第 1 章　离散时间信号与系统

1.1　离散时间信号

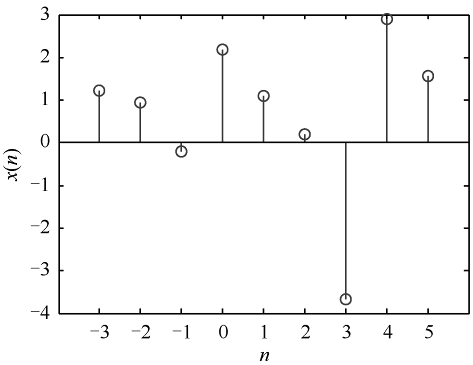
离散时间信号通常用符号 $x(n)$ 表示，其中自变量 n 取整数，变化范围从 $-\infty$ 到 $+\infty$。离散时间信号 $x(n)$ 只在 n 为整数时有定义，而在 n 为非整数值时没有定义。离散时间信号可写成括号内的一组样本，并在时间序号 $n=0$ 处的样本下面用箭头↑表示，右边的样本值对应 n 为正值的部分，而左边的部分对应 n 为负值的部分。例如，一个有限长的离散时间信号可以表示为

$$x(n)=\{1.23,0.95,-0.2,\underset{\uparrow}{2.17},1.1,0.2,-3.67,2.9,1.56\}$$

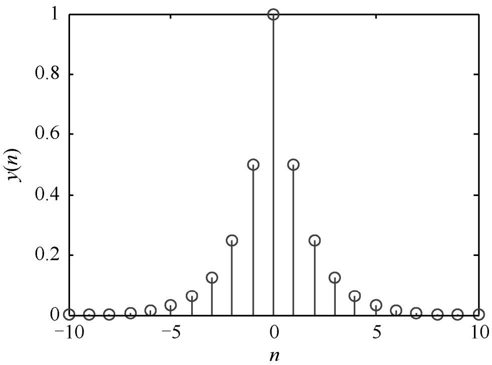
它表示离散时间信号 $x(n)$ 在 $n=-1$ 时刻等于 -0.2，即 $x(-1)=-0.2$；离散时间信号 $x(n)$ 在 $n=0$ 时刻等于 2.17，即 $x(0)=2.17$；离散时间信号 $x(n)$ 在 $n=1$ 时刻等于 1.1，即 $x(1)=1.1$。由于离散时间信号是一串有序的数字的集合，通常也将离散时间信号简称为序列。对于有规律的离散时间信号，可以直接使用数学公式进行表示。例如，

$$y(n)=0.5^{|n|},\quad -\infty<n<+\infty$$

离散时间信号 $x(n)$ 的波形如图 1-1（a）所示，在图 1-1（b）中画出了当 $-10\leqslant n\leqslant 10$ 时，离散时间信号 $y(n)$ 的波形。



（a）



（b）

图 1-1　离散时间信号的波形

通常需要对连续时间信号进行采样以获得离散时间信号，我们把相邻两个采样时刻之间的时间间隔称为采样周期，用 T 表示，采样周期的倒数称为采样频率，用 f_s 表示。连续时间信号与离散时间信号之间的关系可以表示为

$$x(n)=x_\mathrm{a}(t)\big|_{t=nT}=x_\mathrm{a}(nT) \tag{1-1}$$

如对连续正弦信号采样，得到离散正弦信号，简称为正弦序列，连续正弦信号与正弦序列之

间的关系为

$$x(n)=\sin(2\pi ft)|_{t=nT}=\sin(2\pi fTn) \tag{1-2}$$

连续正弦信号的角频率称为模拟角频率，记为Ω；正弦序列的角频率称为数字角频率，记为ω，于是，得到模拟角频率与数字角频率之间的关系为

$$\omega=\Omega T \quad 或 \quad \omega=\frac{\Omega}{f_s} \tag{1-3}$$

例 1-1　已知连续正弦信号的频率 $f=100\text{Hz}$，采样频率 $f_s=1000\text{Hz}$，试计算正弦序列的数字角频率，并写出正弦序列的表达式。

解　由式（1-3)，数字角频率等于

$$\omega=\frac{\Omega}{f_s}=\frac{2\pi f}{f_s}=\frac{200\pi}{1000}=0.2\pi \quad (\text{rad/s})$$

于是，正弦序列可以表示为

$$x(n)=\sin(0.2\pi n)$$

1.1.1　典型序列

典型序列包括单位脉冲序列、单位阶跃序列、矩形序列、余弦序列、指数序列等，下面分别进行介绍。

1．单位脉冲序列

单位脉冲序列记为$\delta(n)$，其定义如下

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1-4}$$

平移后的单位脉冲序列表示为

$$\delta(n-k)=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}$$

单位脉冲序列$\delta(n)$和平移后的单位脉冲序列$\delta(n-3)$的波形分别如图 1-2（a)、(b）所示。

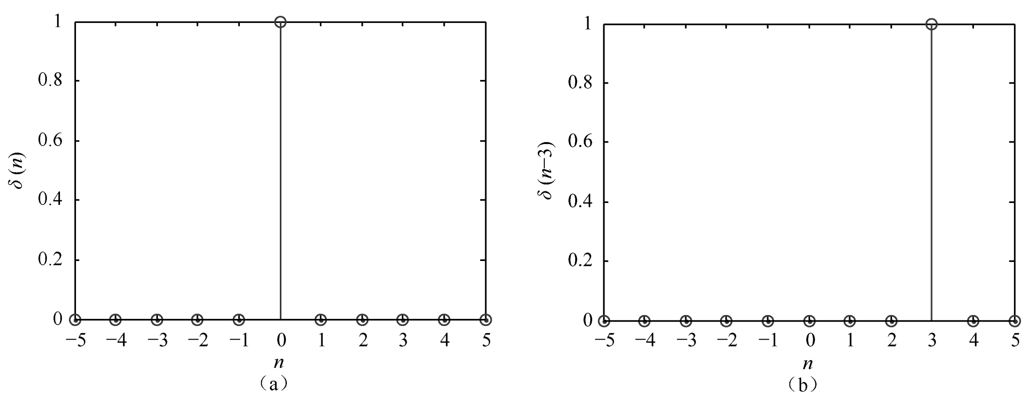


图 1-2　单位脉冲序列及其平移后的波形

2．单位阶跃序列

单位阶跃序列记为$u(n)$，其定义如下

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\0, & n<0\end{cases}\tag{1-5}$$

平移后的单位阶跃序列表示为

$$u(n-k)=\begin{cases}1, & n\geqslant k\\0, & n<k\end{cases}$$

单位脉冲序列与单位阶跃序列之间的关系为

$$u(n)=\sum_{m=0}^{+\infty}\delta(n-m)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)\quad 以及\quad \delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

单位阶跃序列$u(n)$和平移后的单位阶跃序列$u(n+1)$的波形分别如图 1-3（a）、（b）所示。

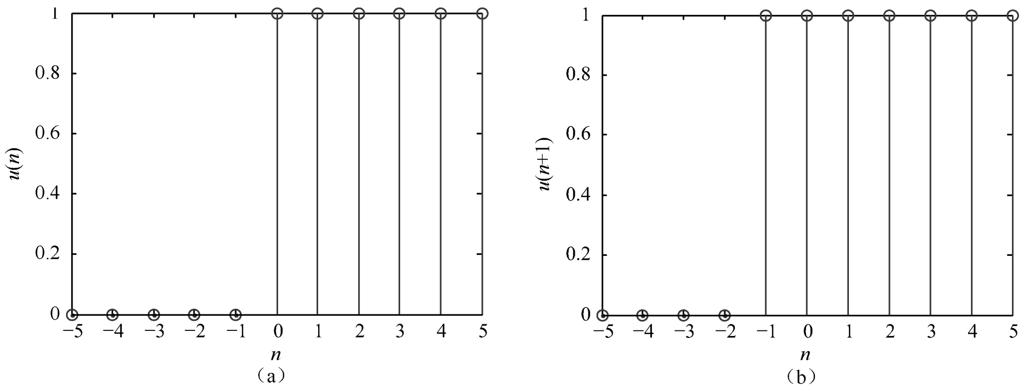


图 1-3　单位阶跃序列及其平移后的波形

3．矩形序列

矩形序列记为$R_N(n)$，矩形序列的定义为

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\0, & 其他\end{cases}\tag{1-6}$$

式中，N表示矩形序列中非零元素的个数，也称为矩形序列的长度。矩形序列可用单位阶跃序列表示，即$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$。矩形序列$R_6(n)$的波形如图 1-4 所示。

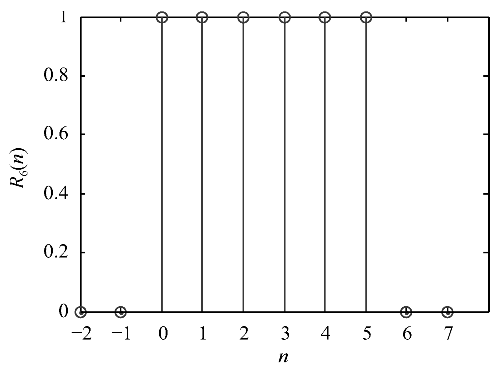


图 1-4　矩形序列$R_6(n)$的波形

4．余弦序列

若余弦序列的振幅、角频率和相位分别用A、ω和ϕ表示，则余弦序列可表示为

$$x(n)=A\cos(\omega n+\phi)\tag{1-7}$$

也可将余弦序列分解为同相分量和正交分量，即

$x(n) = x_{\mathrm{i}}(n) + x_{\mathrm{q}}(n)$，其中，同相分量和正交分量分别为$x_{\mathrm{i}}(n) = A\cos\phi\cos\omega n$，$x_{\mathrm{q}}(n) = -A\sin\phi\ \sin\omega n$。当给定数字角频率$\omega = 0$，$\omega = 0.1\pi$，$\omega = 0.8\pi$，以及$\omega = \pi$，而且振幅均为$A = 1$，相位均为$\phi = 0$时，图 1-5（a）、（b）、（c）以及（d）分别给出了相应余弦序列的波形。

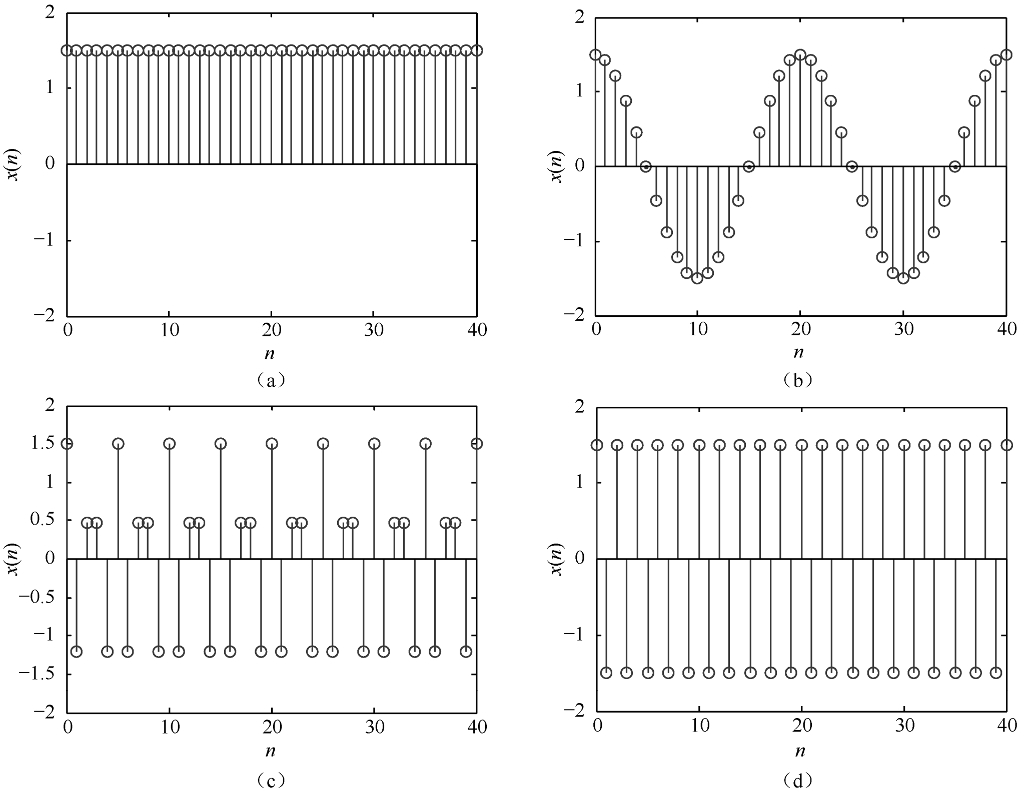


图 1-5　余弦序列的波形

5．指数序列

指数序列的一般形式为

$$x(n) = A\alpha^n\text{，}\quad -\infty < n < +\infty \tag{1-8}$$

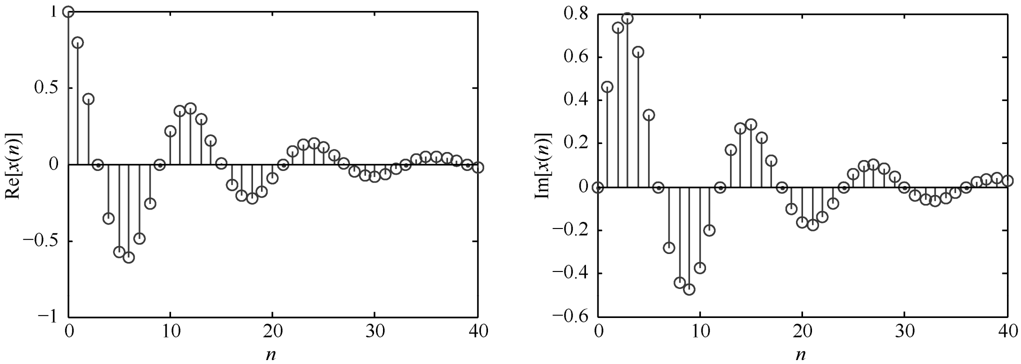
式中，A和α可以取实数或复数。特别地，当$\alpha = \mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)}$，$A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$时，指数序列可表示为

$$x(n) = A\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)n} = |A|\,\mathrm{e}^{\sigma n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega n+\phi)} \tag{1-9}$$

式中的指数序列一般称为复指数序列。进一步地，将复指数序列进行实部虚部分解得到

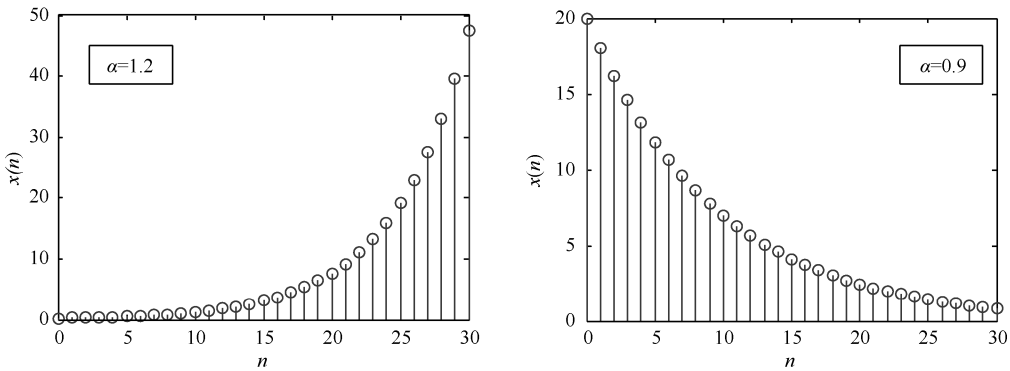
$$x(n) = |A|\,\mathrm{e}^{\sigma n}\cos(\omega n + \phi) + \mathrm{j}\,|A|\,\mathrm{e}^{\sigma n}\sin(\omega n + \phi)$$

当$\sigma = 0$时，复指数序列的实部和虚部是振幅恒定的余弦或正弦序列；当$\sigma > 0$，$n > 0$时，复指数序列的实部和虚部是振幅递增的余弦或正弦序列；当$\sigma < 0$，$n > 0$时，复指数序列的实部和虚部是振幅递减的余弦或正弦序列。复指数序列$x(n) = \mathrm{e}^{(-1/12+\mathrm{j}\pi/6)n}$的实部和虚部的波形分别如图 1-6（a）、（b）所示。作为特例，实指数序列$x(n) = 0.2\times(1.2)^n$及$x(n) = 20\times(0.9)^n$的波形分别如图 1-7（a）、（b）所示。



（a）　（b）

图 1-6　复指数序列的实部和虚部的波形



（a）　（b）

图 1-7　实指数序列的波形

6．周期序列

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N，使得下面等式成立

$$x(n) = x(n+N) \tag{1-10}$$

则称序列 $x(n)$ 为周期序列，周期为 N。特别地，对于正弦型序列 $x(n) = A\sin(\omega_0 n + \phi)$ 有

$$x(n+N) = A\sin(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi)$$

为了满足条件 $x(n) = x(n+N)$，则要求 $N = \dfrac{2\pi}{\omega_0}k$。若 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数，则正弦序列是以 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为周期的周期序列；若 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数，则应取合适的 k，使得 $N = \dfrac{2\pi}{\omega_0}k$ 为整数，此时正弦序列的周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}k$；若 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数，则此时正弦序列为非周期序列。

例 1-2　判断下列每个序列是否是周期序列，若是，试确定其周期。

（1）$x(n) = A\cos\left(\dfrac{5}{8}\pi n - \dfrac{\pi}{8}\right)$

（2） $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{5}n+\frac{\pi}{6}\right)}$

（3） $x(n)=\sin(5\pi n)+\cos(12n)$

解 （1）由 $x(n)=A\cos\left(\frac{5}{8}\pi n-\frac{\pi}{8}\right)$ 可得

$$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\frac{5}{8}\pi}=\frac{16}{5}$$

所以 $x(n)$ 是周期性序列，周期为 16。

（2）利用欧拉公式对 $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{5}n+\frac{\pi}{6}\right)}$ 展开

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{5}n+\frac{\pi}{6}\right)}=\cos\left(\frac{1}{5}n+\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{5}n+\frac{\pi}{6}\right)$$

可得

$$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\frac{1}{5}}=10\pi$$

结果为无理数，所以 $x(n)$ 是非周期序列。

（3）由 $x(n)=\sin(5\pi n)+\cos(12n)$ 可得

$$\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2\pi}{5\pi}=\frac{2}{5}，\quad \frac{2\pi}{\omega_2}=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$$

可知对于 $x(n)$ 来说， $\cos(12n)$ 是非周期性的，因此 $x(n)$ 是非周期序列。

1.1.2 序列的运算及应用

序列的简单运算包括加法、乘法、移位、翻转及尺度变换等。

1．序列的加法

序列的加法运算可用于提高噪声干扰数据的质量。在通常情况下，前后多次测量中真实序列基本保持不变，而加性噪声序列是随机的。假设 $w_i(n)$ 表示在第 i 次测量中对真实序列 $s(n)$ 造成干扰的噪声序列，第 i 次测量结果为 $x_i(n)=s(n)+w_i(n)$ 。经过 K 次测量后，得到平均数据序列为

$$x_{\text{ave}}(n)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}x_i(n)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(s(n)+w_i(n))=s(n)+\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}w_i(n)$$

因为噪声的随机性，当 K 足够大时噪声序列的平均值将非常小，于是 $x_{\text{ave}}(n)$ 是对真实数据序列的一个合理近似。假设原始未受干扰的数据序列 $s(n)=2(n(0.9)^n)$，噪声序列 $w(n)$ 是均值为 0，方差为 1 的高斯白噪声。图 1-8（a）、（b）分别显示了原始未受干扰序列的波形以及单次测量中噪声序列的波形。图 1-9（a）、（b）分别显示了单次测量中受干扰序列的波形以及经过 50 次测量后平均序列的波形。

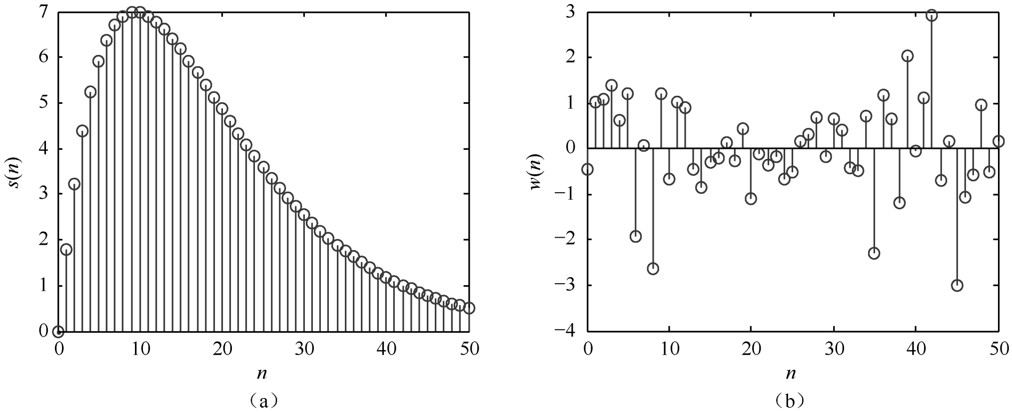


图 1-8　原始序列及噪声序列的波形

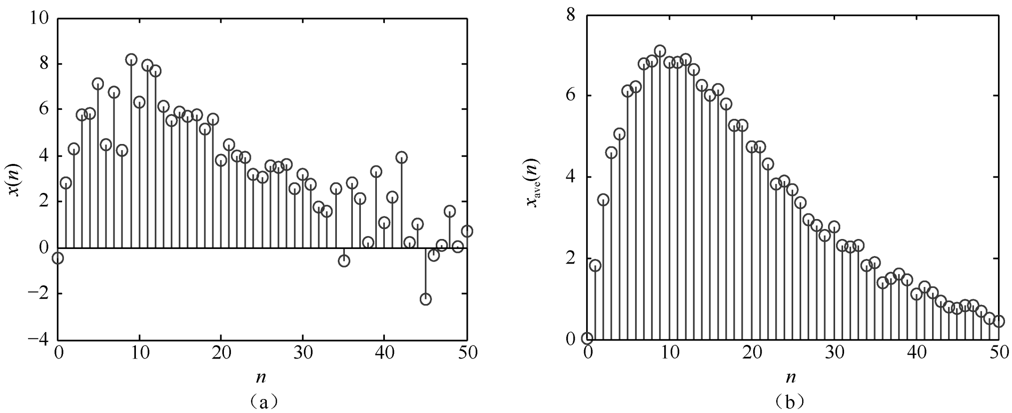


图 1-9　干扰序列及平均序列的波形

从图 1-9 可明显看出，经过 50 次测量后平均序列的波形相比于单次测量的受干扰序列的波形更接近于原来的真实值。

2．序列的乘法

序列的乘法运算就是将序列的样本值逐点对应相乘。例如，信号调制是一种序列乘法运算。设序列 $x_1(n)=\cos(\omega_1 n)$， $x_2(n)=\cos(\omega_2 n)$，其中 $\pi>\omega_2 \gg \omega_1>0$，则两序列的乘积为

$$y(n)=\cos(\omega_1 n)\cos(\omega_2 n)$$

使用三角恒等式可得

$$y(n)=\frac{1}{2}\cos[(\omega_2+\omega_1)n]+\frac{1}{2}\cos[(\omega_2-\omega_1)n]$$

两个正弦序列相乘得到两个新的正弦序列的和，其频率分别为 $\omega_2+\omega_1$ 和 $\omega_2-\omega_1$，即分别为原正弦序列的数字角频率之和，及数字角频率之差。若已知两个正弦序列的数字角频率分别为 $\omega_1=0.01\pi$ 和 $\omega_2=0.1\pi$，则上述两个正弦序列相乘后的波形如图 1-10 所示，其幅度随时间变化而变化。

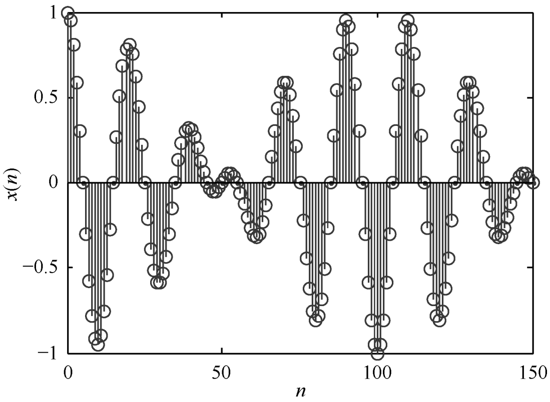


图 1-10　两个正弦序列相乘后的波形

3．序列的移位、翻转及尺度变换

序列 $x(n)$ 的移位可以表示为 $x(n-n_0)$。当 $n_0>0$ 时，表示将序列向右移动；当 $n_0<0$ 时，表示将序列向左移动。序列 $x(n)$ 的翻转可以表示为 $x(-n)$，序列 $x(n)$ 中位于正半轴的部分经过翻转后位于负半轴的位置，而序列 $x(n)$ 中位于负半轴的部分经过翻转后位于正半轴的位置。序列 $x(n)$ 的尺度变换可以表示为 $x(kn)$，它是对序列 $x(n)$ 每隔 k 点取一个点形成的序列。

1.2　线性移不变系统

设离散时间系统的输入为 $x(n)$，离散时间系统的输出为 $y(n)$。输出与输入之间的运算关系用 $T[\bullet]$ 表示

$$y(n)=T[x(n)] \quad (1\text{-}11)$$

离散时间系统的输入输出关系如图 1-11 所示。

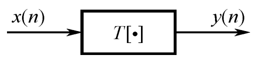


图 1-11　离散时间系统的输入输出关系

1.2.1　离散时间系统举例

在 1.1 节中已知，若可以得到数据的多次测量结果，则可通过序列加法运算获得未受干扰数据的近似估计。但是，在某些应用中不能对数据进行重复测量，这时，一种估计数据在 n 时刻的值 $s(n)$ 的常用方法是，利用 n 时刻附近的 M 个连续测量数据进行平均，即

$$y(n)=\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}x(n-l)$$

式中，离散时间系统通常称为 M 点滑动平均滤波器，它包括 $M-1$ 次加法、1 次除法和可以存储 M 个输入数据的存储器。M 点滑动平均滤波器还可以写为

$$y(n)=y(n-1)+\frac{1}{M}(x(n)-x(n-M))$$

式中，M 点滑动平均滤波器是更加有效的实现方式，它仅包含 2 次加法和 1 次除法，计算量显著减少。假设原始未受干扰的数据序列 $s(n)=2(n(0.9)^n)$，噪声序列 $w(n)$ 是均值为 0，方差

为 1 的高斯白噪声，测量数据序列 $x(n)=s(n)+w(n)$ 。图 1-12（a）～（c）分别显示了未受干扰数据序列、噪声序列以及测量数据序列，图 1-12（d）显示了 $M=10$ 时的滑动平均滤波器的输出结果。可见，滑动平均滤波器具有低通滤波的功能，它通过去除高频成分来平滑测量数据。

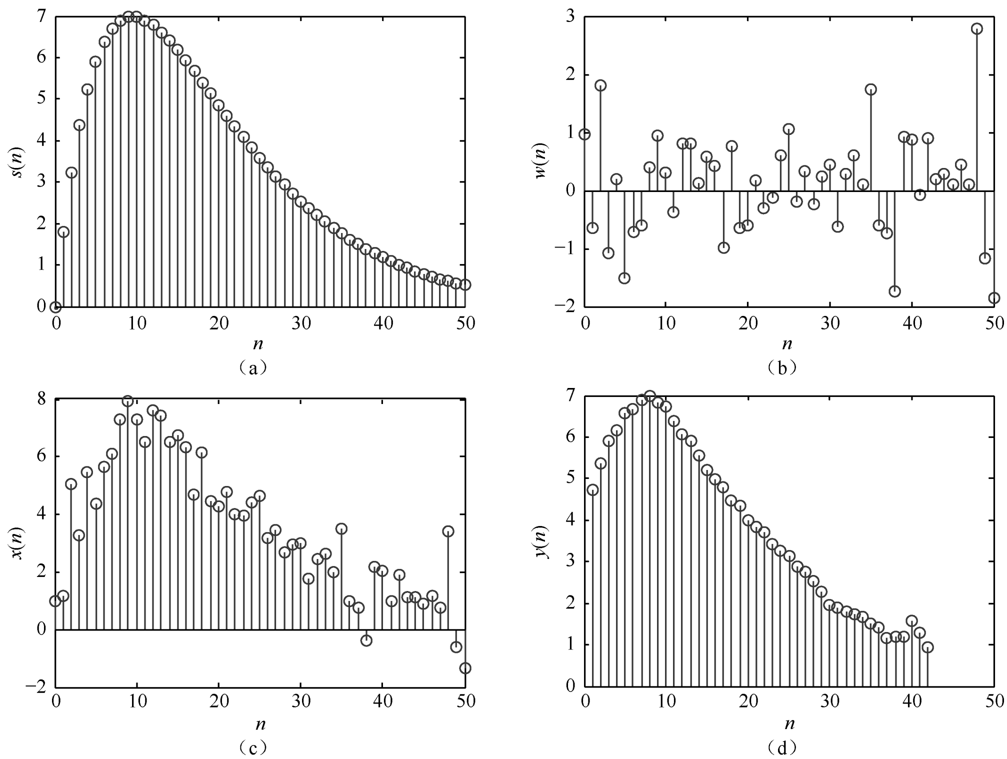


图 1-12　滑动平均滤波器

1.2.2　离散时间系统分类

1．线性系统

若系统的输入、输出之间满足线性叠加性质，则这类系统可称为线性系统。设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别为系统的输入序列，其输出分别用 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 表示，即

$$y_1(n)=T[x_1(n)]，\quad y_2(n)=T[x_2(n)]$$

那么线性系统应满足以下两个条件

$$T[x_1(n)+x_2(n)]=y_1(n)+y_2(n) \tag{1-12}$$

$$T[ax_1(n)]=ay_1(n) \tag{1-13}$$

上述两个条件分别表示系统的可加性和齐次性。线性系统的两个条件也可以综合在一个表达式中，即

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n) \tag{1-14}$$

2．移不变系统

如果系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关，则这类系统可称为移不变系统。具体来说，移不变系统应该满足以下条件

$$T[x(n-n_0)]=y(n-n_0) \tag{1-15}$$

式中，n_0 为任意整数。

例 1-3 试判断下列系统是否是线性系统，是否是移不变系统。

（1） $y(n)=x(-n)$

（2） $y(n)=x(n)\cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right)$

（3） $y(n)=x^2(n)$

解 （1）根据 $y(n)=x(-n)$，可得

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=x_1(-n)$$
$$y_2(n)=T[x_2(n)]=x_2(-n)$$

因此，$y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 的线性组合形式为

$$ay_1(n)+by_2(n)=ax_1(-n)+bx_2(-n)$$

将 $ax_1(n)+bx_2(n)$作用于系统可得

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(-n)+bx_2(-n)$$

可见

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$

满足叠加原理，所以系统是线性系统。

将 $x(n-m)$ 作用于系统可得

$$T[x(n-m)]=x(-n-m)$$

而根据已知条件

$$y(n-m)=x(-(n-m))=x(-n+m)$$

即

$$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

所以系统不是移不变系统。

（2）由 $y(n)=x(n)\cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right)$，可得

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=x_1(n)\cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right)$$
$$y_2(n)=T[x_2(n)]=x_2(n)\cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right)$$

因此 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 的线性组合形式为

$$ay_1(n)+by_2(n)=ax_1(n)\cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right)+bx_2(n)\cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right)$$

将 $ax_1(n)+bx_2(n)$作用于系统可得

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=(ax_1(n)+bx_2(n))\cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right)$$

可见

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$

满足叠加原理，所以系统是线性系统。

将 $x(n-m)$ 作用于系统可得

$$T[x(n-m)]=x(n-m)\cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right)$$

而根据已知条件

$$y(n-m)=x(n-m)\cos\left(\frac{1}{6}\pi(n-m)\right)$$

即

$$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

所以系统不是移不变系统。

（3）由 $y(n)=x^2(n)$ ，可得

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=[x_1(n)]^2$$

$$y_2(n)=T[x_2(n)]=[x_2(n)]^2$$

因此 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 的线性组合形式为

$$ay_1(n)+by_2(n)=a[x_1(n)]^2+b[x_2(n)]^2$$

将 $ax_1(n)+bx_2(n)$作用于系统可得

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]^2=a^2[x_1(n)]^2+2abx_1(n)x_2(n)+b^2[x_2(n)]^2$$

可见

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]\neq ay_1(n)+by_2(n)$$

不满足叠加原理，所以系统不是线性系统。

将 $x(n-m)$ 作用于系统可得

$$T[x(n-m)]=[x(n-m)]^2$$

而根据已知条件

$$y(n-m)=[x(n-m)]^2$$

即

$$T[x(n-m)]=y(n-m)$$

所以系统是移不变系统。

3．因果系统

如果系统在 n 时刻的输出只取决于 n 时刻及 n 时刻之前的输入，则这类系统可称为因果系统。线性移不变系统具有因果性的充分必要条件是系统的单位脉冲响应满足以下条件：

$$h(n)=0\text{，}\quad n<0 \tag{1-16}$$

系统的单位脉冲响应是指输入为 $\delta(n)$ 时零状态响应。

4. 稳定系统

如果系统对任意的有界输入，得到的输出也是有界的，则这类系统可称为稳定系统。线性移不变系统具有稳定性的充分必要条件是系统的单位脉冲响应满足以下条件

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \tag{1-17}$$

例 1-4　试判断下列系统是否是因果系统，是否是稳定系统。

（1） $y(n) = x(n^2)$

（2） $y(n) = nx(n)$

（3） $y(n) = x(n+3) + x(n)$

解　（1）根据 $y(n) = x(n^2)$，可知当 $n > 1$ 时，$n^2 > n$。即系统在 n 时刻的输出依赖于系统在 n 时刻之后的输入。因此，系统是非因果的。

另外，设 $|x(n)| \leqslant M < \infty$，则由已知条件可得

$$|y(n)| = |x(n^2)| \leqslant M < \infty$$

即当系统的输入有界时，系统输出也是有界的。因此，系统是稳定的。

（2）根据 $y(n) = nx(n)$，可知系统在 n 时刻的输出仅依赖于系统在 n 时刻的输入。因此，系统是因果的。

另外，设 $|x(n)| \leqslant M < \infty$，则由已知条件可得

$$|y(n)| = |nx(n)| \leqslant nM$$

当 n 趋于无穷大时，系统输出也趋于无穷大。因此，系统是不稳定的。

（3）根据 $y(n) = x(n+3) + x(n)$，可知系统在 n 时刻的输出依赖于系统在 n 时刻的输入，以及在 $n+3$ 时刻的输入。因此，系统是非因果的。

另外，设 $|x(n)| \leqslant M < \infty$，则由已知条件可得

$$|y(n)| = |x(n+3) + x(n)| \leqslant |x(n+3)| + |x(n)| \leqslant 2M < \infty$$

即当系统的输入有界时，系统输出也是有界的。因此，系统是稳定的。

例 1-5　根据下列系统的单位脉冲响应 $h(n)$，判断系统的因果性及稳定性。

（1） $h(n) = 2^n u(n)$

（2） $h(n) = 2^n u(-n)$

（3） $h(n) = u(2-n)$

解　（1）根据 $h(n) = 2^n u(n)$，可知

$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

所以系统是因果系统，又因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots \Rightarrow \infty$$

因此系统是不稳定系统。

（2）根据 $h(n) = 2^n u(-n)$，可知

$$h(n) \neq 0, \quad n < 0$$

所以系统是非因果系统，又因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots=2$$

因此系统是稳定系统。

（3）根据 $h(n)=u(2-n)$，可知

$$h(n)\neq 0,\quad n<0$$

所以系统是非因果系统，又因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{2}u(2-n)=1+1+1+1+\cdots\Rightarrow\infty$$

因此系统是非稳定系统。

1.3　离散时间系统的输入/输出关系

1.3.1　常系数线性差分方程

针对某个系统，仅研究系统输入与输出之间的关系，而不关心系统内部的具体结构，这种方法称为系统的输入输出描述法。对于线性移不变离散时间系统，可用一个常系数线性差分方程进行描述，即

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a(k)y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b(r)x(n-r) \tag{1-18}$$

式中，$a(k)$、$b(r)$ 是方程的系数，其中 $k=1,\cdots,N$，$r=0,\cdots,M$。给定系统的输入信号 $x(n)$，以及系统的初始条件，可根据常系数线性差分方程求解系统的输出 $y(n)$。

例 1-6　设系统差分方程为

$$y(n)=2y(n-1)+x(n)$$

其中 $x(n)$ 为输入，$y(n)$ 为输出。当初始条件为 $y(0)=0$ 时，试判断系统是否是线性的，是否是移不变的。

解　（a）设 $x_1(n)=\delta(n)$，$y_1(n)=2y_1(n-1)+x_1(n)$

向 $n>0$ 方向递推，得到

$$y_1(1)=2y_1(0)+x_1(1)=0$$
$$y_1(2)=2y_1(1)+x_1(2)=0$$
$$\vdots$$
$$y_1(n)=2y_1(n-1)+x_1(n)=0$$

因此 n 取非负时刻的输出如下

$$y_1(n)=0,\quad n\geqslant 0$$

向 $n<0$ 方向递推，首先将原差分方程改写为

$$y_1(n+1)=2y_1(n)+x_1(n+1)$$

或写为

$$y_1(n)=\frac{1}{2}[y_1(n+1)-x_1(n+1)]$$

因而 n 取负时刻的输出如下

$$y_1(-1) = \frac{1}{2}[y_1(0) - x_1(0)] = -\frac{1}{2}$$

$$y_1(-2) = \frac{1}{2}[y_1(-1) - x_1(-1)] = -\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y_1(-3) = \frac{1}{2}[y_1(-2) - x_1(-2)] = -\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$y_1(n) = \frac{1}{2}[y_1(n+1) - x_1(n+1)] = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$$

综合以上结果，可知

$$y_1(n) = -2^n u(-n-1)$$

（b）设 $x_2(n) = \delta(n-1)$， $y_2(n) = 2y_2(n-1) + x_2(n)$

向 $n > 0$ 方向递推，得到

$$y_2(1) = 2y_2(0) + x_2(1) = 1$$

$$y_2(2) = 2y_2(1) + x_2(2) = 2$$

$$\vdots$$

$$y_2(n) = 2y_2(n-1) + x_2(n) = 2^{n-1}$$

因此 $n > 0$ 时刻的输出如下

$$y_2(n) = 2^{n-1}，\quad n \geqslant 1$$

向 $n < 0$ 方向递推，首先将原差分方程改写为

$$y_2(n+1) = 2y_2(n) + x_2(n+1)$$

或写为

$$y_2(n) = \frac{1}{2}[y_2(n+1) - x_2(n+1)]$$

因而 $n < 0$ 时刻的输出如下

$$y_2(-1) = \frac{1}{2}[y_2(0) - x_2(0)] = 0$$

$$y_2(-2) = \frac{1}{2}[y_2(-1) - x_2(-1)] = 0$$

$$y_2(-3) = \frac{1}{2}[y_2(-2) - x_2(-2)] = 0$$

$$\vdots$$

$$y_2(n) = \frac{1}{2}[y_2(n+1) - x_2(n+1)] = 0$$

综合以上结果，可知

$$y_2(n) = 2^{n-1} u(n-1)$$

由（a）、（b）的结果可知，$x_2(n)$ 是 $x_1(n)$ 向右移动一位后的结果，但是 $y_2(n)$ 与 $y_1(n)$ 并不是右移一位的关系。所以，在初始条件为 $y(0) = 0$ 时，系统不是移不变系统。

（c）设 $x_3(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$，$y_3(n)=2y_3(n-1)+x_3(n)$

向 $n>0$ 方向递推，得到

$$y_3(1)=2y_3(0)+x_3(1)=1$$
$$y_3(2)=2y_3(1)+x_3(2)=2$$
$$\vdots$$
$$y_3(n)=2y_3(n-1)+x_3(n)=2^{n-1}$$

因此 $n>0$ 时刻的输出如下

$$y_3(n)=2^{n-1}\text{，}\quad n\geqslant 1$$

向 $n<0$ 方向递推，首先将原差分方程改写为

$$y_3(n+1)=2y_3(n)+x_3(n+1)$$

或写为

$$y_3(n)=\frac{1}{2}[y_3(n+1)-x_3(n+1)]$$

因而 $n<0$ 时刻的输出如下

$$y_3(-1)=\frac{1}{2}[y_3(0)-x_3(0)]=-\frac{1}{2}$$
$$y_3(-2)=\frac{1}{2}[y_3(-1)-x_3(-1)]=-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$y_3(-3)=\frac{1}{2}[y_3(-2)-x_3(-2)]=-\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$\vdots$$
$$y_3(n)=\frac{1}{2}[y_3(n+1)-x_3(n+1)]=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$$

综合以上结果，可知

$$y_3(n)=2^{n-1}u(n-1)-2^n u(-n-1)=y_1(n)+y_2(n)$$

所以，在初始条件为 $y(0)=0$ 时，系统是线性系统。

1.3.2　线性卷积

除了用常系数线性差分方程描述线性移不变系统的输入输出关系，还可以通过计算输入序列与单位脉冲序列之间的线性卷积，得到线性移不变系统的输出序列。设线性移不变系统的输入为 $x(n)$，则输入序列可以表示为一系列单位脉冲序列的移位加权和，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

那么系统的输出为

$$y(n)=T[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)]$$

根据线性移不变系统的线性性质，得到

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]$$

再根据线性移不变系统的移不变性质，得到

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n) \qquad (1\text{-}19)$$

式中，输入序列与单位脉冲序列之间的运算称为线性卷积，并用符号“∗”表示。

例 1-7　已知序列 $x(n)=b^n u(n)$，$h(n)=a^n u(n)$，求系统的输出 $y(n)$。

解　直接由卷积和的定义得到

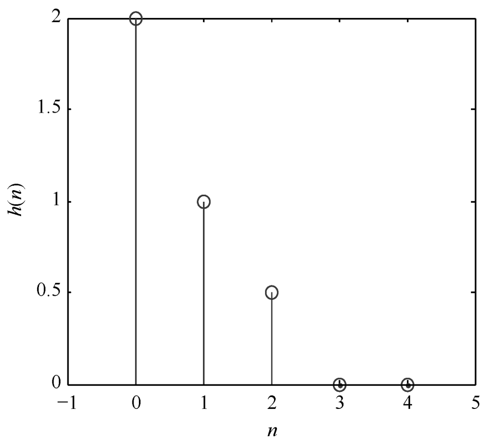
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b^k u(k)a^{n-k}u(n-k)$$

根据单位阶跃序列的定义知道：$u(k)=1$，$k\geqslant 0$，以及 $u(n-k)=1$，$k\leqslant n$，因此，上述卷积求和过程可以简化为 $y(n)=\sum_{k=0}^{n}b^k a^{n-k}$，$n\geqslant 0$，或者表示为 $y(n)=\sum_{k=0}^{n}b^k a^{n-k}u(n)$。由几何级数的求和公式得到

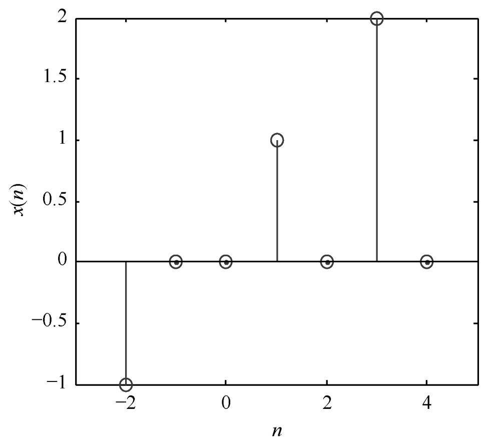
$$y(n)=a^n\frac{1-(b/a)^{n+1}}{1-b/a}u(n)$$

因此，当 $a=b$ 时，$y(n)=a^n(n+1)u(n)$；当 $a\neq b$ 时，$y(n)=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}u(n)$。

例 1-8　已知线性移不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入序列 $x(n)$ 分别如图 1-13（a）、（b）所示，试用列表法计算系统的输出序列 $y(n)$。



（a）



（b）

图 1-13　线性移不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入序列 $x(n)$

解　根据单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入序列 $x(n)$ 的数值，采用列表法求解输出 $y(n)$ 的过程如表 1-1 所示。

表 1-1　通过列表法求解线性卷积

m	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4		
$x(m)$			−1	0	0	1	0	2			
$h(m)$					2	1	0.5				
$h(-2-m)$	0.5	1	2								$y(-2)=-2$
$h(-1-m)$		0.5	1	2							$y(-1)=-1$
$h(-m)$			0.5	1	2						$y(0)=-0.5$
$h(1-m)$				0.5	1	2					$y(1)=2$
$h(2-m)$					0.5	1	2				$y(2)=1$
$h(3-m)$						0.5	1	2			$y(3)=4.5$
$h(4-m)$							0.5	1	2		$y(4)=2$
$h(5-m)$								0.5	1	2	$y(5)=1$

可见，除了直接利用线性卷积的公式进行卷积计算外，还可以利用列表法实现线性卷积的计算。但是需要注意的是，列表法仅适合于计算两个有限长序列的线性卷积。

例 1-9　设有一因果系统，其输入、输出关系由以下差分方程确定

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

（1）求该系统的单位脉冲响应；

（2）当系统输入 $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)$ 时，求系统的输出响应。

解　（1）令系统输入 $x(n)=\delta(n)$，因为系统是因果系统，因此有

$$y(n)=h(n)=0\,,\quad n<0$$

所以

$$h(0)=y(0)=\frac{1}{2}y(-1)+x(0)+\frac{1}{2}x(-1)=1$$

$$h(1)=y(1)=\frac{1}{2}y(0)+x(1)+\frac{1}{2}x(0)=1$$

$$h(2)=y(2)=\frac{1}{2}y(1)+x(2)+\frac{1}{2}x(1)=\frac{1}{2}$$

$$h(3)=y(3)=\frac{1}{2}y(2)+x(3)+\frac{1}{2}x(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

可以推出

$$h(n)=y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad n\geqslant 1$$

因此，系统的单位脉冲响应为

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)$$

（2）利用卷积和公式

$$
\begin{aligned}
y(n)=x(n)*h(n)&=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)\right]*\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)*\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)+\delta(n)*\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)\\
&=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)\right)*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n))+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)+\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}u(m-1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n-m)}u(n-m)\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)+\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n-m)}u(n-1)\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)+2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)^{m}u(n-1)\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)+2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}u(n-1)\\
&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{2}}u(n-1)+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}u(n)
\end{aligned}
$$

1.4　连续时间信号的采样

在许多应用中，需要首先将连续信号转换为离散时间信号，并进行加工处理，然后再将处理后的离散时间信号重新转换为连续信号。采样定理为连续信号与离散时间信号之间的相互转换提供了理论基础。

1.4.1　时域采样定理

采样是指利用采样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中抽取一系列的离散样值，而这些离散样值就是通常所说的离散时间信号。假设采样后的信号用 $f_{\mathrm{d}}(t)$ 表示，则

$$f_{\mathrm{d}}(t)=f(t)p(t) \tag{1-20}$$

为了得到时域采样定理，下面着重研究连续信号 $f(t)$ 的频谱与采样信号 $f_{\mathrm{d}}(t)$ 的频谱之间的联系。首先，根据连续信号傅里叶变换的频域卷积定理可知

$$F_{\mathrm{d}}(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\Omega)*P(\mathrm{j}\Omega) \tag{1-21}$$

即采样信号 $f_{\mathrm{d}}(t)$ 的频谱等于连续信号 $f(t)$ 的频谱与采样脉冲序列 $p(t)$ 的频谱进行卷积计算后的结果。为了方便分析，假设采样脉冲序列 $p(t)$ 可以表示为如下的形式

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_{\mathrm{s}})$$

式中，$\delta(t)$ 表示单位冲激函数，T_{s} 表示采样周期。由于采样脉冲序列 $p(t)$ 为周期 T_{s} 的周期信号，可展开为指数形式的傅里叶级数，即

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)t}$$

其中，F_n 表示傅里叶级数的系数，它的大小等于

$$\begin{aligned}F_n&=\frac{1}{T_{\mathrm{s}}}\int_{-T_{\mathrm{s}}/2}^{T_{\mathrm{s}}/2}p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_{\mathrm{s}}}\int_{-T_{\mathrm{s}}/2}^{T_{\mathrm{s}}/2}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T_{\mathrm{s}}}，\quad n=-\infty,\cdots,+\infty\end{aligned}$$

因此，采样脉冲序列 $p(t)$ 的指数形式的傅里叶级数为

$$p(t)=\frac{1}{T_{\mathrm{s}}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)t}$$

由于复指数函数的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)t}\right]=2\pi\delta\left(\Omega-n\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)\right)$$

因此，采样脉冲序列 $p(t)$ 的傅里叶变换为

$$P(\mathrm{j}\Omega)=\mathcal{F}[p(t)]=\frac{1}{T_{\mathrm{s}}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)t}\right]=\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega-n\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)\right)$$

最后，可以得到采样信号 $f_{\mathrm{d}}(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{d}}(\mathrm{j}\Omega)&=\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\Omega)*\left[\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega-n\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)\right]=\frac{1}{T_{\mathrm{s}}}F(\mathrm{j}\Omega)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega-n\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)\\&=\frac{1}{T_{\mathrm{s}}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\Omega)*\delta\left(\Omega-n\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)=\frac{1}{T_{\mathrm{s}}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F\left(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}n\frac{2\pi}{T_{\mathrm{s}}}\right)\end{aligned}\tag{1-22}$$

式（1-22）表明理想采样信号的频谱是原模拟信号的频谱周期延拓的结果，即原模拟信号的频谱沿频率轴以采样频率 $\Omega_{\mathrm{s}}=2\pi/T_{\mathrm{s}}$ 为周期不断重叠相加。可见，为了不发生频谱混叠，至少要求采样频率大于等于 2 倍的信号最高频率，这便是时域采样定理。

当采样频率大于两倍的信号最高频率，即 $\Omega_{\mathrm{s}}=2\pi/T_{\mathrm{s}}>2\Omega_{\mathrm{h}}$ 时，理想采样信号的频谱与原模拟信号的频谱如图 1-14 所示，此时没有发生频谱混叠。当采样频率正好等于两倍的信号最高频率，即 $\Omega_{\mathrm{s}}=2\pi/T_{\mathrm{s}}=2\Omega_{\mathrm{h}}$ 时，理想采样信号的频谱与原模拟信号的频谱如图 1-15 所示，此时刚好没有发生频谱混叠。当采样频率小于两倍的信号最高频率，即 $\Omega_{\mathrm{s}}=2\pi/T_{\mathrm{s}}<2\Omega_{\mathrm{h}}$ 时，理想采样信号的频谱与原模拟信号的频谱如图 1-16 所示，此时发生了频谱混叠。

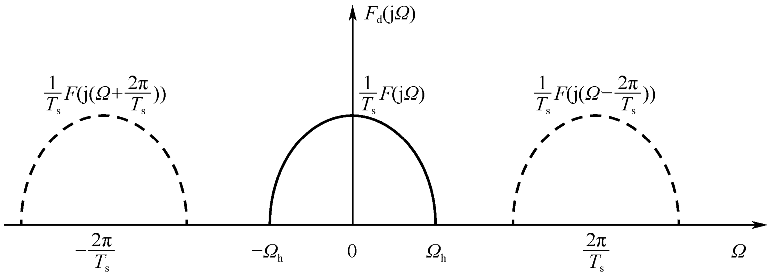


图 1-14　无频谱混叠

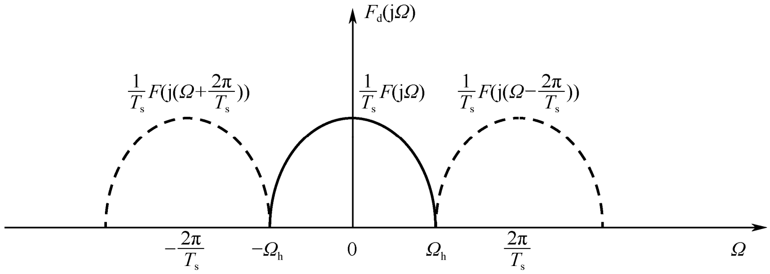


图 1-15　临界频谱混叠

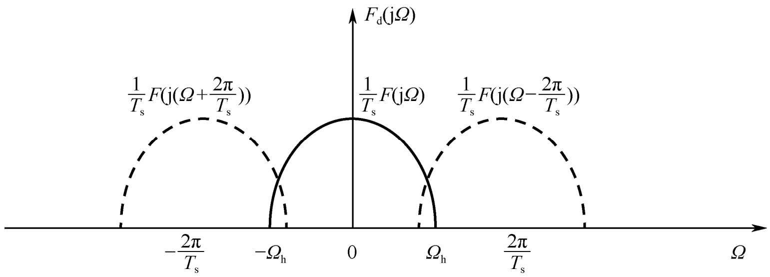


图 1-16　有频谱混叠

对于正弦信号的采样，需要特别说明如下。假设正弦信号的频率为 f_0，按照采样定理则采样频率可选为 $f_s = 2f_0$，即采样频率等于正弦信号频率的两倍，或者说在正弦信号的一个周期内采样两个点。但是，当上述两个采样点正好处于正弦信号的相位 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \pi$ 时，两个采样点的值均为零，即采样序列不包含正弦信号的任何信息；当上述两个采样点正好处于正弦信号的相位 $\varphi = \pi/2$ 及 $\varphi = 3\pi/2$ 时，两个采样点的值为 1 和 –1，此时采样序列虽然包含正弦信号的一部分信息，但仅从采样点大小来看，序列也可能来自方波、三角波或别的某种波形。因此，对正弦信号采样时应遵循以下原则：①采样频率应为正弦信号频率的整数倍，且倍数应不小于 3；②考虑到第 2 章将要介绍的快速傅里叶变换要求序列长度为 2 的整数次幂，所以采样频率可选择为正弦信号频率的 4 倍。

例 1-10　试将以下连续时间信号采样转换成离散时间信号。选取合适的采样频率 f_s 以适应这些信号，使其不产生混叠失真。如果是周期信号，则采样频率 f_s 还应该满足采样后的序列仍为周期性序列。

（1） $x(t) = A\cos(2\pi \times 26t)$