，$\mathscr{O}$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$ 可选 σ 代数，$\mathscr{P}$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$ 可料 σ 代数。随机过程 X 分别称为 $(\mathscr{F}_t)$ 可选过程和 $(\mathscr{F}_t)$ 可料过程（在不混淆的情形下还可把“$(\mathscr{F}_t)$”略去），如果 $X(t,\omega)$ 分别为 $\mathscr{O}$ 可测、$\mathscr{P}$ 可测。$\mathscr{O}$，$\mathscr{P}$ 集称可选、可料集。

当概率 P 给定时，$(\Omega,\mathscr{F})$ 可完备化成 $(\Omega,\overline{\mathscr{F}})$，这时常常考虑 P 完备化了的参考系 $(\overline{\mathscr{F}}_t)$，此时 $\overline{\mathscr{F}}_t$ 包含 $\mathscr{F}$ 中一切 P 零测集。

命题 1.2　对 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t))$ 有

1°　X 为循序过程，当且仅当 X 为 $\mathscr{P}_g$ 可测（记为 $X\in\mathscr{P}_g$）；

2°　$\mathscr{P}\subset\mathscr{O}\subset\mathscr{O}^*\subset\mathscr{P}_g$（将来证明当 $(\mathscr{F}_t)$ 为完备参考系时，$\mathscr{O}=\mathscr{O}^*$）；

3°　$$\begin{aligned}\mathscr{P}&=([0,\infty)\times\mathscr{F}_0)\vee\sigma\{(s,u]\times\mathscr{F}_s,0<s<u<\infty\}\\&=([0,\infty)\times\mathscr{F}_0)\vee\sigma\{[s,u)\times\mathscr{F}_{s-},0<s<u<\infty\}\\&=\mathscr{P}^*=\mathscr{P}^{**}。\end{aligned}$$

因而可料过程必是可选过程，可选过程必是循序过程。

证明　1°的证明。若 $X\in\mathscr{P}_g$，则其正部 X^+ 是形如

$$\sum_1^N\alpha_iI_{A_i}\quad(A_i\in\mathscr{P}_g)$$

的简单函数的极限。按 $\mathscr{P}_g$ 的定义可知 I_{A_i} 是循序过程。于是 X^+ 也是循序过程。因而 $X=X^+-X^-$ 是循序过程。反之，若 X 为循序过程，则对任意 $\lambda\in R$，$I_{\{X\leqslant\lambda\}}=I_{(-\infty,\lambda)}(X)$ 也是循序过程。按定义推得 $\{X\leqslant\lambda\}\in\mathscr{P}_g$，即 $X\in\mathscr{P}_g$。

2°的证明。设 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是左连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程。令

$$X_t^{(n)}=\sum_{k=0}^{\infty}X_{\frac{k}{2^n}}I_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)}(t)$$

显然 $X_t^{(n)}\to X_t$。

由 $X^{(n)}\in\mathscr{O}$ 立知 $X\in\mathscr{O}$。但是 $\mathscr{P}$ 由一切如上类型的 X 所生成，因此 $\mathscr{P}\subset\mathscr{O}$。

再则，设 X 为右连续 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程。在 $[0,T]\times\Omega$ 上定义

$$X_t^{(n)}=X_T I_{(T)}(t)+\sum_{k=1}^{2^n} X_{\frac{k}{2^n}T} I_{\left[\frac{k-1}{2^n}T,\frac{1}{2^n}T\right]}(t)$$

显见 $X^{(n)}\in\mathscr{B}([0,T])\times\mathscr{F}_T$，而且在 $[0,T]\times\Omega$ 上有 $X^{(n)}\to X$。因此，$X(t,\omega)\mid_{t\leqslant T}\in\mathscr{B}([0,T])\times\mathscr{F}_T$，即 X 为循序过程。从而 $X\in\mathscr{P}_g$。但是 $\mathscr{O}^*$ 由一切如上类型的 X 所生成，所以 $\mathscr{O}^*\subset\mathscr{P}_g$。

3°的证明。由于如下的过程

$$X=I_A(\omega)\quad(A\in\mathscr{F}_0)$$
$$Y=I_{(s,u]\times A}(t,\omega)\quad(A\in\mathscr{F}_s)$$

均为左连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程，可得到

$$([0,\infty)\times\mathscr{F}_0)\vee\sigma((s,u]\times\mathscr{F}_s,0<s<u<\infty)\subset\mathscr{P}$$

反之，设 X 为左连续$(\mathscr{F}_t)$适应过程。令

$$X_t^{(n)}=X_0+\sum_1^{\infty} X_{\frac{k}{2^n}} I_{\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]}(t)$$

显然 $X^{(n)}\to X$。由 $X_{\frac{k}{2^n}}\in\mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}$推出 $X^{(n)}\in[0,\infty)\times\mathscr{F}_0\vee\sigma((s,u]\times\mathscr{F}_s,0<s<u)$，因而 $X\in[0,\infty)\times\mathscr{F}_0\vee\sigma((s,u]\times\mathscr{F}_s,0<s<u)$。但是 $\mathscr{P}$ 由一切如上类型的 X 所生成，所以 $\mathscr{P}\subset[0,\infty)\times\mathscr{F}_0\vee\sigma((s,u]\times\mathscr{F}_s 0<s<u)$。3°中第二个等式显然成立。

由 3°中第一个等式推得 $\mathscr{P}\subset\mathscr{P}^*$。现证明 $\mathscr{P}^*\subset\mathscr{P}^{**}$。事实上，在 $[t-1/n,t]$ 上有 $(m\to\infty)$

$$X_{t-\frac{1}{2n}} I_{\left\{t-\frac{1}{2n}\right\}}(s)+\sum_{t-\frac{1}{n}\leqslant\frac{k}{2^m}<t} X_{\frac{k}{2^m}} I_{\left(\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}\right]}\to X$$

因此 X 在 $[t-1/n,t]$ 上属于 $\mathscr{B}([t-1/n,t]\times)\mathscr{F}_t$，并可由连续过程

$$n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} X_s \mathrm{d}s$$

近似。由典型逼近立得 $\mathscr{P}^*\subset\mathscr{P}^{**}$。此外显然 $\mathscr{P}^{**}\subset\mathscr{P}$。

注　记 $\mathscr{R}=(\{0\}\times A_0)\cup\bigcup\limits_{k=1}^{m}(s_k,u_k]\times A_k\ (A_0\in\mathscr{F}_0,A_k\in\mathscr{F}_{s_k})$ 的集所组成的类。其中，$s_1<u_1,s_2<u_2,\cdots,s_m<u_m$ 及 $A_0,\cdots,A_m$ 任意，且$(s_k,u_k]\times A_k$ 两两互不相交。那么 $\mathscr{R}$ 是一个代数（指测度论代数），而且 $\mathscr{P}=\sigma(\mathscr{R})$。

对一个可积的$(\mathscr{F}_t)$适应过程 X（可积是指 $E\mid X_t\mid<\infty,\forall t\geqslant 0$），可以在 $\mathscr{R}$ 上定义一个有限可加的集函数：

$$D(\{0\}\times A)=E[I_A X_0]\quad(A\in\mathscr{F}_0)$$
$$D((s,u]\times A)=E[I_A(X_u-X_s)]\quad(A\in\mathscr{F}_s)$$

称为 X 的 Doleans 函数。它度量了 X 与鞅的偏离程度。显见 X 是零初值$(\mathscr{F}_t)$鞅，当且仅当 $D\equiv 0$。

一般来说，不同的 X 可能有相同的 Doleans 函数。但是可以证明，当 X 是可积增过程时，Doleans 函数 D 可以扩张为 $\mathscr{P}$ 上的测度（称为 Doleans 测度），并且在对应于同一个 Doleans 测度的可积$(\mathscr{F}_t)$适应增过程中唯一地存在一个$(\mathscr{F}_t)$可料过程。它称为其他过程的可料对偶投影过程。由此发展出所谓对偶投影理论，将在 2.3 节中阐述。

在讨论随机积分时，一般假定$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备化的概率空间，而$(\mathscr{F}_t)$为完备参考族。

$(\mathscr{F}_t)$循序过程显然是$(\mathscr{F}_t)$适应的可测过程。反之，对于给定的概率 P 而言，$(\mathscr{F}_t)$适应的可测过程 P 等价（X 与 Y 称为 P 等价，如果对 $\forall t\geqslant 0$，均有 $P(X_t=Y_t)=1$）于一个$(\mathscr{F}_t)$可选过程，这个过程称为原过程在 P 下的可选修正，当然更是循序修正。

命题 1.3　给定$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$，则任意$(\mathscr{F}_t)$适应的可测过程 X，在 P 下必存在一个$(\mathscr{F}_t)$可选修正$\widetilde{X}$。

证明　令 $\mathscr{H}=\{X:X$ 可测$,Y\equiv(E(X_t\mid\mathscr{F}_t))_{t\geqslant 0}$有可选修正$\widetilde{X}\}$，则 $\mathscr{H}$ 对单调递增极限封闭。事实上，如果 $X^{(n)}\uparrow X$ 且

$$Y^{(n)}=(E(X_t^{(n)}\mid\mathscr{F}_t))_{t\geqslant 0}$$

有可选修正$\widetilde{X}^{(n)}$，定义

$$\widetilde{X}=\begin{cases}\lim\limits_n\widetilde{X}_t^{(n)}, & \text{如果极限存在}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

易见$\widetilde{X}$是 $Y=(E(X_t\mid\mathscr{F}_t))_{t\geqslant 0}$的可选修正。记

$$\mathscr{S}=\{A\in\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}:I_A\in\mathscr{H}\}$$

$$\Pi=\{A=[s,u)\times\Lambda:0\leqslant s<u<\infty,\Lambda\in\mathscr{F}\}$$

那么 Π 是 π 系。又对 $[s,u)\times\Lambda\in\Pi$，$(\mathscr{F}_t)$左极右连过程 $I_{[s,u)}(t)E(I_\Lambda\mid\mathscr{F}_t)$显然是 $E(I_{(s,u)\times\Lambda}\mid\mathscr{F}_t)$的可选修正，推出 $\Pi\subset\mathscr{S}$。由于 $\mathscr{H}$ 是单调系，可推出 $\mathscr{S}$ 包含 Π 的 d 扩张，因此 $\mathscr{S}=\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$。一般有界正可测过程可用 $\mathscr{S}$ 示性函数的线性组合单调逼近，因而属于 $\mathscr{H}$。

现在设 X 为$(\mathscr{F}_t)$适应的正可测过程，那么 $X\wedge n$ 是$(\mathscr{F}_t)$适应的有界可测过程，因此 $X\wedge n$以$(E(X_t\wedge n\mid\mathscr{F}_t))_{t\geqslant 0}$为修正。但是已证明了后者有可选修正，从而 $X\wedge n$ 有可选修正，由此推出 X 有可选修正。这就证明了本命题。

引理 1.4　记 $p\geqslant 1$，$\mathscr{L}_p=\Big\{\Phi:\Phi=(\Phi_t)_{t\geqslant 0},\Phi_t(\omega)\equiv\Phi(t,\omega)$是可测过程，又是$(\mathscr{F}_t)$适应过程，且对 $\forall T$，$E\int_0^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}t<\infty\Big\}$。

在 $\mathscr{L}_p$ 中定义准范数 $\|\Phi\|$，（不满足 $\|\lambda\Phi\|_p=|\lambda|\ \|\Phi\|_{p!}$）如下：

$$(\|\Phi\|_p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\|\Phi\|_{p,n})\wedge 1}{2^n}$$

其中

$$\|\Phi\|_{p,T}=\left(E\int_0^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

那么 $\mathscr{L}_p$ 成为可分 Frechet 空间。

注　如果只考虑$[0,T]$上定义的 Φ，令 $\mathscr{L}_{p,T}=\{\Phi:\|\Phi\|_{p,T}<\infty\}$，那么 $\mathscr{L}_{p,T}$在 $\|\Phi\|_{p,T}$下成为可分 Banach 空间。$\mathscr{L}_p$ 中的收敛性等价于可列个 Banach 空间 $\mathscr{L}_{p,n}$的乘积的收敛性。

引理 1.5　记 $p\geqslant 1$，$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}=\Big\{\Phi:\Phi=(\Phi_t)_{t\geqslant 0},\Phi_t(\omega)$是可测$(\mathscr{F}_t)$适应过程，且对 $\forall T$ 固定$\int_0^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}t<\infty$，a. e. $\mathrm{d}P\Big\}$。

在 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 中定义准范数

$$\|\Phi\|_p^{\mathrm{loc}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|\Phi\|_{p,n}^{\mathrm{loc}}}{2^n}$$

其中

$$\|\Phi\|_{p,T}^{\mathrm{loc}}=\left(E\left[\left(\int_0^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}t\right)\wedge 1\right]\right)^{\frac{1}{p}}$$

那么 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 在距离 $\|\Phi-\Psi\|_p^{\mathrm{loc}}$ 下成为具有“平移”不变距离的线性距离空间。$\|\Phi^{(m)}\|_p^{\mathrm{loc}}\to 0$，当且仅当 $\forall n$，$\int_0^n|\Phi_t^{(m)}|^p\mathrm{d}t$ 依概率收敛于 $0(m\to\infty)$。

这两个引理是泛函分析的简单习题，故略去其证明过程。

注　若 $\Phi\in\mathscr{L}_p$，则显然有 $\Phi\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$，而且 $\|\Phi\|_p^{\mathrm{loc}}\leqslant\|\Phi\|_p$。

命题 1.4　对 $\forall\Phi\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$，存在可料过程 $\widetilde{\Phi}\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$，使得在 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 中有 $\widetilde{\Phi}=\Phi$。这个 $\widetilde{\Phi}$ 称为 Φ 在 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 中的可料修正。

证明　由命题 1.3，Φ 有可选修正（因而是循序修正），可假定 Φ 为循序过程。令

$$\Lambda_n=\left\{\omega:\int_0^n|\Phi(s,\omega)|\mathrm{d}s=\infty\right\}$$

由 Hölder 不等式

$$\int_0^n|\Phi_s|\mathrm{d}s\leqslant\left(\int_0^n\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p'}}\times\left(\int_0^n|\Phi_s|^p\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\quad(\text{a. e. d}P)$$

（p'是 p 的“共轭”数：$(1/p)+(1/p')=1$）推出 Λ_n 是零测集。

定义

$$\widetilde{\Phi}^{(n)}(t,\omega)=\left(n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t}\Phi_s\mathrm{d}s\right)I_{\left(\bigcup_1^{\infty}\Lambda_n\right)^c}$$

$$\widetilde{\Phi}(t,\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{\Phi}^{(n)}(t,\omega), & \text{当这极限存在时}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{1.9}$$

由于假定了 $\mathscr{F}_t$ 之 P 完备性及 Φ 之循序性，可推得 $\widetilde{\Phi}^{(n)}$ 是 $(\mathscr{F}_t)$ 适应的。但 $\widetilde{\Phi}^{(n)}$ 又是左连续过程，因此其极限 $\widetilde{\Phi}$ 是可料过程。

另一方面，当 $\omega\in\bigcup\limits_1^{\infty}\Lambda_n$ 时有：对 $\forall T>0$，

$$\int_0^T|\Phi_s|\mathrm{d}s<\infty$$

因此对固定的 $\omega\in\bigcup\limits_1^{\infty}\Lambda_n$ 有

$$n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t}\Phi_s\mathrm{d}s\xrightarrow{n\to\infty}\Phi_t\quad(\text{a. e. d}t)\tag{1.10}$$

记

$$A=\{(t,\omega):\widetilde{\Phi}^{(n)}\not\longrightarrow\Phi,n\to\infty\}$$

显然 $A\in\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$。

但是式（1.10）决定了当 ω 固定后该集的 ω-截口的 $\mathrm{d}t$ 测度是零测集，因而这个集是 $\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{F}$ 中 $\mathrm{d}t\times\mathrm{d}P$ 的零测集，A 也是零测集，可得到：

$$\{(t,\omega):\Phi\neq\widetilde{\Phi}\}$$

是零测集，即在 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 中$\widetilde{\Phi}=\Phi$。

约定 今后 $\mathscr{L}_p$，$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 中的元素 Φ 恒指它的可料修正。

命题 1.4 的含义是

$$\mathscr{L}_{p,T}=L_p([0,T]\times\Omega,\mathscr{P},\mathrm{d}t\times\mathrm{d}P) \tag{1.11}$$

$$\mathscr{L}_p=\bigcap_{n=1}^{\infty}L_p([0,n]\times\Omega,\mathscr{P},\mathrm{d}t\times\mathrm{d}P) \tag{1.12}$$

(在拓扑等价意义下相等)，其中 $L_p([0,T]\times\Omega,\mathscr{P},\mathrm{d}t\times\mathrm{d}P)$是指乘积测度 $\mathrm{d}t\times\mathrm{d}P$ 被限于可料 σ 代数 $\mathscr{P}$上构成的 L_p 空间的如下子空间：$\{\Phi:\Phi(t,\omega)=0(t\geqslant T)\}$。

引理 1.6 $\Phi\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$，当且仅当$\exists(\mathscr{F}_t)$停时列 τ_n(即$\{\tau_n\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,\forall t)<\infty$ (a. e. dP)，$\tau_n\uparrow\infty$，使 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\in\mathscr{L}_p$。

在条件成立下，有

$$\|\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)-\Phi\|_p^{\mathrm{loc}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

证明 设 $\Phi\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$。令

$$\tau_n=n\wedge\inf\left\{t:\int_0^t|\Phi_s|^p\mathrm{d}s\geqslant n\right\}$$

那么 τ_n 是递增$(\mathscr{F}_t)$停时列，且 $\tau_n\uparrow\infty$ (a. e. dP)。由于$\{t\leqslant\tau_n\}=\Omega\setminus\{\tau_n<t\}\in\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$，有 $I_{[0,\tau_n]}(t)\in\mathscr{F}_t$，即 $I_{[0,\tau_n]}(t)$是$(\mathscr{F}_t)$适应过程。但它又是左连续，因此它是可料过程。于是 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)$也是可料过程。对$\forall T>0$，有

$$E\int_0^T|\Phi_t I_{[0,\tau_n]}(t)|^p\mathrm{d}t=E\left(\int_0^{\tau_n}|\Phi_t|^p\mathrm{d}t\right)\leqslant n$$

因此 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\in\mathscr{L}_p$。

反之，若 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\in\mathscr{L}_p$，则 $E\int_0^{\tau_n}|\Phi_t|^p\mathrm{d}t<\infty$。从而

$$\Lambda_n\equiv\left\{\omega:\int_0^{\tau_n}|\Phi_t|^p\mathrm{d}t=\infty\right\}$$

是零测集。在零测集 $\bigcup_1^{\infty}\Lambda_n$ 外，显然有

$$\int_0^{\tau_n}|\Phi_t|^p\mathrm{d}t<\infty\quad(\forall n)$$

由 $\tau_n\uparrow\infty$ 立知 $\Phi\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$。此外，对$\forall T>0$，有

$$\int_0^T|\Phi_t-\Phi_t I_{[0,\tau_n]}(t)|^p\mathrm{d}t=\int_{\tau_n\wedge T}^T|\Phi_t|^p\mathrm{d}t\xrightarrow{n\to\infty}0\quad(\text{a. e. d}P)$$

因而也依概率收敛于 0。由此推出$\|\Phi-\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\|_p^{\mathrm{loc}}\to 0$。

注 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ 的元素 Φ 是$(\mathscr{F}_t)$可料过程（predictable 过程）。另一方面它是$(\mathscr{F}_t)$适应的可测过程，国外有些书与文献上称$(\mathscr{F}_t)$适应的可测过程为 nonanticipating 过程，意即“不依赖将来”的过程。易使人混淆的是，依中文的字面也可把 nonanticipating 译成“不可料”（事实上有些书上已经这样译了）。这样，几乎是同一的概念（“predictable”与“nonanticipating”）在中文上却被译成完全相反的词（“可料”与“不可料”）。为了避免这种不必要的混淆，建议把 nonanticipating 改译成“非预期”的，而保留国内多数著作及文献中使用的 predictable 的译名“可料”。

命题 1.5　令

$$\mathscr{L}_0=\Big\{\Phi:\Phi=f_0(\omega)I_{\{0\}}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$
$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n\uparrow\infty, f_0,f_k\text{ 一致有界}, f_0\in\mathscr{F}_0, f_k\in\mathscr{F}_{t_k}\Big\}$$

即 $\mathscr{L}_0$ 的元素都是在 t 的任意有限区间 $[0,T]$ 上的左连续随机梯形（只取有限个随机值）过程。有：

1°　$\mathscr{L}_0$ 在 $\mathscr{L}_p$ 中稠；

2°　$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}\subset\overline{\mathscr{L}_0}$（在 $\|\cdot\|_p^{\mathrm{loc}}$ 下的完备化）；又若 $\Phi\in\mathscr{L}_p$，且 $\Omega_0\subset\Omega$ 满足 $\Phi I_{\Omega_0}\equiv0$，则可以取 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使

$$\Phi^{(n)}I_{\Omega_0}\equiv0,\ \|\Phi^{(n)}-\Phi\|_p\to0$$

称满足 $\Phi I_{\Omega_0}\equiv0$ 的 Φ 为“在 Ω_0 上致零”的 Φ；而且当 $|\Phi|\leqslant C$ 时，还可要求 $|\Phi^{(n)}|\leqslant C$。

证明　1°的证明。设 $\Phi\in\mathscr{L}_p$。因为 $\Phi=\Phi^+-\Phi^-$ 且 Φ^+，$\Phi^-\in\mathscr{L}_p$，所以可假定 $\Phi\geqslant0$。于是可取 $\mathscr{P}$ 可测简单函数 $\Phi^{(n)}\geqslant0$，使 $\Phi^{(n)}\uparrow\Phi$。由式（1.11）及控制收敛性推出，在

$$L_p([0,T]\times\Omega,\mathscr{P},\mathrm{d}P\times\mathrm{d}t)$$

中 $\Phi^{(n)}I_{[0,T]}(t)$ 收敛到 $\Phi I_{[0,T]}(t)$。由式（1.11）及式（1.12）得到 $\Phi^{(n)}\xrightarrow{\mathscr{L}_p}\Phi$。此时 $\Phi^{(n)}$ 的形式为

$$\Phi^{(n)}=\sum_{i=1}^{N(n)}\alpha_i^{(n)}I_{A_i}^{(n)}\quad(A_i^{(n)}\in\mathscr{P})$$

而且 $\Phi^{(n)}$ 保持“在 Ω_0 上致零”性。

于是 1°的证明可简单地化为证明：对 $A\in\mathscr{P}$，$I_A\in\mathscr{L}_p$ 且 $I_AI_{\Omega_0}=0$，可以用“在 Ω_0 上致零”的 $\mathscr{L}_0$ 函数在 $\mathscr{L}_p$ 意义下近似 I_A。下面分几步证明它。

首先，令

$$I^{(n)}=n\int_{t-\frac{1}{n}}^{t}I_A(s,\omega)\,\mathrm{d}s$$

显然 $I^{(n)}$ “在 Ω_0 上致零”。仿照命题 1.4 的证明有

$$\|I^{(n)}-I_A\|_p\to0$$

其次，由于 $\int_{t-\frac{1}{n}}^{t}EI_A\mathrm{d}s<\infty$ 及 Fubini 定理，积分

$$\int_{t-\frac{1}{n}}^{t}I_A(s,\omega)\,\mathrm{d}s$$

按轨道意义存在，所以 $I^{(n)}$ 可以看成有界连续过程。

最后只需指出：对在 Ω_0 上致零的有界连续过程 Ψ，只要令

$$\Psi^{(n)}=\Psi_0I_{(0)}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_{\frac{k}{2^n}}I_{\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]}(t)$$

$\Psi^{(n)}$ 就“在 Ω_0 上致零”，$\Psi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，而且 $\|\Psi^{(n)}-\Psi\|_p\to0$。

2°的证明。设 $\Phi\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$。由引理 1.6，$\exists(\mathscr{F}_t)$ 停时列 $\tau_n\uparrow\infty$，使 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\in\mathscr{L}_p$，且 $\|\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)-\Phi\|_p^{\mathrm{loc}}\to0$。由 1°，$\exists\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使 $\|\Phi^{(n)}-\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\|_p<1/n$，因此

$$\|\Phi^{(n)}-\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\|_p^{\mathrm{loc}}\leqslant\|\Phi^{(n)}-\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)\|_p<1/n$$

于是 $\| \Phi^{(n)}-\Phi \|_p^{\text{loc}} \to 0$。此外，在做近似 $\Phi I_{[0,\tau_n]}(t)$ 及 $\Phi^{(n)}$ 时，“在 Ω_0 上致零性” 总是可以要求被保持的。

注　$\mathscr{L}_p$ 含有一个子类：

$$\mathscr{L}_{p,\infty}=\left\{\Phi\in\mathscr{L}_p:E\int_0^\infty |\Phi_t|^p\mathrm{d}t<\infty\right\}$$

在范数

$$\|\Phi\|_{p,\infty}=\left(E\int_0^\infty |\Phi_t|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

下，$\mathscr{L}_{p,\infty}$ 成为 Banach 空间。特别当 $p=2$ 时，还是 Hilbert 空间。对这类“函数”的随机积分将具有更好的性质，即在 $[0,\infty]$ 上的闭 L^p 鞅性（参见 1.4 节）。

§1.3　平方可积鞅与局部平方可积鞅

定义 1.9　给定 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及参考族 $(\mathscr{F}_t)$。零初值的右连左极 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$，称为 $(\mathscr{F}_t)$ 平方可积鞅，如果对 $\forall t\geqslant 0$ 均有 $EX_t^2<\infty$；称为 $(\mathscr{F}_t)$ 一致平方可积鞅，如果

$$\sup_{t\geqslant 0}EX_t^2<\infty$$

（由附录定理 4，它等价于 $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant\infty}$ 为 $(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant\infty}$ 平方可积鞅，且 $EX_\infty^2<\infty$）。

$(\mathscr{F}_t)$ 平方可积鞅的全体记成 $\mathscr{M}_2(\mathscr{F}_t)$，记其中连续过程全体为 $\mathscr{M}_2^c(\mathscr{F}_t)$。$(\mathscr{F}_t)$ 一致平方可积鞅的全体记成 $\mathfrak{M}_2(\mathscr{F}_t)$。在不会引起混淆时，常常把 $(\mathscr{F}_t)$ 省去，分别简记为 $\mathscr{M}_2$，$\mathscr{M}_2^c$，$\mathfrak{M}_2$。此外，本书中的鞅均指它是*右连续有左极限的*。

若 X，$Y\in\mathscr{M}_2$，且 $P(\forall t,X_t=Y_t)=1$，则记 $X\equiv Y$。并且在本书中不再对此 X，Y 加以区分。

注　很多书与文献中（如 Strasbourg 学派）的平方可积鞅是这里的一致平方可积鞅。

引理 1.7　对 $X\in\mathscr{M}_2$ 定义

$$\|X\|_{\mathscr{M}_2,T}^2=EX_T^2$$

$$\|X\|_{\mathscr{M}_2}=\sum_{n=1}^\infty\frac{\|X\|_{\mathscr{M}_2,n}\wedge 1}{2^n}$$

那么 $\mathscr{M}_2$ 在准范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{M}_2}$ 下成为 Frechet 空间，而且 $\mathscr{M}_2^c$ 是它的一个闭子空间。又 $\mathfrak{M}_2$ 在范数

$$\|X\|_{\mathfrak{M}_2}^2=EX_\infty^2$$

下成为 Hilbert 空间，并且在 $\mathfrak{M}_2$ 上 $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_2}$ 强于 $\|\cdot\|_{\mathscr{M}_2}$。

证明　注意，由 $\|X-Y\|_{\mathscr{M}_2}=0$ 可推出 $X\equiv Y$。事实上前者蕴含：对 $\forall n,X_n=Y_n(\text{a. e. d}P)$。再由鞅性得到 $X_t=Y_t(t\leqslant n)(\text{a. e. d}P)$。但是 X，Y 右连续，所以 $X\equiv Y$。

这里只需验证 $\mathscr{M}_2$ 的完备性，而引理的其他部分是显然的。设 $\|X^{(n)}-X^{(m)}\|_{\mathscr{M}_2}\to 0$ $(n,m\to\infty)$。由鞅 $X^{(n)}-X^{(m)}$ 的 Doob 不等式

$$P(\sup_{[0,T]} |X_t^{(n)}-X_t^{(m)}| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\|X^{(n)}-X^{(m)}\|^2_{\mathscr{M}_2,T}}{\lambda^2}$$

推出，对 $\forall T$

$$\sup_{[0,T]} |X_t^{(n)}-X_t^{(m)}| \xrightarrow{p} 0$$

这说明在一切随机变量所组成的空间 S 中，对 $t\leqslant T$ 一致地距离 $\rho(X_t^{(n)},X_t^{(m)})\to 0(n,m\to\infty)$。由 S 的完备性存在 $X_t\in S$，使对 $t\leqslant T$ 一致地有 $\rho(X_t^{(n)},X_t)\to 0(n\to\infty)$。即对 $t\leqslant T$ 一致地 $X_t^{(n)}\xrightarrow{p}X_t$。于是存在一个子列（不妨假设就是它自己：$X^{(n)}$）a. e. d$P$ 地对 $t(t\leqslant T)$ 一致收敛到 X_t。因此 X_t 是右连（续）左极（限）$(\mathscr{F}_t)$适应过程。

另一方面有 $E|X_t^{(n)}-X_t^{(m)}|^2\to 0(n,m\to\infty)$。由 L_2 完备性可得到 $E|X_t^{(n)}-X_t|^2\to 0(n\to\infty)$。于是，由 $X^{(n)}$ 的$(\mathscr{F}_t)$鞅性立刻推出 X 是$(\mathscr{F}_t)$鞅且平方可积。因此 $X\in\mathscr{M}_2$，而且 $\|X^{(n)}-X\|_{\mathscr{M}_2,T}\to 0(\forall T>0)$。从而有 $\|X^{(n)}-X\|_{\mathscr{M}_2}\to 0(n\to\infty)$。这就证明了 $\mathscr{M}_2$ 的完备性。

易见，若 $X^{(m)}\in\mathscr{M}_2^o$，则 $X\in\mathscr{M}_2^o$。

定义 1.10　给定$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$。右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程 X 称为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅，如果存在$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\sigma_n\uparrow\infty$，使 $X^{\sigma_n}(=((X^{\sigma_n})_t)_{t\geqslant 0}\equiv(X_{t\wedge\sigma_n})_{t\geqslant 0})$均是$(\mathscr{F}_t)$鞅。又如果对 $\forall n$ 均有 $X^{\sigma_n}\in\mathscr{M}_2$，那么称 X 为$(\mathscr{F}_t)$局部平方可积鞅。

因为在研究随机微分方程时需要考虑不同的初值 $X_0(\in\mathscr{F}_0)$，所以一般也可把一个局部鞅加上一个 σ 可积（参见定义 2.12）$\mathscr{F}_0$ 随机变量称为$(\mathscr{F}_t)$局部鞅。

记

$\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)$= 全体零初值的$(\mathscr{F}_t)$局部平方可积鞅；

$\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)=\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)$中全体连续过程；

$\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)$= 全体零初值的$(\mathscr{F}_t)$局部鞅；

$\mathscr{M}^{c,\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)=\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)$中全体连续过程。

一般也常分别简记为 $\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，$\mathscr{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$，$\mathscr{M}^{\mathrm{loc}}$，$\mathscr{M}^{o,\mathrm{loc}}$。

显见 $\mathscr{M}^{o,\mathrm{loc}}=\mathscr{M}_2^{o,\mathrm{loc}}$。

与 Brown 运动类似地，有（当$(\mathscr{F}_t)$并不完备时）：

X 是$(\mathscr{F}_t)$鞅，当且仅当 X 是（$\overline{\mathscr{F}_t}$）鞅；

$X\in\mathscr{M}_2(\mathscr{F}_t)$，当且仅当 $X\in\mathscr{M}_2(\overline{\mathscr{F}_t})$；

$X\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}(\mathscr{F}_t)$，当且仅当 $X\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}(\overline{\mathscr{F}_t})$。

引理 1.8　X 是$(\mathscr{F}_t)$局部鞅，当且仅当存在有界$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n\uparrow\infty$，使 $X^{\tau_n}((X_n^{\tau})_t\equiv X_{t\wedge\tau_n})$为$(\mathscr{F}_t)$一致可积鞅。

$X\in\mathscr{M}_2^{\mathrm{loc}}$，当且仅当 $\exists$ 有界$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n\uparrow\infty$，使 $X^{\tau_n}\in\mathfrak{M}^2(\forall n)$。

证明　只需证明必要性即可。设 σ_n 的含义如定义 1.10。令 $\tau_n=\sigma_n\wedge n$，它是有界$(\mathscr{F}_t)$停时列。对$(\mathscr{F}_t)$鞅 $X_{t\wedge\sigma_n}$用 Doob 停止定理：对 $s<t$，

$$E(X_{(t\wedge\sigma_n)\wedge n}|\mathscr{F}_s)=X_{[(t\wedge\sigma_n)\wedge n]\wedge s}$$

也就是

$$E(X_{t\wedge\tau_n}\mid\mathscr{F}_s)=X_{s\wedge\tau_n}$$

因此 $X_{t\wedge\tau_n}$ 是 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅。它是闭鞅，所以是一致可积鞅。第二个结论证法完全类似。

从 1.4 节开始，如不特别声明，参考系 $(\mathscr{F}_t)$ 均指完备的。

§1.4 对 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动的 Ito 积分

设 $d=1$，$B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),P)$ 上的 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动。

1. $\mathscr{L}_0$ 函数的 Ito 积分

设 $\Phi\in\mathscr{L}_0$，其具体形式为

$$\Phi_t\equiv\Phi(t,\omega)=f_0(\omega)I_{\{0\}}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}f_k(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t)$$

$(0=t_0<t_1<\cdots<t_n\uparrow\infty)$。定义 Φ 对 B 的 Ito 积分：

$$\int_0^t\Phi_u\mathrm{d}B_u\equiv\sum_{k=0}^{\infty}f_k(\omega)(B_{t\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge t_k})\tag{1.13}$$

类似地定义 $\int_s^t\Phi_u\mathrm{d}B_u\left(\int_0^t\Phi_u\mathrm{d}B_u-\int_0^s\Phi_u\mathrm{d}B_u\right)$。注意，因为 $t_n\uparrow\infty$，所以右边的和式实际只有有限项。

易见由这样定义的积分并不依赖于 Φ 的表达方式，有时简写 $\int_0^t\Phi_u\mathrm{d}B_u$ 为 $\int_0^t\Phi\mathrm{d}B$。

$\mathscr{L}_0$ 函数的 Ito 积分具有以下性质 $(s\leqslant t)$。

(I_1^0) 强线性

$$\int_s^t(\Phi+\Psi)\mathrm{d}B=\int_s^t\Phi\mathrm{d}B+\int_s^t\Psi\mathrm{d}B$$

$$\int_s^t\eta\Phi_u\mathrm{d}B_u=\eta\int_s^t\Phi\mathrm{d}B\quad(\forall\eta\in\mathscr{F}_s)\tag{1.14}$$

(I_2^0) $\int_0^t\Phi\mathrm{d}B\in\mathscr{M}_2^c$，而且 $\left\|\int_0^t\Phi\mathrm{d}B\right\|_{\mathscr{M}_2}=\|\Phi\|_2$ (1.15)

(I_3^0) $\left(\int_0^t\Phi\mathrm{d}B\right)^2-\int_0^t\Phi_u^2\mathrm{d}u$ 是连续鞅，或等价地

$$E\left[\left(\int_s^t\Phi\mathrm{d}B\right)^2\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right]=E\left(\int_s^t\Phi_u^2\mathrm{d}u\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right)\tag{1.16}$$

同时，对 $(\mathscr{F}_t)$ 停时 σ，τ，只要 $\tau\leqslant\sigma$ (a. e. dP)，就有

$$E\left(\int_{t\wedge\tau}^{t\wedge\sigma}\Phi\mathrm{d}B\,\middle|\,\mathscr{F}_\tau\right)=0\tag{1.17}$$

$$E\left[\left(\int_{t\wedge\sigma}^{t\wedge\sigma}\Phi\mathrm{d}B\right)^2\,\middle|\,\mathscr{F}_\tau\right]=E\left[\int_{t\wedge\tau}^{t\wedge\sigma}\Phi_u^2\mathrm{d}u\,\middle|\,\mathscr{F}_\tau\right]\tag{1.18}$$

(I_4^0) 若 $B^{(i)}, B^{(j)}$ 是多维 $(\mathscr{F}_t)$ Brown 运动 B 的分量，则

$$E\left(\int_s^t\Phi\mathrm{d}B^{(i)}\int_s^t\Psi\mathrm{d}B^{(j)}\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right)=E\left(\int_s^t\Phi_u\Psi_u\mathrm{d}u\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right)\delta_{ij}\tag{1.19}$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

（I_5^0）若 $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{L}_0$，且

$$\boldsymbol{\Omega}_0=\{\boldsymbol{\omega}: \forall\, t, \boldsymbol{\Phi}(t,\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{\Psi}(t,\boldsymbol{\omega})\}$$

则在 Ω_0 上除概率为零的 ω 外恒有

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}B=\int_0^t \Psi \mathrm{d}B \quad (\forall\, t\geqslant 0) \tag{1.20}$$

以上诸性质的证明如下。

（I_1^0）显然。

（I_2^0）的证明。当 $s\leqslant t_k$ 时，由式（1.13）及 Brown 运动的鞅性质得到

$$\begin{aligned}&E[f_k(B_{t\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge t_k})\mid \mathscr{F}_s]\\ &\quad=E[f_k E((B_{t\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge t_k})\mid \mathscr{F}_{t_k})\mid \mathscr{F}_s]\\ &\quad=f_k(B_{s\wedge t_{k+1}}-B_{s\wedge t_k}) \quad (\text{a. e. d}P)\end{aligned}$$

而当 $s>t_k$ 时

$$\begin{aligned}&E[f_k(B_{t\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge t_k})\mid \mathscr{F}_s]\\ &\quad=f_k(B_{t\wedge s\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge s\wedge t_k})\\ &\quad=f_k(B_{s\wedge t_{k+1}}-B_{s\wedge t_k}) \quad (\text{a. e. d}P)\end{aligned}$$

对 k 求和可看出 $\int_0^t \Phi \mathrm{d}B$ 是$(\mathscr{F}_t)$鞅。显然它是连续轨道的。另一方面，对 $k<j$

$$\begin{aligned}&E[f_k f_j(B_{t\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge t_k})(B_{t\wedge t_{j+1}}-B_{t\wedge t_j})]\\ &\quad=E(f_k f_j(B_{t\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge t_k})\times E[(B_{t\wedge t_{j+1}}-B_{t\wedge t_j})\mid \mathscr{F}_{t_j}])\\ &\quad=0\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}&Ef_k^2(B_{t\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge t_k})^2\\ &\quad=E(f_k^2 E[(B_{t\wedge t_{k+1}}-B_{t\wedge t_k})^2\mid \mathscr{F}_{t_k}])\\ &\quad=Ef_k^2(t\wedge t_{k+1}-t\wedge t_k)\end{aligned}$$

由此可算得 $\left\|\int_0^t \Phi \mathrm{d}B\right\|_{\mathscr{M}_{2,T}}=\|\Phi\|_{2,T}$。从而得到（$\mathrm{I}_2^0$）。

（I_3^0）的证明。对 $\forall\,\Lambda\in\mathscr{F}_s$，与（$\mathrm{I}_2^0$）类似地可证

$$E\left[I_\Lambda\left(\int_s^t \Phi \mathrm{d}B\right)^2\right]=E\left(I_\Lambda\int_s^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u\right)$$

此即式（1.16）。再用 Doob 停止定理的加强形式（参见附录定理 9）便得式（1.17）及式（1.18）。

（I_4^0）的证明与（I_3^0）的证明类似。

（I_5^0）显然。

2. $\mathscr{L}_2$ 函数的 Ito 积分

给定 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{L}_2$。由命题 1.5 $\exists\,\boldsymbol{\Phi}^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使 $\|\boldsymbol{\Phi}^{(n)}-\boldsymbol{\Phi}\|_2\to 0(n\to\infty)$，且保持在 Ω 的子

集 Ω_0 上的致零性。用式（1.20），有

$$\left\|\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}B-\int_0^t \Phi^{(m)}\mathrm{d}B\right\|_{\mathscr{M}_2}=\|\Phi^{(n)}-\Phi^{(m)}\|_2\to 0\quad(n,m\to\infty)$$

因为 $\mathscr{M}_2^o$ 是 $\mathscr{M}_2$ 的闭子空间，所以存在 $\mathscr{M}_2^o$ 的元素作为积分列 $\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}B$ 的极限。于是可以定义

$$\int_0^t \Phi\mathrm{d}B\equiv(\mathscr{M}_2)\lim_{n\to\infty}\int_0^t \Phi^{(n)}\mathrm{d}B \tag{1.21}$$

(指 $\mathscr{M}_2$ 中的极限)。显见上述积分的“值”与 Φ 的 $\mathscr{L}_0$ 近似列 $\Phi^{(n)}$ 的选取法无关。同时由式（1.20）可知，对 $\Phi\in\mathscr{L}_0$ 来说，式（1.21）与式（1.13）给出相同的积分“值”。

$\mathscr{L}_2$ 函数的 Ito 积分具有下列性质。

对应于(I_1^0)～(I_5^0)，$\mathscr{L}_2$ 函数的 Ito 积分有(I_1)～(I_5)，其行文与相应的(I_1^0)～(I_5^0)的行文完全一样。

(I_6) 对($\mathscr{F}_t$)停时 σ，有

$$\int_0^{t\wedge\sigma}\Phi\mathrm{d}B=\int_0^t \Phi_u I_{[0,\sigma]}(u)\mathrm{d}B_u \tag{1.22}$$

注意，此性质对 $\Phi\in\mathscr{L}_0$ 当然成立，只是此时 $I_{[0,\sigma]}$ 未必属于 $\mathscr{L}_0$，因而此性质不能在给出 $\mathscr{L}_0$ 函数的 Ito 积分的性质时予以证明，只好合并于这里。

推论 设 σ 为($\mathscr{F}_t$)停时，又若 $\Phi\in\mathscr{L}_2$ 且在 Ω_0 上有

$$\Phi(t,\omega)=0\quad(t\leqslant\sigma(\omega))$$

则

$$\int_0^t \Phi\mathrm{d}B=0\quad(\omega\in\Omega_0,t\leqslant\sigma(\omega))$$

注 由(I_6)的启示，对有界($\mathscr{F}_t$)停时 σ（设 $\sigma\leqslant T$）及 τ（假设 $\tau\leqslant\sigma$），即使 Ψ 不是($\mathscr{F}_t$)适应过程，但只要 $\Psi I_{(\tau,\sigma]}(t)$（是适应的）$\in\mathscr{L}_2$，仍可定义积分 $\int_\tau^\sigma \Psi\mathrm{d}B$ 为

$$\int_\tau^\sigma \Psi\mathrm{d}B\equiv\int_0^T \Psi_u I_{[\tau,\sigma]}(u)\mathrm{d}B_u$$

对此积分仍有

$$E\left(\int_\tau^\sigma \Psi\mathrm{d}B\mid\mathscr{F}_\tau\right)=0$$

$$E\left(\int_\tau^\sigma \Psi^{(1)}\mathrm{d}B\int_\tau^\sigma \Psi^{(2)}\mathrm{d}B\mid\mathscr{F}_\tau\right)=E\left(\int_\tau^\sigma \Psi_u^{(1)}\Psi_u^{(2)}\mathrm{d}u\mid\mathscr{F}_\tau\right)$$

(I_7)（加强的线性性质）对有界的 $\zeta\in\mathscr{F}_\tau$，$\Phi\in\mathscr{L}_2$ 及有界($\mathscr{F}_t$)停时 $\tau\leqslant\sigma(\leqslant T)$，有

$$\int_\tau^\sigma \Phi\mathrm{d}B\equiv\int_0^T \Phi_u I_{(\tau,\sigma]}(u)\mathrm{d}B_u$$

$$\int_\tau^\sigma \zeta\Phi_u\mathrm{d}B_u=\zeta\int_\tau^s \Phi\mathrm{d}B \tag{1.23}$$

(I_8) $\forall\varepsilon$，$\delta>0$，有

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi\mathrm{d}B\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant P\left(\int_0^t \Phi_u^2\mathrm{d}u\geqslant\delta\right)+\frac{\delta}{\varepsilon^2} \tag{1.24}$$

因此，如果 $\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2\to 0$，那么

$$\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi^{(n)}\mathrm{d}B-\int_0^s \Phi\mathrm{d}B\right|\xrightarrow{p}0$$

这些性质的证明如下。

（I_1）的证明。对 $\Phi\in\mathscr{L}_2$，取 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使 $\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2\to 0$。于是

$$\|\zeta\Phi^{(n)}I_{(s,t]}-\zeta\Phi I_{(s,t]}\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

由式（1.14）推出（I_1）。

（I_2）直接得自式（1.21）。

（I_3）的证明。对 $\forall\Lambda\in\mathscr{F}_s$，有

$$\begin{aligned}
&E\left(I_\Lambda\left\{E\left[\left(\int_s^t\Phi\mathrm{d}B\right)^2\mid\mathscr{F}_s\right]-E\left[\int_s^t\Phi_u^2\mathrm{d}u\mid\mathscr{F}_s\right]\right\}\right)\\
&=E\left(I_\Lambda\left[\left(\int_s^u\Phi\mathrm{d}B\right)^2-\int_s^t\Phi_n^2\mathrm{d}u\right]\right)\quad(\text{用}(\mathrm{I}_1))\\
&=E\left[\left(\int_s^t I_\Lambda\Phi\mathrm{d}B\right)^2-\int_s^t(I_\Lambda\Phi_u)^2\mathrm{d}u\right]\\
&=0\quad(\text{用}(\mathrm{I}_2))
\end{aligned}$$

（I_4）的证明与（I_3）类似。

（I_5）由命题 1.5 保证。

（I_6）的证明。先设 $\Phi\in\mathscr{L}_0$，这时 $\Phi I_{[0,\sigma]}(t)\in\mathscr{L}_2$。再设梯形过程 Φ 的分点集为 $\{t_k\}$。令

$$\{s_j^{(n)}\}_{0\leqslant j<\infty}=\{t_k\}_{k\geqslant 0}\ \bigcup\ \left\{\frac{k}{2^n}\right\}_{k\geqslant 0}$$

并按大小排列。于是 Φ 可表示为

$$\Phi=\sum_j f_j^{(n)}(\omega)I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(t)+f_0^{(n)}(\omega)I_{\{0\}}(t)$$

记

$$\sigma^{(n)}=\sum_j s_{j+1}^{(n)}I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(\sigma)\quad(\sigma\text{ 的“右”近似})$$

有

$$\{\sigma^{(n)}\leqslant t\}=\bigcup_{s_{j+1}^{(n)}\leqslant t}\{\sigma\leqslant s_{j+1}^{(n)}\}\in\mathscr{F}_t$$

因此 $\sigma^{(n)}$ 是 $(\mathscr{F}_t)$ 停时，而且 $\sigma^{(n)}\downarrow\sigma$。

注意，当 $s_j^{(n)}<t\leqslant s_{j+1}^{(n)}$ 时，$\{t\leqslant\sigma^{(n)}\}=\{s_j^{(n)}<\sigma\}$。因此

$$\begin{aligned}
\Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}(t)&=\Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}(t)\left[I_{\{0\}}(t)+\sum_j I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(t)\right]\\
&=\Phi I_{\{0\}}(t)+\Phi\sum_j I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(t)I_{(s_j^{(n)},\infty)}(\sigma)\\
&=f_0^{(n)}I_{\{0\}}(t)+\sum_j\left(f_j^{(n)}I_{(s_j^{(n)},\infty)}(\sigma)\right)I_{(s_j^{(n)},s_{j+1}^{(n)}]}(t)\in\mathscr{L}_0
\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^t\Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}\mathrm{d}B=\sum_j f_j^{(n)}I_{(s_j^{(n)},\infty)}(\sigma)(B_{t\wedge s_{j+1}^{(n)}}-B_{t\wedge s_j^{(n)}})$$

但因在 $\{\sigma>s_j^{(n)}\}$ 上有 $\{\sigma^{(n)}\geqslant s_{j+1}^{(n)}\}$，所以

$$\int_0^t \Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]} \mathrm{d}B = \sum_j f_j^{(n)} I_{\sigma > s_j^{(n)}} (B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge s_{j+1}^{(n)}} - B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge s_j^{(n)}})$$

右边括号中的项当且仅当 $t\wedge\sigma^{(n)} > s_j^{(n)}$ 时可能非 0，此时 $\sigma^{(n)} > s_j^{(n)}$。因此 $\sigma^{(n)} \geqslant s_{j+1}^{(n)}$。于是 $\sigma > s_j^{(n)}$。这样就有

$$\begin{aligned}
\int_0^t \Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]} \mathrm{d}B &= \sum_j f_j^{(n)} (B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge s_{j+1}^{(n)}} - B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge s_j^{(n)}}) \\
&= \int_0^{t\wedge\sigma^{(n)}} \Phi \mathrm{d}B \\
&= \sum_k \Phi_{t_k} (B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge\sigma^{(n)}\wedge t_k}) \\
&\to \sum_k \Phi_{t_k} (B_{t\wedge\sigma\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge\sigma\wedge t_k}) \\
&= \int_0^{t\wedge\sigma} \Phi \mathrm{d}B
\end{aligned} \tag{1.25}$$

另一方面，对 $\forall T>0$，由控制收敛定理可得

$$\| \Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]}(t) - \Phi I_{[0,\sigma]}(t) \|_{2,T}^2 = E\left(\int_0^T \Phi_t^2 I_{[\sigma,\sigma^{(n)}]}(t) \mathrm{d}t\right) \to 0 \quad (n\to\infty)$$

因此

$$\int_0^t \Phi I_{[0,\sigma^{(n)}]} \mathrm{d}B \xrightarrow{\mathscr{M}_2} \int_0^t \Phi I_{[0,\sigma]} \mathrm{d}B \quad (n\to\infty)$$

把它与式（1.25）比较便得 $\mathscr{L}_0$ 过程的(I_6)。

现在考虑一般的 $\Phi\in\mathscr{L}_2$。取 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使 $\|\Phi^{(n)}-\Phi\|_2\to 0$。于是

$$\|\Phi^{(n)} I_{[0,\sigma]} - \Phi I_{[0,\sigma]}\|_2 \to 0$$

而且对 $s\leqslant t$ 一致地有

$$\int_0^s \Phi^{(n)} \mathrm{d}B \xrightarrow{p} \int_0^s \Phi \mathrm{d}B$$

因此可取一个子列（不妨假设就是它自己）对 $s\leqslant t$ 一致地 a. e. dP 收敛。因此除了某个零测集 $\Lambda_0\in\mathscr{F}$外，在 $0\leqslant s\leqslant t$ 恒有

$$\int_0^s \Phi^{(n)} \mathrm{d}B \to \int_0^s \Phi \mathrm{d}B \quad (\omega \,\overline{\in}\, \Lambda_0)$$

于是

$$\int_0^{t\wedge\sigma} \Phi^{(n)} \mathrm{d}B \to \int_0^{t\wedge\sigma} \Phi \mathrm{d}B \quad (\omega \,\overline{\in}\, \Lambda_0)$$

但是 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，因此对于 $\Phi^{(n)}$ 而言（I_6）成立。这样上式

$$左 = \int_0^t \Phi^{(n)} I_{[0,\sigma]} \mathrm{d}B \to \int_0^t \Phi I_{[0,\sigma]} \mathrm{d}B$$

因此对 Φ，（I_6）也成立。

推论的证明 我们有 $\Phi_t I_{[0,\sigma]}(t)=0(\omega\in\Omega_0)$。利用（$\mathrm{I}_5$）及（$\mathrm{I}_6$）得：对 $\forall t$

$$\int_0^{t\wedge\sigma} \Phi \mathrm{d}B = \int_0^t \Phi I_{[0,\sigma]} \mathrm{d}B = 0 \quad (\omega\in\Omega_0)$$

（I_7）的证明。由于$(\mathscr{F}_t)$右连续，所以 $\zeta I_{\tau<t\leqslant\sigma}$是$(\mathscr{F}_t)$适应过程。因此 $\zeta I_{(\tau,\sigma]}\Phi\in\mathscr{L}_2$，从而 $\int_\tau^\sigma \zeta\Phi \mathrm{d}B$ 存在，有

$$
\begin{aligned}
E\left(\int_\tau^\sigma \zeta\Phi \mathrm{d}B - \zeta\int_\tau^\sigma \Phi\mathrm{d}B\right)^2 &= E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2\mathrm{d}u + E\zeta^2\left(\int_\tau^\sigma \Phi\mathrm{d}B\right)^2 - 2E\left(\zeta\int_\tau^\sigma \zeta\Phi\mathrm{d}B\int_\tau^\sigma \Phi\mathrm{d}B\right) \\
&= E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2\mathrm{d}u + E\left(\zeta^2 E\left[\left(\int_\tau^\sigma \Phi\mathrm{d}B\right)^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_\tau\right]\right) \\
&\quad - 2E\left(\zeta E\left[\left(\int_\tau^\sigma \zeta\Phi\mathrm{d}B\int_\tau^\sigma \Phi\mathrm{d}B\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_\tau\right]\right) \\
&= E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2\mathrm{d}u + E\left(\zeta^2 E\left[\int_\tau^\sigma \Phi_u^2\mathrm{d}u \,\middle|\, \mathscr{F}_\tau\right]\right) \\
&\quad - 2E\left(\zeta E\left[\int_\tau^\sigma \zeta\Phi_u^2\mathrm{d}u \,\middle|\, \mathscr{F}_\tau\right]\right) \\
&= E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2\mathrm{d}u + E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2\mathrm{d}u - 2E\int_\tau^\sigma \zeta^2\Phi_u^2\mathrm{d}u \\
&= 0
\end{aligned}
$$

最后证明（I_8）。取

$$\Phi_s^{(\delta)} = \Phi_s I_{\{s:\int_0^s \Phi_u^2\mathrm{d}u \leqslant \delta\}} \in \mathscr{L}_2$$

应用 Doob 不等式，可得

$$
\begin{aligned}
P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi\mathrm{d}B\right| \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s (\Phi - \Phi^{(\delta)})\mathrm{d}B\right| > 0\right) \\
&\quad + P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi^{(\delta)}\mathrm{d}B\right| \geqslant \varepsilon\right) \\
&\leqslant P\left(\int_0^t \Phi_u^2\mathrm{d}u \geqslant \delta\right) + \frac{E\left(\int_0^t \Phi^{(\delta)}\mathrm{d}B\right)^2}{\varepsilon^2} \\
&= P\left(\int_0^t \Phi_u^2\mathrm{d}u \geqslant \delta\right) + \frac{E\int_0^t (\Phi_u^{(\delta)})^2\mathrm{d}u}{\varepsilon^2} \\
&\leqslant P\left(\int_0^t \Phi_u^2\mathrm{d}u \geqslant \delta\right) + \frac{\delta}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

3. $\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$ 函数的 Ito 积分

设 $\Phi \in \mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$，由引理 1.6，存在$(\mathscr{F}_t)$停时列 $\tau_n \uparrow \infty$，使 $\Phi^{(n)} \equiv \Phi I_{[0,\tau_n]}(t) \in \mathscr{L}_2$，而且 $\|\Phi^{(n)} - \Phi\|_2^{\mathrm{loc}} \to 0(n\to\infty)$。显然对 $m<n$，有

$$\Phi^{(m)} = \Phi^{(n)} I_{[0,\tau_m]}(t)$$

按 $\mathscr{L}_2$ 函数的 Ito 积分的定义及（I_8）有

$$\int_0^t \Phi^{(m)}\mathrm{d}B = \int_0^t \Phi^{(n)} I_{[0,\tau_m]}\mathrm{d}B = \int_0^{t\wedge\tau_m} \Phi^{(n)}\mathrm{d}B$$

因此可定义

$$\int_0^t \Phi\mathrm{d}B = \sum_{k=1}^\infty I_{(\tau_{k-1},\tau_k]}(t)\int_0^t \Phi^{(k)}\mathrm{d}B \quad (\tau_0 = 0) = \sum_{k-1}^\infty \int_{\tau_{k-1}\wedge t}^{\tau_k\wedge t} \Phi^{(k)}\mathrm{d}B \tag{1.26}$$

由此定义直接推出

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} \Phi\mathrm{d}B = \int_0^{t\wedge\tau_n} \Phi^{(n)}\mathrm{d}B \tag{1.27}$$

因而 $\left(\int_0^t \Phi \mathrm{d}B\right)_{t\geqslant 0} \in \mathscr{M}_2^{o,\mathrm{loc}}$。特别地，当 $\Phi\in\mathscr{L}_2$ 时，按式（1.21）与按式（1.26）定义的两个积分是一致的。此外，定义式（1.26）所规定的积分也不依赖$(\mathscr{F}_t)$停时列$\{\tau_n\}$的选取。

$\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$ 函数的 Ito 积分是 $\mathscr{L}_0$，$\mathscr{L}_2$ 函数的 Ito 积分的推广。我们把这积分的性质归纳为下列定理。

定理 1.1 对 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$，有：

1° $\left(\int_0^t \Phi \mathrm{d}B\right)_{t\geqslant 0} \in \mathscr{M}_2^{o,\mathrm{loc}}$；

2° 对 $\forall\,(\mathscr{F}_t)$停时 σ，有

$$\int_0^{t\wedge\sigma} \Phi \mathrm{d}B = \int_0^t \Phi_u I_{[0,\sigma]}(u)\,\mathrm{d}B_u$$

3° 若 $\Phi=0(\omega\in\Omega_0, t\leqslant\sigma(\omega), \sigma$ 为$(\mathscr{F}_t)$停时)，则

$$\int_0^t \Phi \mathrm{d}B = 0(\omega \in \Omega_0, t \leqslant \sigma(\omega))$$

4° 对 $\forall\,\varepsilon$，$\delta>0$，有

$$P\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi \mathrm{d}B\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P\left(\int_0^t \Phi_u^2 \mathrm{d}u \geqslant \delta\right) + \frac{\delta}{\varepsilon^2}$$

因此，如果 $\Phi^{(n)}$，$\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$，且 $\int_0^t |\Phi_u^{(n)} - \Phi_u|^2 \mathrm{d}u \xrightarrow{p} 0$，那么

$$\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \Phi^{(n)} \mathrm{d}B - \int_0^s \Phi \mathrm{d}B\right| \xrightarrow{p} 0$$

由 $\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}\subset\overline{\mathscr{L}_0}$，对于 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$，还可选取 $\Phi^{(n)}\in\mathscr{L}_0$，使上面的极限式成立。

对 Φ，$\Psi\in\mathscr{L}_2$，还进一步有：

1°° $\left(\int_0^t \Phi \mathrm{d}B\right)_{t\geqslant 0} \in \mathscr{M}_2^{o}, \left\|\int_0 \Phi \mathrm{d}B\right\|_{\mathscr{M}_2} = \|\Phi\|_2$；

2°° 对 $\forall\,(\mathscr{F}_t)$停时 $t\leqslant\sigma$，有

$$E\left(\int_{\tau\wedge t}^{\sigma\wedge t} \Phi \mathrm{d}B \mid \mathscr{F}_t\right) = 0$$

$$E\left[\left(\int_{\tau\wedge t}^{\sigma\wedge t} \Phi \mathrm{d}B \int_{\tau\wedge t}^{\sigma\wedge t} \Psi \mathrm{d}B - \int_{\tau\wedge t}^{\sigma\wedge t} \Phi_u \Psi_u \mathrm{d}u\right) \mid \mathscr{F}_\tau\right] = 0$$

3°° 如果 $\tau\leqslant\sigma$ 且都是有界$(\mathscr{F}_t)$停时，那么对任意

$$\Phi I_{(\tau,\sigma]}(t), \Psi I_{(\tau,\sigma]}(t) \in \mathscr{L}_2$$

（Φ，Ψ 可不必$(\mathscr{F}_t)$适应，只要 $\Phi I_{[\tau,\sigma]}, \Psi I_{(\tau,\sigma]}(\mathscr{F}_t)$适应）积分 $\int_\tau^\sigma \Phi \mathrm{d}B$，$\int_\tau^\sigma \Psi \mathrm{d}B$ 存在，而且

$$E\left(\int_\tau^\sigma \Phi \mathrm{d}B \mid \mathscr{F}_\tau\right) = 0$$

$$E\left[\left(\int_\tau^\sigma \Phi \mathrm{d}B \int_\tau^\sigma \Psi \mathrm{d}B - \int_\tau^\sigma \Phi_u \Psi_u \mathrm{d}u\right) \mid \mathscr{F}_\tau\right] = 0$$

证明 关于 $\Phi\in\mathscr{L}_2$ 的部分在前面已证明了。关于 $\Phi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$ 的部分，前面关于 $\mathscr{L}_2$ 函数积分的相应结论的证明仍适用。

定理 1.2（加强线性关系） 若 Φ，$\Psi\in\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$，$\zeta_1$，$\zeta_2$ 有界 $\in\mathscr{F}_\tau$，$(\mathscr{F}_t)$停时 $\tau\leqslant\sigma$ 均为有