第 1 章　动态系统的状态空间描述

1.1　引　　言

经典控制理论以系统的输入、输出特性为研究依据，对线性定常连续系统，其基本数学模型为线性定常高阶微分方程、传递函数；对线性定常离散系统，其基本数学模型则为线性定常高阶差分方程、脉冲传递函数。这些模型仅仅描述系统输入、输出之间的外部特性，不能揭示系统内部各物理量的运动规律；若要完全揭示整个系统的全部运动状况，仅凭输入、输出描述是不够的，即系统的输入、输出描述是一种不完全的描述。

20 世纪 60 年代，人们将状态空间的概念引入控制理论，产生了以状态空间描述为基础、最优控制为核心的现代控制理论。系统动态特性的状态空间描述由两个数学方程组成，一个是反映系统内部状态变量和输入变量间因果关系的状态方程；另一个是表征系统内部状态变量及输入变量与输出变量转换关系的输出方程。系统的状态空间描述不仅描述了系统输入、输出外部特性，而且揭示了系统内部的结构特性，能完全表征系统的所有动力学行为，因而是对系统的一种完全的描述。

经典控制理论主要处理 SISO 线性定常系统的问题，而状态空间法是一种既可用于单输入、单输出线性定常系统，又可用于非线性系统、时变系统、多输入、多输出系统的有效分析和综合方法。状态空间法可方便地使用向量、矩阵等数学工具，简化系统的数学描述。从设计计算的角度看，由于状态空间法是时域的方法，便于应用数字计算机计算求解，这也是状态空间法的优点之一。

建立动态系统的状态空间模型是状态空间分析和综合的基本问题和前提。

1.2　动态系统的状态空间模型

1.2.1　状态空间的基本概念

系统的状态空间模型是建立在状态、状态空间概念的基础之上的。为此，首先对系统、状态、状态空间等基本概念进行定义和讨论。

1. 系统的基本概念

(1) 系统

所谓系统，是由相互制约的各个部分有机结合，且具有一定功能的整体。从输入、输出关系看，自然界存在两类系统：静态系统和动态系统。

(2) 静态系统

对于任意时刻 t，系统的输出唯一地取决于同一时刻的输入，这类系统称为静态系统。该类系统的特征是：任意时刻系统的输出与同一时刻的输入保持确定的关系，而对该时刻以前的输入无任何依赖性，即无记忆，故静态系统亦称为无记忆系统。静态系统的输入、输出关系为代数方程。

图 1-1 所示的电阻电路就属于静态系统。若输入电压为 $u(t)$，对于任意时刻 t，其输出电流

$i(t)$为

$$i(t)=\frac{u(t)}{R} \tag{1-1}$$

显然,t 时刻的输出 $i(t)$ 仅与 t 时刻的输入 $u(t)$ 有关,而与 t 时刻以前的输入 $u(t)$ 无关。

(3) 动态系统

对任意时刻 t,系统的输出不仅与 t 时刻的输入有关,而且与 t 时刻以前的累积有关(这种累积在 $t_0(t_0<t)$ 时刻以初值体现出来),这类系统称为动态系统。由于 t_0 时刻的初值含有过去运动的累积,故动态系统亦称为有记忆系统。动态系统的输入、输出关系为微分方程。

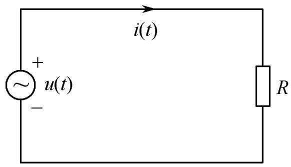

图 1-1　电阻电路

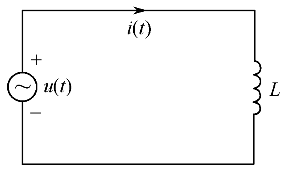

图 1-2　电感电路

考察图 1-2 所示的电感电路,设电感电流 $i(t)$ 为输出,电压 $u(t)$ 为输入,其输入、输出关系为

$$i(t)=i(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{u(\tau)}{L}\mathrm{d}\tau \tag{1-2}$$

式中,$i(t_0)$ 是初始时刻 t_0 电感中流过的电流。

由式(1-2)可见,对含有电感这种储能元件的系统来说,t 时刻的电感电流 $i(t)$ 不仅与时间区间($t_0\sim t$)内的输入 $u(t)$ 有关,且与 t_0 时刻电感的初始电流有关,这种系统称为动态系统。

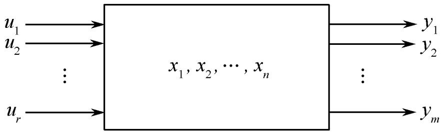

图 1-3　动态系统方框图及其变量

2. 动态系统的两类数学描述

一个动态系统可用图 1-3 所示方框图表示。方框以外的部分称为系统环境,环境对系统的作用称为系统输入,系统对环境的作用称为系统输出,输入变量组用 $u_1,u_2,\cdots,u_r$ 表示,输出变量组用 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 表示,它们均为系统的外部变量。

描述系统内部每个时刻运动状况的变量称为内部变量。若内部变量完全地表征了系统内部的运动状态,则称为状态变量,状态变量组用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示。输入变量、状态变量、输出变量统称为系统变量。

系统动态过程的数学描述实质上就是系统变量间因果关系的一个数学描述式。通常,可将系统的数学描述分为“外部描述”和“内部描述”两种基本类型。

(1) 外部描述

外部描述通常称为输入、输出描述。这种描述将系统的输出取为系统外部输入的直接响应,回避了表征系统内部的动态过程,即把系统当成一个“黑匣”,认为系统的内部结构和内部信息全然不知,系统描述直接反映了输出变量与输入变量间的动态因果关系。

考察图 1-4 所示的 n 级 RC 网络,图中虚线框内为具有放大器隔离的 n 级 RC 电路,系统只有一个输入 u,一个输出 y,并设放大器的输入阻抗为无穷大,输出阻抗为零,放大倍数为 1。如同经典控制理论中所熟知的,系统以输入 u、输出 y 作为变量的外部描述为式(1-3)所示的高阶线性常系数微分方程,即

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y^{(1)}+a_ny=bu \tag{1-3}$$

式中,$y^{(i)}=\mathrm{d}^iy/\mathrm{d}t^i$;$a_i$ 和 b 为实常数,$i=1,2,\cdots,n$。

在已知输入 u 的情况下，解方程式(1-3)，可求出输出响应 y，但不能获悉系统内部电容上电压随时间变化的动态过程。

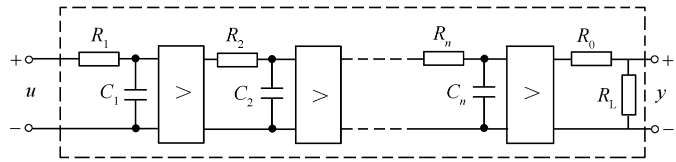

图 1-4　n 级 RC 网络

(2) 内部描述

状态空间描述是内部描述的基本形式，这种描述是基于系统内部结构分析的一类数学模型。其由两个数学方程组成：一个是反映系统内部状态变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和输入变量 $u_1,u_2,\cdots,u_r$ 间因果关系的数学表达式，称为状态方程。其数学表达式的形式对于连续时间系统为一阶微分方程组，对于离散时间系统为一阶差分方程组；另一个是表征系统内部状态变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及输入变量 $u_1,u_2,\cdots,u_r$ 与输出变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 转换关系的数学表达式，称为输出方程，其数学表达式的形式为代数方程。重新考察图 1-4 所示的网络，利用电路知识容易得到如下一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C1}}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-1}{R_1C_1}u_{\mathrm{C1}}+\dfrac{1}{R_1C_1}u\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C2}}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-1}{R_2C_2}u_{\mathrm{C2}}+\dfrac{1}{R_2C_2}u_{\mathrm{C1}}\\[2ex]\vdots\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}n}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-1}{R_nC_n}u_{\mathrm{C}n}+\dfrac{1}{R_nC_n}u_{\mathrm{C}(n-1)}\end{cases}\tag{1-4}$$

及

$$y=\frac{R_{\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+R_0}u_{\mathrm{C}n}\tag{1-5}$$

在已知输入 u 的情况下，解方程式(1-4)、式(1-5)，不仅可求出输出响应 y，而且能获悉系统内部电容上电压随时间变化的动态过程信息。因此，式(1-4)、式(1-5)是图 1-4 的一种完全描述。

在本书第 3 章将会看到，外部描述仅描述系统的外部特性，不能反映系统内部的某些特性，具有两个完全不同内部结构的系统也可能具有相同的外部特性，因而外部描述通常只是对系统的一种不完全的描述。内部描述由于揭示了系统内部的结构特性，因而是对系统的一种完全的描述，它能完全表征系统的所有动力学特征。

3. 系统状态空间描述的基本概念

(1) 动态系统的状态

动态系统的状态是完全地描述动态系统运动状况的信息，系统在某一时刻的运动状况可以用该时刻系统运动的一组信息表征，定义系统运动信息的集合为状态。

(2) 状态变量

定义完全表征动态系统时间域运动行为的信息组中的元素为状态变量。状态变量组常用符号 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 表示，且它们相互独立(即变量的数目最小)。

上述状态变量定义中，完全表征的含义为：只要给定初始时刻 t_0 的任意初始状态变量组 $x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)$ 和 $t>t_0$ 时的输入变量组 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t)$，则系统任一个内部变量在 $t>t_0$ 各时刻的运动行为随之完全确定。而状态变量组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为数目最小的含义为：从物理角度上说，减少其中任一个变量就会减少确定系统运动行为的信息量从而不能完全表征系统运动行为，而增加一个变量对完全表征系统运动行为又是多余的；从数学角度看，这组状态变量是系统所有内部变量中线性无关的一个极大变量组，即 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 以外的系统内部变量均与其线性相关。

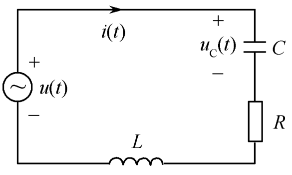

图 1-5　RLC 电路

【例 1-1】　确定图 1-5 所示 RLC 电路的状态变量。

解　由电路定律，以 $u(t)$ 为输入，$u_C(t)$ 为输出的输入、输出描述为

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=u(t)$$

式中，$u_C=\frac{1}{C}\int i(t)dt$。

若用状态变量描述，按状态变量的定义，要唯一地确定 t 时刻电路的运动行为，除了要知道输入电压 $u(t)$ 外，还必须给出流过电感上的初始电流 $i(t_0)$ 和电容上的初始电压 $u_C(t_0)$，即 $u_C(t)$ 和 $i(t)$ 这两个变量可用来完全地描述该电路的运动行为，且它们之间是独立的，故 $u_C(t)$ 和 $i(t)$ 是该电路的状态变量。显然，如果仅用 $i(t)$ 一个变量去描述，则不能得知 $u_C(t)$ 的运动行为；若仅用 $u_C(t)$ 去描述，则不能得知 $i(t)$ 的运动行为，故减少状态变量组 $u_C(t), i(t)$ 中任意一个变量，就会破坏对系统运动行为表征的完整性。若用 $i(t), u_C(t)$ 和电容上的电荷 $q(t)$ 这 3 个变量去描述，则因为 $Cu_C(t)=q(t)$，$u_C(t)$ 与 $q(t)$ 线性相关，得知 $u_C(t)$ 的运动行为就知道 $q(t)$ 的运动行为，故增加 $q(t)$ 这个变量对完全表征系统运动行为则是多余的。

（3）状态向量

设 $x_1(t)$、$x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是系统的一组状态变量，将这些状态变量视为向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的分量，则 $\boldsymbol{x}(t)$ 就称为状态向量，记为

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{bmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$$

（4）状态空间

以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为坐标轴构成的一个 n 维欧氏空间，称为状态空间。状态空间的概念由向量空间的概念引出。在向量空间中，维数就是构成向量空间基底的变量个数，在状态空间中，维数的概念与此相同，只不过状态空间基底的变量是系统的状态变量。

（5）状态轨迹

状态向量的端点在状态空间中的位置代表了某一特定时刻系统的状态。如果给定 t_0 时刻系统的初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，则状态向量的初始位置就确定了。系统的状态是时间 t 的函数。在不同时刻，系统状态不同，则随着 t 的变化，状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的端点不断移动，其移动的路径就称为系统的状态轨迹。某二阶系统的状态轨迹如图 1-6 所示。

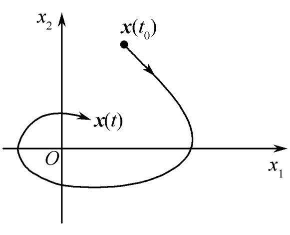

图 1-6　状态轨迹

（6）状态方程

描述系统状态变量间或状态变量与系统输入变量间关系的一个一阶微分方程组（连续系统）或一阶差分方程组（离散系统），称为状态方程。

【例 1-2】 建立图 1-5 所示 RLC 电路的状态方程。

解 由例 1-1 知，用电容上的电压 $u_C(t)$ 和电感中的电流 $i(t)$ 可完全描述系统的运动行为。故取 $u_C(t)$ 和 $i(t)$ 作为状态变量，根据电路原理有

$$\begin{cases} C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=i(t) \\ L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)+u_C(t)=u(t) \end{cases} \tag{1-6}$$

将式(1-6)中状态变量的一阶导数放在方程左边，其余项移至方程右边，整理得一阶微分方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{C}i(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{L}u_C(t)-\dfrac{R}{L}i(t)+\dfrac{1}{L}u(t) \end{cases} \tag{1-7}$$

式(1-7)即为图 1-5 所示 RLC 电路的状态方程，并将其写成向量-矩阵形式，即

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}u(t) \tag{1-8}$$

令 $x_1=u_C(t)$，$x_2=i(t)$，记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$\dot{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$，式(1-8)可简写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u \tag{1-9}$$

式中，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}$。

(7) **输出方程**

在指定系统输出的情况下，该输出与状态变量及输入变量间的函数关系式称为系统的输出方程。

例 1-2 中，若指定 $u_C(t)$ 为输出，且输出一般用 $y(t)$ 表示，则输出方程为

$$y(t)=u_C(t)=x_1 \tag{1-10}$$

将式(1-10)写成向量-矩阵形式，得

$$y(t)=[1 \quad 0]\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

或

$$y=[1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1-11}$$

式(1-11)可简写成

$$y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{1-12}$$

式中，$\boldsymbol{C}=[1 \quad 0]$。

(8) **状态空间表达式**

状态方程和输出方程合起来构成对一个动态系统完整的描述，称为动态系统的状态空间表达式。图 1-5 所示电路，若 $u_C(t)$ 为输出，取 $x_1=u_C(t)$，$x_2=i(t)$ 作为状态变量，则其状态空间表达式为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases} \tag{1-13}$$

为正确理解状态空间的基本概念,应注意如下几点。

① 系统输出和系统状态在概念上的不同性。输出是系统对环境的作用,而状态是完全地描述系统运动行为的一组信息。在线性系统中,输出是状态变量组中的某一个或某几个变量的线性组合。另外,输出总是可以测量的,而状态变量信息并不一定都能测量到。

② 状态变量的非唯一性。对一个动态系统,状态变量组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 的选取一般具有非唯一性。导致非唯一性的原因在于:系统内部变量的个数必大于状态的维数 n,而任意 n 个线性无关的内部变量都可能取为系统的状态变量。对此以图 1-5 所示 RLC 电路为例加以说明。

由式(1-13),取 $x_1=u_C(t)$,$x_2=i(t)$作为状态变量的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u \tag{1-14}$$

事实上,电容的端电压取决于电容储存的电荷 $q(t)$,有 $q(t)=Cu_C(t)$,所以亦可取 $q(t)$、$i(t)$ 作为状态变量,导出一阶微分方程组为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=i(t)\\ &\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{LC}q(t)-\frac{R}{L}i(t)+\frac{1}{L}u(t)\end{aligned} \tag{1-15}$$

令 $\bar{x}_1=q(t)$,$\bar{x}_2=i(t)$,则有向量-矩阵形式的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u \tag{1-16}$$

若选状态变量 $\hat{x}_1=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t+Ri$,$\hat{x}_2=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$,则有

$$\hat{x}_1=\hat{x}_2+Ri$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\hat{x}_1+u$$

故

$$\dot{\hat{x}}_2=\frac{1}{C}i=\frac{1}{RC}(\hat{x}_1-\hat{x}_2)$$

$$\dot{\hat{x}}_1=\dot{\hat{x}}_2+R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{RC}(\hat{x}_1-\hat{x}_2)+\frac{R}{L}(-\hat{x}_1+u)$$

将以上一阶微分方程组表示的状态方程写成向量-矩阵形式,得

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{RC}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{RC}\\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{R}{L}\\ 0\end{bmatrix}u \tag{1-17}$$

由此可见，在同一个系统中，究竟选取哪些变量作为状态变量并非唯一，要依所研究的问题而定。选择状态变量的这种自由性正是状态空间法的优点之一。

③ 任意两组状态变量之间的关系。对于一个动态系统，任意选取两组状态变量 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$ 和 $\bar{x}_1(t)$，$\bar{x}_2(t)$，…，$\bar{x}_n(t)$，由于状态变量的线性无关性，由线性代数可知，$x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$ 可表示为 $\bar{x}_1(t)$，$\bar{x}_2(t)$，…，$\bar{x}_n(t)$ 的线性组合，即

$$\begin{aligned} x_1 &= T_{11}\bar{x}_1 + T_{12}\bar{x}_2 + \cdots + T_{1n}\bar{x}_n \\ &\vdots \\ x_n &= T_{n1}\bar{x}_1 + T_{n2}\bar{x}_2 + \cdots + T_{nn}\bar{x}_n \end{aligned} \tag{1-18}$$

将式(1-18)写成向量-矩阵方程形式为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}} \tag{1-19}$$

式中，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$；$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$；$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{T}$ 称为变换矩阵。

同理，可将 $\bar{x}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的线性组合，得对应的向量-矩阵方程为

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} \tag{1-20}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{T}}$ 亦称为变换矩阵。

由式(1-19) 及式(1-20)得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}$$

即

$$\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{T}} = \bar{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}$$

表明变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和 $\bar{\boldsymbol{T}}$ 互为逆，即同一系统所任意选取的两个状态向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 之间为线性非奇异变换关系。

④ 线性非奇异变换下，系统任意两个状态空间表达式的关系。系统的状态空间表达式不具有唯一性，选取不同的状态变量，则有不同的状态空间表达式，但其均描绘同一系统。对于一个动态系统，一组状态变量下的状态空间表达式可用另一组状态变量下的状态空间表达式经线性非奇异变换得到。

仍以图 1-5 所示 RLC 电路为例，如前所述，若选 $x_1=u_C(t)$，$x_2=i(t)$ 为状态变量，$y=u_C(t)$ 为输出变量，其状态空间表达式如式(1-13)所示。若选 $\bar{x}_1=q(t)$，$\bar{x}_2=i(t)$ 为状态变量，$y=u_C(t)$ 作为输出变量，由 $y=u_C(t)=q(t)/C$ 且据式(1-16)有状态空间表达式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1-21}$$

事实上，状态向量 $\boldsymbol{x}=[x_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}=[\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]^{\mathrm{T}}$ 之间存在线性非奇异变换关系，即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \tag{1-22}$$

式中，$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为非奇异变换阵，则 $\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为 $\boldsymbol{T}$ 的逆矩阵。

将非奇异变换关系式(1-22)**代入式**(1-13)，**即可推出状态向量** $\bar{x}$ **下的状态空间表达式**(1-21)，**即**

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{C}\\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

(9) **工程问题中状态变量的选取**

① **动态系统需用微分方程描述是因为动态系统含有储能元件，因而，动态系统是一个能存储输入信息的系统。**t_0 **时刻以前的输入信息产生** t_0 **时刻储能元件上的初始能量，根据储能元件的能量方程，相应的物理变量的初值亦确定。根据状态变量的含义，如果知道** $t=t_0$ **时刻状态变量的值，只要给出** $t>t_0$ **以后的输入，对于确定系统未来的运动状态就是充分的。对同一系统的任何一种不同的状态空间表达式而言，其状态变量的数目是唯一的，必等于系统的阶数，即系统中独立储能元件的个数。因此，在具体工程问题中，可选取独立储能元件的能量方程中的物理变量作为系统的状态变量。**

② **状态变量不一定是物理可测量的，有时仅有数学意义而无任何物理意义。在具体工程问题中，为了实现状态的反馈控制，以选择容易测量的量作为状态变量为宜。例如，选择机械系统中的线**(**角**)**位移和线**(**角**)**速度作为状态变量，电路中电容上的电压和流经电感的电流作为状态变量。**

③ **用** n **阶微分方程描述的系统，当** n **个初始条件** $x(t_0),\dot{x}(t_0),\cdots,x^{(n-1)}(t_0)$**及** $t\geqslant t_0$ **的输入** $u(t)$**给定时，可唯一确定微分方程的解，即系统将来的状态。故** $x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)$**这** n **个独立的变量可选做状态变量。**

1.2.2 动态系统状态空间表达式的一般形式

1. 单输入单输出线性定常连续系统

设 SISO **线性定常** n **阶连续系统，**n **个状态变量为** $x_1,x_2,\cdots,x_n$，**其状态方程的一般形式为**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+b_1u\\ \dot{x}_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+b_2u\\ &\vdots\\ \dot{x}_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+b_nu\end{aligned}\tag{1-23}$$

输出方程的一般形式为

$$y=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+Du\tag{1-24}$$

则其向量-矩阵方程形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+Du\end{cases}\tag{1-25}$$

式(1-25)简记为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u\\ y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+Du\end{cases} \tag{1-26}$$

式中，$\boldsymbol{x}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$ 为 n 维状态向量，上标 T 为转置符号；$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ 是 $n\times n$ 维方阵，反映了系统内部状态变量间的联系，称为系统矩阵或状态矩阵；$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$ 是 $n\times 1$ 维矩阵，反映了输入对状态变量的作用，称为输入矩阵或控制矩阵；$\boldsymbol{C}=[c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$ 是 $1\times n$ 维矩阵，反映了输出与状态的组合关系，称为输出矩阵或观测矩阵；D 是标量，反映输出与输入的直接关联。

2. 多输入多输出线性定常连续系统

对于有 r 个输入 u_1、u_2，…，u_r，m 个输出 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的 MIMOn 阶线性定常连续系统，状态方程的一般形式为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+b_{11}u_1+b_{12}u_2+\cdots+b_{1r}u_r\\ \dot{x}_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+b_{21}u_1+b_{22}u_2+\cdots+b_{2r}u_r\\ &\vdots\\ \dot{x}_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+b_{n1}u_1+b_{n2}u_2+\cdots+b_{nr}u_r\end{aligned} \tag{1-27}$$

输出方程的一般形式为

$$\begin{aligned}y_1&=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n+d_{11}u_1+d_{12}u_2+\cdots+d_{1r}u_r\\ y_2&=c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n+d_{21}u_1+d_{22}u_2+\cdots+d_{2r}u_r\\ &\vdots\\ y_m&=c_{m1}x_1+c_{m2}x_2+\cdots+c_{mn}x_n+d_{m1}u_1+d_{m2}u_2+\cdots+d_{mr}u_r\end{aligned} \tag{1-28}$$

则其向量-矩阵方程形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_r\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_r\end{bmatrix}\end{cases} \tag{1-29}$$

式(1-29)简记为 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{cases} \tag{1-30}$$

式中，$\boldsymbol{x}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$ 是 n 维状态向量；$\boldsymbol{y}=[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]^{\mathrm{T}}$ 是 m 维输出向量；$\boldsymbol{u}=[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_r]^{\mathrm{T}}$ 是 r 维输入向量；$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 是 $n \times n$ 维系统矩阵（或状态矩阵）；$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$ 是 $n \times r$ 维输入矩阵（或控制矩阵）；$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$ 是 $m \times n$ 维输出矩阵；$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$ 是 $m \times r$ 维输入/输出关联矩阵（或直接传递矩阵）。应该指出，在工程上，系统输入对系统输出直接作用的情况并不多见，即大多数情况下 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$。

由此可见，采用向量-矩阵方程形式使复杂的 MIMO 系统的数学表达式得以简化，当系统状态变量的数目、输入变量的数目或输出变量的数目增加时，并不增加方程的复杂性。

3. 多输入多输出线性时变连续系统

式(1-30)为 MIMO 线性定常连续系统的状态空间表达式，其特征是系数矩阵的各元素均为常数。若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 矩阵中的某些元素或全部元素是时间 t 的函数，对应的系统称为线性时变连续系统，其向量-矩阵方程形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{1-31}$$

式中，$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$；$\boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$；

$\boldsymbol{C}(t)=\begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}$；$\boldsymbol{D}(t)=\begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$。

4. 非线性系统

一般来说，实际物理系统都是非线性的。用状态空间表达式描述非线性系统的动态特性，其状态方程是一组一阶非线性微分方程，输出方程是一组非线性代数方程，即

$$\begin{cases} \dot{x}_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_r,t) \\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_r,t) \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_r,t) \end{cases} \tag{1-32}$$

$$\begin{cases} y_1=g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_r,t) \\ y_2=g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_r,t) \\ \quad\vdots \\ y_m=g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_r,t) \end{cases} \tag{1-33}$$

用向量-矩阵表示，则为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\end{cases} \tag{1-34}$$

式中，$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$ 均为向量函数；$f_i(i=1,2,\cdots,n)$，$g_j(j=1,2,\cdots,m)$分别为 $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{g}$ 的元素，$f_i(i=1,2,\cdots,n)$，$g_j(j=1,2,\cdots,m)$均是 $x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_r$ 的某类非线性函数。

由于式(1-32)、式(1-33)或式(1-34)中显含时间 t，其所描述的系统为非线性时变系统。若式(1-32)、式(1-33)或式(1-34)中不显含时间 t，则为非线性定常系统，其状态空间表达式的一般形式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\end{cases} \tag{1-35}$$

1.2.3　状态空间模型的图示

在经典控制理论中，基于传递函数描述的 SISO 线性定常系统可用方块图表示。与此类似，基于状态空间表达式(1-30)所描述的 MIMO 线性定常系统可用图 1-7 所示的方块图形象地表示系统输入与输出的因果关系，状态与输入、输出的组合关系。每一方块的输入、输出关系规定为

输出向量＝(方块所示矩阵)×(输入向量)

图 1-7 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 用 $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$，$\boldsymbol{D}(t)$替代，即为式(1-31)所描述的线性时变系统的方块图。

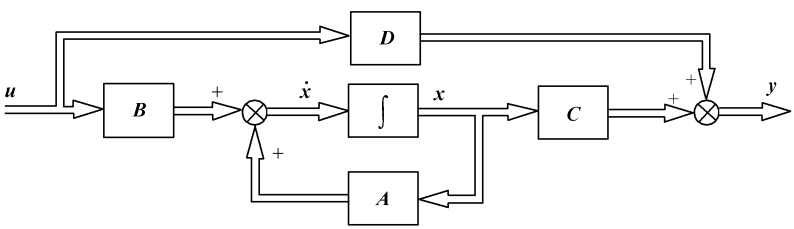

图 1-7　线性定常系统方块图

在状态空间分析法中，常采用状态变量图反映系统各状态变量间的信息传递关系，其源自模拟计算机仿真中的模拟结构图，故又称状态模拟图。绘制状态变量图常用到 3 类元件：积分器、加法器、比例器。绘制步骤是：积分器的数目应等于状态变量数，将积分器画在适当位置(积分器用内含积分符号的方框表示)，各积分器的输出表示相应的某个状态变量；然后根据状态方程和输出方程所表达的运算关系，画出对应的加法器和比例器(加法器用符号⊗表示，比例器用内含比例系数的方框表示)；最后用带箭头的传输线将各元件连接起来。

【例 1-3】　3 阶系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-3x_1-2x_2-x_3+u\\ y=2x_2+x_1\end{cases}$$

试画出其状态模拟图(状态变量图)。

解　该系统有 3 个状态变量，对应 3 个积分器的输出，而每个积分器的输入量就是对应状态变量的导数。该系统的状态变量图如图 1-8 所示。

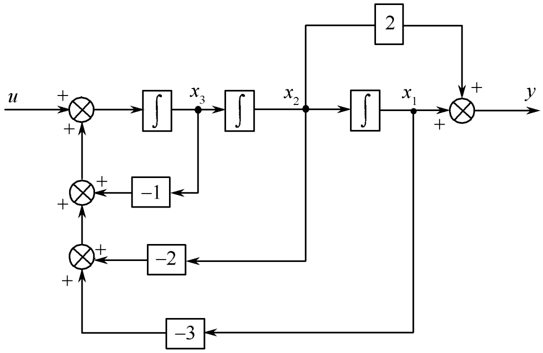

图 1-8 例 1-3 系统的状态变量图

1.2.4 由系统机理建立状态空间模型示例

动态系统均含有储能元件，能量的变化伴随有系统的运动变化。因此，可根据支配系统运动的物理定律，建立动态系统的状态方程，在指定系统的输出后即可列写系统的输出方程。

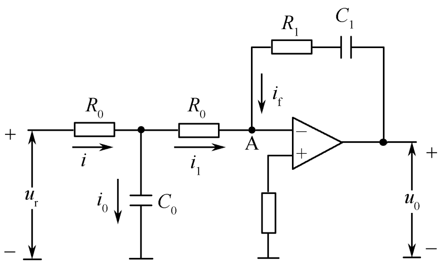

图 1-9 调节器电路图

【例 1-4】 图 1-9 所示为带有输入滤波器的有源比例、积分（PI）调节器电路图，u_r 为调节器的输入，u_0 为调节器的输出，建立其状态空间表达式。

解 （1）选择状态变量

该调节器含有两个独立的储能元件 C_0，C_1，可选电容 C_0，C_1 上的电压 u_{C0}，u_{C1} 作为状态变量，电压和电流为关联参考方向。

（2）利用电路基本理论，建立原始方程

考虑到有源放大器的开环增益很大，A 点为虚地点。对于 A 点左边回路，有

$$i=i_0+i_1 \tag{1-36}$$

$$i_0=C_0\frac{\mathrm{d}u_{C0}}{\mathrm{d}t} \tag{1-37}$$

$$i_1=\frac{u_{C0}}{R_0} \tag{1-38}$$

$$u_{C0}+iR_0=u_r \tag{1-39}$$

将式（1-36）、式（1-37）、式（1-38）代入式（1-39）并整理，得

$$R_0C_0\frac{\mathrm{d}u_{C0}}{\mathrm{d}t}+2u_{C0}=u_r \tag{1-40}$$

对于 A 点右边回路，有

$$i_f=C_1\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=-i_1=-\frac{u_{C0}}{R_0} \tag{1-41}$$

（3）导出状态方程和输出方程

将式（1-40）和式（1-41）中状态变量的一阶导数写在方程的左边，其余项写在方程的右边，得以一阶微分方程组表示的状态方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_{C0}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-2}{R_0C_0}u_{C0}+\dfrac{1}{R_0C_0}u_r\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-1}{R_0C_1}u_{C0}\end{cases}\tag{1-42}$$

由图 1-9 知，输出变量方程为

$$u_0=i_fR_1+u_{C1}=-i_1R_1+u_{C1}=-\frac{R_1}{R_0}u_{C0}+u_{C1}\tag{1-43}$$

(4) 列写状态空间表达式

将式(1-42)、式(1-43)写成向量-矩阵形式并联立，则得向量-矩阵形式的状态空间表达式，即

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_{C0}}{\mathrm{d}t}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{R_0C_0}&0\\[2mm]-\dfrac{1}{R_0C_1}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C0}\\u_{C1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_0C_0}\\0\end{bmatrix}u_r\\[2mm]u_0=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_1}{R_0}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C0}\\u_{C1}\end{bmatrix}\end{cases}\tag{1-44}$$

令 $x_1=u_{C0}$，$x_2=u_{C1}$，$u=u_r$，$y=u_0$，由式(1-44)可得状态空间表达式的一般式，即

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{R_0C_0}&0\\[2mm]-\dfrac{1}{R_0C_1}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_0C_0}\\0\end{bmatrix}u\\[2mm]y=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_1}{R_0}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\end{cases}\tag{1-45}$$

若引入 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{R_0C_0}&0\\[2mm]-\dfrac{1}{R_0C_1}&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_0C_0}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_1}{R_0}&1\end{bmatrix}$，则得状态空间表达式的简洁形式，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{1-46}$$

【例 1-5】 考察图 1-10 所示电路，取电压源 e 为输入变量，R_1 上的电压为输出变量，建立该电网络的状态空间表达式，电压和电流为关联参考方向。

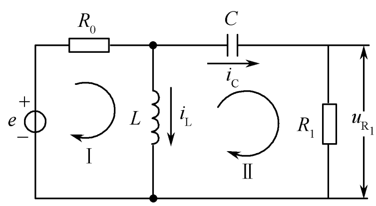

图 1-10 例 1-5 图

解 (1) 选取状态变量

网络中只含有电容 C、电感 L 两个独立储能元件，选电容端电压 u_C、流经电感 L 的电流 i_L 作为状态变量。

(2) 利用电路基本定理列原始方程

回路Ⅰ：
$$R_0(i_C+i_L)+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=e\tag{1-47}$$

回路Ⅱ：
$$u_C+R_1C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\tag{1-48}$$

将 $i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ 代入式(1-47)，得

$$R_0\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+i_L\right)+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=e \tag{1-49}$$

(3) **导出状态变量的一阶微分方程组**

将式(1-49)**和式**(1-48)**中状态变量** i_L、u_C **的一阶导数移至方程的左边，而将其余项移到方程右边，得状态变量的一阶微分方程组为**

$$\begin{aligned} R_0C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}&=-R_0i_L+e \\ R_1C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}-L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}&=-u_C \end{aligned} \tag{1-50}$$

(4) **导出状态方程和输出方程**

将状态变量的一阶导数看成待定量，用解代数方程方法求解式(1-50)**，即可求出状态方程。将式**(1-50)**可写成向量-矩阵形式的方程，即**

$$\begin{bmatrix} L & R_0C \\ -L & R_1C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}e \tag{1-51}$$

解之，得向量-矩阵形式的状态方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}&=\begin{bmatrix} L & R_0C \\ -L & R_1C \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} L & R_0C \\ -L & R_1C \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}e \\ &=\begin{bmatrix} \frac{-R_0R_1}{(R_0+R_1)L} & \frac{R_0}{(R_0+R_1)L} \\ \frac{-R_0}{(R_0+R_1)C} & \frac{-1}{(R_0+R_1)C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{R_1}{(R_0+R_1)L} \\ \frac{1}{(R_0+R_1)C} \end{bmatrix}e \end{aligned} \tag{1-52}$$

输出方程为

$$\begin{aligned} u_{R_1}&=R_1C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=R_1\left[\frac{-R_0}{(R_0+R_1)}i_L-\frac{1}{(R_0+R_1)}u_C+\frac{1}{(R_0+R_1)}e\right] \\ &=\begin{bmatrix} -\frac{R_0R_1}{R_0+R_1} & -\frac{R_1}{R_0+R_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}+\frac{R_1}{R_0+R_1}e \end{aligned} \tag{1-53}$$

(5) **列写状态空间表达式**

将式(1-52)**和式**(1-53)**合起来即为状态空间表达式，若令** $x_1=i_L$，$x_2=u_C$，$u=e$，$y=u_{R_1}$，**则可得状态空间表达式的一般式，即**

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{R_0R_1}{(R_0+R_1)L} & \frac{R_0}{(R_0+R_1)L} \\ -\frac{R_0}{(R_0+R_1)C} & \frac{-1}{(R_0+R_1)C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{R_1}{(R_0+R_1)L} \\ \frac{1}{(R_0+R_1)C} \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} -\frac{R_0R_1}{R_0+R_1} & -\frac{R_1}{R_0+R_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\frac{R_1}{R_0+R_1}u \end{cases} \tag{1-54}$$

【例 1-6】 图 1-11 **所示的机械平移系统模型，滑块** M_1、M_2 **的质量分别是** M_1、M_2；**弹簧** K_1、K_2 **的弹性系数分别为** K_1、K_2；**阻尼器** B **阻尼系数为** B。**试建立以外力** f **为输入，滑块** M_1、M_2 **的位移** $\overline{y}_1$、$\overline{y}_2$ **为输出的状态空间表达式**(**忽略静摩擦与滑动摩擦**)。

解　(1)选择状态变量

图 1-11 中的滑块 M_1、M_2 和弹簧 K_1、K_2 为相互独立的储能元件,故滑块 M_1、M_2 的速度 v_1、v_2 及位移 $\overline{y}_1$、$\overline{y}_2$ 可选作该系统的状态变量。

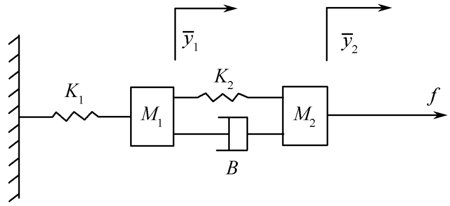

图 1-11　机械平移系统

(2)列出机械运动的原始方程

由位移与速度的关系,有

$$\frac{\mathrm{d}\overline{y}_1}{\mathrm{d}t}=v_1 \tag{1-55}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{y}_2}{\mathrm{d}t}=v_2 \tag{1-56}$$

根据牛顿运动定律,对于 M_1 有

$$M_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=K_2(\overline{y}_2-\overline{y}_1)+B\left(\frac{\mathrm{d}\overline{y}_2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\overline{y}_1}{\mathrm{d}t}\right)-K_1\overline{y}_1 \tag{1-57}$$

同理,对于 M_2 有

$$M_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=f-K_2(\overline{y}_2-\overline{y}_1)-B\left(\frac{\mathrm{d}\overline{y}_2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\overline{y}_1}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1-58}$$

(3)导出状态方程和输出方程

整理式(1-55)~式(1-58),得以一阶微分方程组表示的状态方程为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\overline{y}_1}{\mathrm{d}t}=v_1\\
&\frac{\mathrm{d}\overline{y}_2}{\mathrm{d}t}=v_2\\
&\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{M_1}(K_1+K_2)\overline{y}_1+\frac{K_2}{M_1}\overline{y}_2-\frac{B}{M_1}v_1+\frac{B}{M_1}v_2\\
&\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=\frac{K_2}{M_2}\overline{y}_1-\frac{K_2}{M_2}\overline{y}_2+\frac{B}{M_2}v_1-\frac{B}{M_2}v_2+\frac{1}{M_2}f
\end{aligned} \tag{1-59}$$

输出方程为

$$\begin{aligned}
y_1&=\overline{y}_1\\
y_2&=\overline{y}_2
\end{aligned} \tag{1-60}$$

(4)列写状态空间表达式

令 $x_1=\overline{y}_1$,$x_2=\overline{y}_2$,$x_3=v_1$,$x_4=v_2$,$f=u$,则有状态空间表达式为

$$\left\{\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{K_1+K_2}{M_1} & \dfrac{K_2}{M_1} & -\dfrac{B}{M_1} & \dfrac{B}{M_1}\\ \dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{K_2}{M_2} & \dfrac{B}{M_2} & -\dfrac{B}{M_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \dfrac{1}{M_2}\end{bmatrix}u\\
&\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}
\end{aligned}\right. \tag{1-61}$$

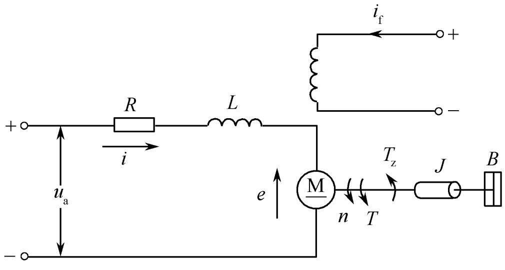

图 1-12　他励直流电动机拖动

【例 1-7】　图 1-12 所示为电枢控制的他励直流电动机拖动示意图，励磁电流 i_f 恒定，通过调节电枢供电电压 u_a 实现调速。其中，R，L 分别为电枢回路的电阻和电感；e 为电枢反电势；J 为电动机轴上的等效总转动惯量；T 为电动机电磁转矩；T_z 为折合到电动机轴上的总负载转矩；B 为电动机轴上的黏性摩擦系数。试建立以电枢电压 u_a、总负载转矩 T_z 为输入，电动机轴的转速 n 为输出的状态空间表达式（不考虑电枢反应）。

解　(1) 选择状态变量

因为电感 L 和转动惯量 J 为独立的储能元件，故可选相应的电枢回路电流 i 和电动机轴转速 n 这两个相互独立的变量为状态变量。

(2) 列写原始的运动方程

由基尔霍夫电压定律，列写电枢回路电压方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+e=u_a \tag{1-62}$$

设电动机轴的角速度为 ω(rad/s)，由牛顿力学定律，列写电动机转动方程为

$$T=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+B\omega+T_z=J_G\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+B_Gn+T_z \tag{1-63}$$

式中，$J_G=\frac{2\pi}{60}J$，$B_G=\frac{2\pi}{60}B$。

根据电机学的知识，电动机的电磁转矩及感应电动势分别为

$$T=C_T\Phi i=K_Ti \tag{1-64}$$

$$e=C_e\Phi n=K_en \tag{1-65}$$

式中，$K_T=C_T\Phi$，$K_e=C_e\Phi$，Φ 为直流电动机每极合成磁通，C_T，C_e 分别是由电动机结构决定的转矩常数、电动势常数。

(3) 导出状态方程和输出方程

整理式(1-62)～式(1-65)，得以一阶微分方程组表示的状态方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}&=-\frac{R}{L}i-\frac{K_e}{L}n+\frac{1}{L}u_a\\ \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}&=\frac{K_T}{J_G}i-\frac{B_G}{J_G}n-\frac{1}{J_G}T_z\end{aligned} \tag{1-66}$$

输出方程为

$$y=n \tag{1-67}$$

(4) 列写状态空间表达式

令 $x_1=i$，$x_2=n$，由式(1-66)和式(1-67)可得向量-矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{K_e}{L}\\ \frac{K_T}{J_G} & -\frac{B_G}{J_G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L} & 0\\ 0 & -\frac{1}{J_G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_a\\ T_z\end{bmatrix}\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases} \tag{1-68}$$

【例 1-8】　图 1-13 所示为二级液位系统示意图，输入流量为 Q，输出流量为 Q_2，h_1、C_1 和

h_2、C_2 分别为液箱 1 和液箱 2 的液位、液容，两个液箱之间阀的液阻为 R_1，输出端阀的液阻为 R_2。设液体流动为层流（则系统可看作线性的），试建立其状态空间表达式。

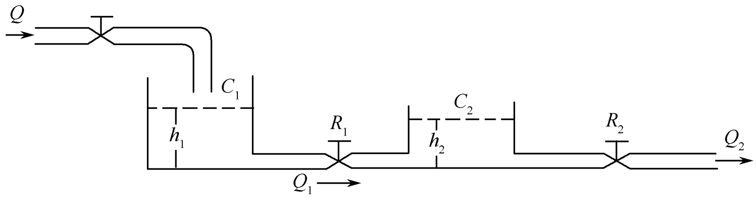

图 1-13　二级液位系统

解　(1) 选择状态变量

根据流体流动的能量方程，可选相应的物理量 h_1、h_2 作为状态变量。

(2) 列写原始的运动方程

$$\mathrm{d}h_1=\frac{(Q-Q_1)\mathrm{d}t}{C_1} \tag{1-69}$$

$$\mathrm{d}h_2=\frac{(Q_1-Q_2)\mathrm{d}t}{C_2} \tag{1-70}$$

出口流量与液位差成比例，即

$$\frac{h_1-h_2}{R_1}=Q_1 \tag{1-71}$$

$$\frac{h_2}{R_2}=Q_2 \tag{1-72}$$

(3) 导出状态方程和输出方程

整理式(1-69)～式(1-72)，得状态变量一阶微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{R_1C_1}h_1+\dfrac{1}{R_1C_1}h_2+\dfrac{1}{C_1}Q\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{R_1C_2}h_1-\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}h_2\end{cases} \tag{1-73}$$

输出方程为

$$Q_2=\frac{1}{R_2}h_2 \tag{1-74}$$

(4) 列写状态空间表达式的一般式

令 $x_1=h_1$，$x_2=h_2$，$Q=u$，$y=Q_2$，且将式(1-73)和式(1-74)合起来，写成向量-矩阵形式，则得系统状态空间表达式的一般式为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_1C_1} & \dfrac{1}{R_1C_1}\\[2ex] \dfrac{1}{R_1C_2} & -\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_1}\\ 0\end{bmatrix}u\\[4ex] y=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases} \tag{1-75}$$

1.3　动态系统数学模型变换

1.3.1　状态向量的线性变换与状态空间表达式标准型

1. 状态向量的线性变换

1.2 节已阐述过，给定线性定常系统的状态空间表达式不具有唯一性，选取不同的状态变

量，便会有不同的状态空间表达式。所任意选取的两个状态向量 x 和 $\bar{x}$ 之间存在线性非奇异变换（或称坐标变换）关系，即

$$x=T\bar{x} \quad \text{或} \quad \bar{x}=T^{-1}x \tag{1-76}$$

式中，T 为线性非奇异变换矩阵，T^{-1} 为 T 的逆阵。而对应 x 和 $\bar{x}$ 的两种状态空间表达式的矩阵与该非奇异变换矩阵 T 有确定关系。

设给定系统在状态向量 x 下的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \tag{1-77}$$

若引入式(1-76)所示的线性非奇异变换（称为对系统进行 T 变换），将 x 变换为 $\bar{x}$，则系统在变换后的状态向量 $\bar{x}$ 下的状态空间表达式可将式(1-76)代入式(1-77)得到，即

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=T^{-1}AT\bar{x}+T^{-1}Bu=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u\\ y=CT\bar{x}+Du=\bar{C}\bar{x}+\bar{D}u\end{cases} \tag{1-78}$$

式中，$\bar{A}=T^{-1}AT$，$\bar{B}=T^{-1}B$，$\bar{C}=CT$，$\bar{D}=D$。显然，原状态空间中的系统矩阵 A 与变换后的新状态空间中的系统矩阵 $\bar{A}$ 是相似矩阵，而相似矩阵具有相同的基本性质，例如，行列式相同、秩相同、特征多项式相同和特征值相同等。事实上，式(1-77)和式(1-78)均描述了同一给定系统。其能对该系统的时域行为表达同样的信息，即对系统进行线性非奇异变换，并不会改变系统的原有性质，故也称为等价变换。其是基于状态空间模型对系统进行分析和综合的一个重要方法。实际上，为了便于揭示系统特性或简化系统的分析、综合工作，通常通过状态向量的线性非奇异变换，将系统状态空间表达式等价变换为某种规范型，如能控标准型、能观标准型、对角线标准型、约当标准型等。

2. 系统的特征值

n 阶线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

的特征值即为其系统矩阵 A 的特征值，即特征方程

$$|\lambda I-A|=0 \tag{1-79}$$

的根。其中，A 为 $n\times n$ 维实数方阵，I 为 $n\times n$ 维单位矩阵，$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 称为系统的特征多项式。因实际物理系统的系统矩阵 A 为实数阵，故其特征值或为实数，或为共轭复数对。

由线性代数知，设 λ_i 是 n 阶方阵 A 的一个特征值，若存在一个 n 维非零向量 p_i，满足

$$Ap_i=\lambda_i p_i \quad \text{或} \quad (\lambda_i I-A)p_i=0 \tag{1-80}$$

则称 p_i 为方阵 A 对应于特征值 λ_i 的特征向量。

【例 1-9】 求下列矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -6 & -11 & 6\\ -6 & -11 & 5\end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量。

解 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ 6 & \lambda+11 & -6\\ 6 & 11 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

则 A 的特征方程为 $$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0$$
解之，得 A 的特征值为 $$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$$

设对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}$，则由式(1-80)的定义有

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-6 & -10 & 6\\-6 & -11 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

解之，得 $$p_{21}=0,p_{11}=p_{31}$$

令 $p_{11}=p_{31}=1$，则对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量可取为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

同理，对应于 $\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$ 的特征向量分别可取为 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\2\\3\end{bmatrix}$。

3. 系统特征值的不变性

系统经线性非奇异变换后，其特征多项式不变，即系统特征值不变。下面给出这一结论的证明。

不失一般性，设式(1-77)所示系统引入式(1-76)所示的线性非奇异变换，则变换后系统的特征多项式为

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{A}}|&=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}|=|\lambda\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}|\\&=|\boldsymbol{T}^{-1}||\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}||\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\end{aligned}\tag{1-81}$$

上式表明，系统线性非奇异变换前、后的特征多项式完全相同，即系统特征值在线性非奇异变换下具有不变性。

4. 状态空间表达式化为对角线标准型

虽然通过线性非奇异变换，可以得到无数种系统的状态空间表达式，但能控标准型、能观标准型、对角线标准型和约当标准型等标准型状态空间表达式在简化系统的分析与设计中具有重要地位。因此，有必要讨论状态空间表达式的标准化问题。这里先讨论对角线标准型和约当标准型。

对于线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{1-82}$$

若系统的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异，则必存在非奇异变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，经 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\overline{\boldsymbol{x}}$ 或 $\overline{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$ 的线性变换，可将状态空间表达式变换为对角线标准型，即

$$\begin{cases}\dot{\overline{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\overline{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \boldsymbol{0}\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \lambda_n\end{bmatrix}\overline{\boldsymbol{x}}+\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\boldsymbol{C}}\overline{\boldsymbol{x}}\end{cases}\tag{1-83}$$

式中，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个互异特征值；由式(1-80)求出对应于特征值 λ_i 的特征向量 $\boldsymbol{p}_i(i=1,2,\cdots,n)$，则变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 构造，即

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n] \tag{1-84}$$

且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-85}$$

应该指出，对应于特征值 λ_i 的特征向量 $\boldsymbol{p}_i(i=1,2,\cdots,n)$并非唯一，因此，式(1-84)所示由 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 构造的变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 也不是唯一的。

【例 1-10】 试将下列状态方程变换为对角线标准型。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}u$$

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

可见，$\boldsymbol{A}$ 的特征值互异，且为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$。由特征向量的定义，可得出 $\boldsymbol{A}$ 分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$。

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1$，即

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{cases}p_{21}+p_{31}=0\\3p_{21}=0\\-2p_{21}+p_{31}=0\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}p_{11}=K(\text{任意常值})\\p_{21}=0\\p_{31}=0\end{cases}$$

可见，对应于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量并非唯一，可取为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$。

同理，对应于 $\lambda_2=1,\lambda_3=-1$ 的特征向量分别可取为 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，于是得到线性非奇异变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \boldsymbol{p}_3]=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

则引入 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}$线性变换后的系统矩阵、输入矩阵分别为