第 1 章　空间解析几何

平面解析几何的知识对学生学习一元函数微积分是十分重要的. 现若想讨论多元函数微积分,空间解析几何的基础知识就必不可少. 本章在建立空间直角坐标系的基础上,先介绍空间中的点与坐标,然后主要讨论空间中的平面与曲面及其对应的方程.

1.1　空间直角坐标系

1.1.1　空间直角坐标系

过空间中的一个定点 O 作三条两两垂直的数轴 Ox,Oy,Oz,它们具有相同的单位长度,即构成了空间直角坐标系,如图 1-1 所示. 常称 O 为坐标原点,分别称三个轴为 x 轴(或横轴),y 轴(或纵轴),z 轴(或竖轴),统称为坐标轴. 它们的正方向符合右手法则,即以右手的握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正身,如图 1-2 所示.

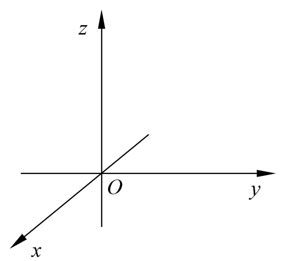

图　1-1

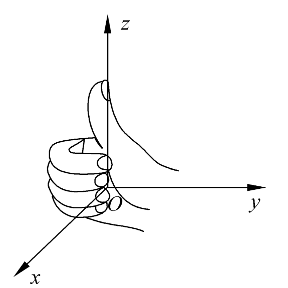

图　1-2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标平面,简称坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面记为 xOy 面,x 轴及 z 轴所确定的坐标面记为 xOz 面,y 轴及 z 轴所确定的坐标面记为 yOz 面.

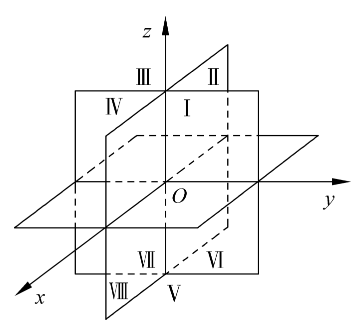

图　1-3

这三个平面将空间划分成 8 个部分,称为空间直角坐标系的 8 个卦限. 含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限,其他为第二、第三、第四卦限,在 xoy 面的上方,从 z 轴的正方向往下看,按逆时针方向确定. 第五至第八卦限分别在第一至第四卦限的下方,如图 1-3 所示,这 8 个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示.

1.1.2 空间中的点坐标

建立了空间直角坐标系后，如同平面直角坐标系，就可建立空间中的点与三元有序数组的一一对应关系.

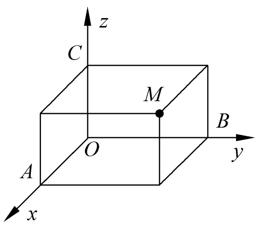

图 1-4

设 M 为空间中的任一点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴依次交于 A、B、C 三点，如图 1-4 所示. 若这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x_0，y_0，z_0，于是点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x_0,y_0,z_0). 反之，任给一有序数组 (x_0,y_0,z_0)，可以在 x 轴、y 轴和 z 轴上取坐标 x_0，y_0，z_0 为的点 A、B、C，并过 A、B、C 分别作与坐标轴垂直的平面，则它们相交于唯一的点 M. 这样就建立了空间中的点 M 与有序数组 (x_0,y_0,z_0) 之间的一一对应关系. 点 M 在该空间直角坐标系中的坐标，x_0，y_0，z_0 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

坐标轴、坐标面上的点，以及 8 个卦限内部的点，其坐标各有一些数值特征，具体如下

坐标轴：x 轴 $(x_0,0,0)$，y 轴 $(0,y_0,0)$，z 轴 $(0,0,z_0)$.

坐标面：xOy 面 $(x_0,y_0,0)$，xOz 面 $(x_0,0,z_0)$，yOz 面 $(0,y_0,z_0)$.

8 个卦限：Ⅰ$(+,+,+)$，Ⅱ$(-,+,+)$，Ⅲ$(-,-,+)$，Ⅳ$(+,-,+)$，

Ⅴ$(+,+,-)$，Ⅵ$(-,+,-)$，Ⅶ$(-,-,-)$，Ⅷ$(+,-,-)$.

1.1.3 空间中两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，为了求它们之间的距离 $|M_1M_2|$，过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，则这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 1-5 所示.

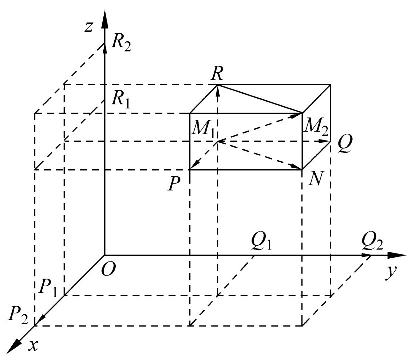

图 1-5

由勾股定理得

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2$$

由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,\quad |PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$$

$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

上式称为空间两点 M_1，M_2 间的距离公式. 特殊地，空间任一点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 1.1.1　求 $P_1(1,2,3)$，$P_2(-2,0,1)$ 两点间的距离.

解　$|P_1P_2| = \sqrt{(-2-1)^2+(0-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{17}$.

例 1.1.2　在 xOy 面上求一点 M，使它到 $A(1,-1,5)$，$B(3,4,4)$ 和 $C(4,6,1)$ 各点的距离相等.

解　根据点的特征设 M 的坐标为 $(x,y,0)$，由题意知

$$|MA| = |MB| = |MC|$$

即

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(0-5)^2} &= \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(0-4)^2}\\ &= \sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2+(0-1)^2},\end{aligned}$$

化简可得

$$\begin{cases}4x+10y=14\\2x+4y=12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=16\\y=-5\end{cases}$$

所以，所求的 M 点的坐标为 $M(16,-5,0)$.

例 1.1.3　试判定以 $A(3,0,8)$，$B(9,-2,5)$，$C(1,3,2)$ 为顶点的三角形的几何特征.

解　由空间两点间的距离公式，有

$$|AB|^2 = (3-9)^2+(0+2)^2+(8-5)^2 = 49$$
$$|AC|^2 = (3-1)^2+(0-3)^2+(8-2)^2 = 49$$
$$|BC|^2 = (9-1)^2+(-2-3)^2+(5-2)^2 = 98$$

由 $|AB|^2=|AC|^2$，知 $|AB|=|AC|$，因而 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 又由于 $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$，知 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

习题 1-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的位置.

$A(1,2,3)$，$B(0,-1,4)$，$C(-4,-1,-3)$，$D(0,0,2)$，
$E(7,-4,-8)$，$F(6,-5,0)$，$G(0,-3,0)$，$H(-2,3,-5)$.

2. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

3. 在 y 轴上求一点 M，使其到两点 $P(2,0,-1)$，$Q(1,-1,3)$ 的距离相等.

4. 在 yOz 面上求一点，使该点与点 $A(3,0,4)$ 和 $B(3,4,0)$ 的距离相等，且与原点的距离为 $3\sqrt{2}$.

5. 试证明以 $A(-3,2,-7)$，$B(2,2,-3)$，$C(-3,6,-2)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

6. 已知三角形的三个顶点为 $A(1,2,3)$,$B(7,10,3)$,$C(-1,3,1)$,证明$\angle A$ 为钝角.

1.2 曲面及其方程

同平面解析几何一样,空间中的线和面也可以看做是满足一定条件的点的集合.为了便于识记,本节只介绍空间直角坐标系中最简单的曲面——平面和一些常见的曲面.

1.2.1 平面及其方程

在平面直角坐标系中,我们知道 $x=a$,$y=b$ 分别表示垂直于 x 轴与 y 轴的两条直线.现在空间直角坐标系中,我们也不难推出 $x=a$,$y=b$,$z=c$ 分别表示垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面.

可见,在平面方程中,x,y,z 三个量的最高次数只能取一次.在此,我们直接给出空间平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

是一个三元一次方程.其中从原点 O 到由 x,y,z 的系数组成的点 $P(A,B,C)$的向量$\overrightarrow{OP}$,称为该平面的法向量(即垂直于该平面的非零向量),记为$\overrightarrow{OP}=\{A,B,C\}$.

根据平面的一般方程中系数 A,B,C,D 是等于零,可知其方程所表示的平面有如下特点:

当 $D=0$ 时,即 $Ax+By+Cz=0$,表示一个过坐标原点的平面;

当 $A=0$ 时,即 $By+Cz+D=0$,法向量$\{0,B,C\}$垂直于 x 轴,表示一个平行与 x 轴的平面,也与 yOz 坐标面垂直;

当 $A=D=0$ 时,即 $By+Cz=0$,表示一个过 x 轴的平面,与 yOz 坐标的垂直;

当 $A=B=0$ 时,即 $Cz+D=0$,法向量$\{0,B,C\}$同时垂直于 x 轴和 y 轴,表示一个垂直与 z 轴的平面,也与 xOy 坐标面平行.

同样可以讨论其他系数为零的情况,这里不再一一叙述.特殊地,若已知某平面过点 $M(x_0,y_0,z_0)$,则 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ 成立,与一般式相减可得过点 $M(x_0,y_0,z_0)$的平面方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

其中 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$,同时也称上式为过点 $M(x_0,y_0,z_0)$的平面的点法式方程,法向量为$\{A,B,C\}$.

例 1.2.1 求过点 $M_0(1,-2,3)$,且以$\{2,-3,4\}$为法向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程,所求平面的方程为

$$2(x-1)-3(y+2)+4(z-3)=0$$

即

$$2x-3y+4z-20=0.$$

例 1.2.2 求平行于 y 轴,且过点 $M_1(1,-5,1)$和 $M_2(3,2,-2)$的平面方程.

解 根据平面平行于 y 轴,可设平面方程为 $Ax+Cz+D=0$.又由平面过点 $M_1(1,-5,1)$和 $M_2(3,2,-2)$,从而有

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ 3A-2C+D=0 \end{cases}$$

解之得，$A=\frac{3}{2}C$，$D=\frac{5}{2}C$. 代入方程，整理得所求平面方程为

$$3x+2z-5=0$$

例 1.2.3　设平面与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$，求此平面的方程.

解　设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 因为三点 P,Q,R 都在平面上，代入方程得

$$\begin{cases} Aa+D=0 \\ Bb+D=0 \\ Cc+D=0 \end{cases}$$

解之得，$A=-\frac{D}{a}$，$B=-\frac{D}{b}$，$C=-\frac{D}{c}$.

代入方程，整理得所求平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

由于 a,b,c 为平面在三个坐标轴上的截距，故上述方程也称为平面的截距式方程.

1.2.2　曲面及其方程

1. 曲面方程的概念

与平面解析几何中曲线方程的定义相仿，可以定义空间曲面的方程.

定义 1.2.1　如果曲面 S（如图 1-6 所示）与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$；

那么，方程 $F(x,y,z)=0$ 就称为曲面 S 的方程，而曲面 S 就称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

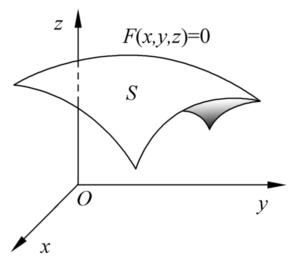

图　1-6

在空间解析几何中，任何曲面都可以看做点的几何轨迹. 因此，在研究曲面时，在曲面与方程之间存在下面两个基本问题：

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这曲面的方程；

(2) 已知坐标 x、y 和 z 间的一个方程时，研究这方程所表示的曲面的形状.

例 1.2.4　建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

解　设 $M(x,y,z)$ 是球面上的任一点，那么 M 到定点 M_0 的长度 $|M_0M|=R$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R, \quad 或 (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程. 而不在球面上的点的坐标都不满足这个方程. 所以

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

就是球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

特殊地,球心在原点 $O(0,0,0)$、半径为 R 的球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

例 1.2.5 求到点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 距离相等的点的轨迹方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的任一点,则有 $|AM|=|BM|$,即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

等式两边平方,然后化简得

$$2x-6y+2z-7=0$$

这就是点的轨迹方程,由前面的讨论知它是一个平面,称为线段 AB 的垂直平分面.

例 1.2.6 断定方程 $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ 表示怎样的曲面?

解 通过配方,原方程可以改写成

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=16$$

与例 1.2.4 比较,可知这是一个球面方程,球心在点$(1,-3,2)$,半径为 $R=4$.

2. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面,这条定直线称为旋转曲面的轴,曲线称为旋转曲面的母线.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C,它的方程为 $f(y,z)=0$,把这曲线绕 z 轴旋转一周,就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面,如图 1-7 所示.

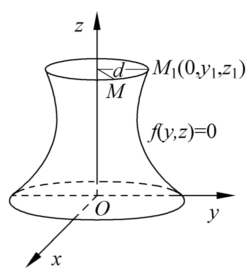

图 1-7

为了求出它的方程,在该旋转曲面上任取一点 $M(x,y,z)$,它是曲线 C 上点 $M_1(0,y_1,z_1)$绕 z 轴旋转而得到的,则有 M_1 点坐标满足方程 $f(y,z)=0$,即 $f(y_1,z_1)=0$,这时 $z=z_1$ 保持不变,且点 M 到 z 轴的距离与点 M_1 到 z 轴的距离相等,$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$,即 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. 将

$$\begin{cases} z_1=z \\ y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

代入方程 $f(y_1,z_1)=0$,从而得该旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

由此可知，在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得到曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

另外，将 xoy 坐标面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 中的 x 改成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，便得到该圆绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$，它表示球心在原点、半径为 R 的球面.

例 1.2.7　求直线 $\begin{cases} z=ay \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

解　因为要求要绕 z 轴旋转，z 保持不变，将方程中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，得所求的旋转曲面的方程

$$z=\pm a\sqrt{x^2+y^2} \quad 或 \quad z^2=a^2(x^2+y^2)$$

它所表示的曲面称为圆锥面，如图 1-8 所示.

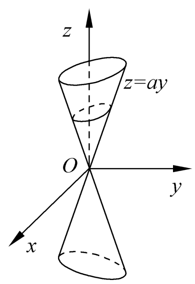

图　1-8

3. 柱面

一般地，平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所生成的曲面称为柱面，定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线.

现在来建立以 xOy 坐标面上的曲线 C：$F(x,y)=0$ 为准线，平行于 z 轴的直线 L 为母线的柱面方程(见图 1-9).

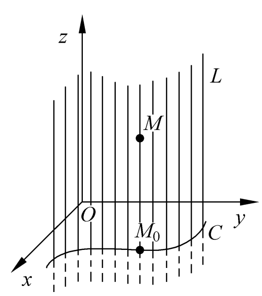

图　1-9

设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任一点，过 M 点作平行于 z 轴的直线交 xOy 坐标面于点 $M_0(x,y,0)$，由柱面定义可知 M_0 必在准线 C 上，所以点 M_0 的坐标满足曲线 C 的方程 F

$(x,y)=0$. 由于方程 $F(x,y)=0$ 不含 z,所以点 $M(x,y,z)$ 也满足方程 $F(x,y)=0$. 而过不在柱面上的点作平行于 z 轴的直线与 xOy 坐标面的交点必不在曲线 C 上,也就是说不在柱面上的点的坐标不满足方程 $F(x,y)=0$,所以不含变量 z 的方程

$$F(x,y)=0$$

在空间直角坐标系中,表示以 xOy 坐标面上的曲线 $F(x,y)=0$ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面.

同理可知,只含 x、z 而缺 y 的方程 $F(x,z)=0$,表示母线平行于 y 轴的柱面,其准线是 xOz 坐标面上的曲线 C:$F(x,z)=0$.

类似地,只含 y、z 而缺 x 的方程 $G(y,z)=0$,表示母线平行于 x 轴的柱面,其准线是 yOz 坐标面上的曲线 C:$G(y,z)=0$.

例如,方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示母线平行于 z 轴,其准线为 xoy 坐标面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 的柱面,如图 1-10 所示,称为圆柱面.

方程 $x^2=2pz$ ($p>0$)表示母线平行于 y 轴,准线是 xoz 坐标面上的抛物线 $x^2=2pz$ 的柱面,如图 1-11 所示,称为抛物柱面.

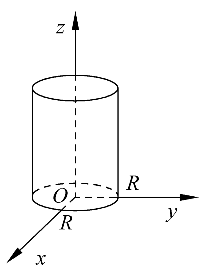

图 1-10

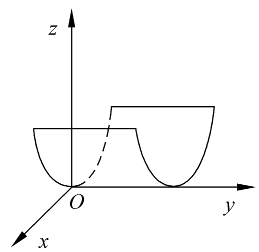

图 1-11

同理,$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面,如图 1-12 所示.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴的双曲柱面,如图 1-13 所示.

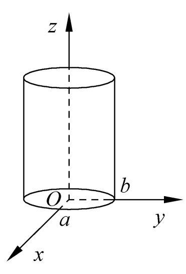

图 1-12

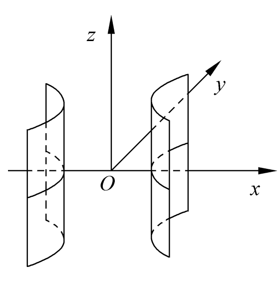

图 1-13

4. 其他常见的二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似,我们把三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面. 把平面称为一次曲面. 为了研究方程所表示的曲面的形状,通常采用截痕法,也就是用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截,考察它们的截痕(即交线)的形状,进而

了解曲面的全貌.

(1) 椭球面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$所表示的曲面称为椭球面,如图 1-14 所示,$a,b,c$ 称为椭球面的三个半轴.

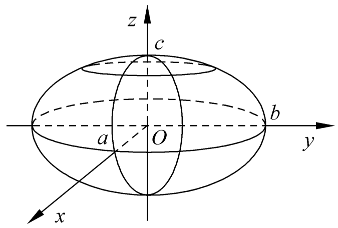

图　1-14

椭球面与三个坐标面的截痕分别是三个椭圆:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

同样方法,用平面 $x=x_1(|x_1|<a)$,$y=y_1(|y_1|<b)$,$z=z_1(|z_1|<c)$分别去截椭球面,可知截痕均为椭圆,且椭圆截面的大小随着远离原点越来越小.

椭球面有以下两种特殊情况:

① 当 $a=b$ 时,此时方程为$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,称为旋转椭球面.可以看成由 xOz 坐标面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.用 $z=z_1(|z_1|<c)$去截旋转椭球面时,得到的截痕是圆.

② 当 $a=b=c$ 时,方程变成$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$,这是球面方程,亦可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

(2) 抛物面

由方程$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$($p$ 与 q 同号)所示的曲面称为椭圆抛物面,如图 1-15 所示.

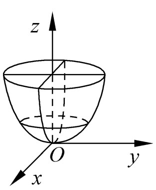

图　1-15

用平面 $z=z_1$ 去截曲面,可知截痕为椭圆$\frac{x^2}{2pz_1}+\frac{y^2}{2qz_1}=1$.且当 z_1 与 p、q 同号时,$|z_1|$越大,椭圆越大;当 $z_1=0$ 时,截痕缩为一点;当 z_1 与 p、q 异号时,没有截痕.

如果 $p=q$,则方程变为$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z$,这种抛物面可以看做是由 xoz 坐标面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面,称为旋转抛物面.

由方程$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$($p$ 与 q 同号)所示的曲面称为双曲抛物面,也称为马鞍面.用平面 $x=x_1$,$y=y_1$ 去截曲面,所得截痕为抛物线,用平面 $z=z_1$ 去截曲面所得截痕为双曲线,它的形状如图 1-16 所示.

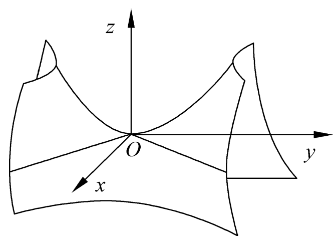

图 1-16

(3) 单叶双曲面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面称为单叶双曲面,如图 1-17 所示,中心轴在 z 轴上.

容易看出,用平面 $z=z_1$ 去截曲面所得的截痕为椭圆,且$|z_1|$越大,椭圆越大.用平面 $x=x_1$,$y=y_1$ 去截曲面,所得截痕均为双曲线.

由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面也是单叶双曲面,只不过中心轴分别在 y 轴和 z 轴.

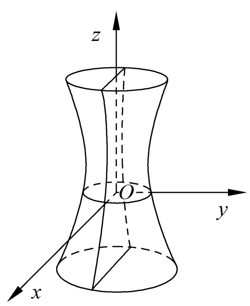

图 1-17

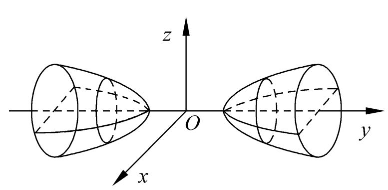

图 1-18

（4）双叶双曲面

由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$所表示的曲面称为双叶双曲面，如图 1-18 所示，中心轴在 y 轴上.

容易看出，用平面 $x=x_1$，$z=z_1$ 去截曲面所得的截痕均为双曲线，且$|z_1|$越大，椭圆越大. 用平面 $y=y_1$（$|y_1|>b$）去截曲面，所得截痕为椭圆.

类似地，由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 和$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 所表示的曲面也是双叶双曲面，只不过中心轴分别在 z 轴和 x 轴.

习题 1-2

1. 指出下列各平面的特殊位置

（1）$x=0$；　（2）$2y-1=0$；　（3）$3x-2y-5=0$；

（4）$x-\sqrt{3}y=0$；　（5）$y+3z=0$；　（6）$x-6z=0$.

2. 求过 z 轴和点 $M(-3,1,-2)$的平面方程.

3. 求过三点 $M_1(2,0,-1)$，$M_2(-1,-1,1)$，$M_3(-3,-2,1)$的平面方程.

4. 求过点 $M(3,0,-1)$，且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

5. 求过原点和点 $M(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直的平面方程.

6. 建立以点(2,4,−4)为球心且通过坐标原点的球面方程.

7. 将 xOz 坐标面上的抛物线$z^2=5x$ 绕x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

8. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.