第一模块　函数的极限及连续

自然这部大书只能被那些通晓其中叙述语言的人所阅读．这种语言正是数学．

——伽利略（Galilei，1564—1642），意大利物理学家、数学家

【学习要求】

理解函数的起源与概念，掌握函数的表示方法与基本初等函数的图像性质；理解极限思想的起源与发展、掌握极限的概念及运算法则和求极限的方法；理解函数的连续性概念及性质，掌握函数连续性的判断．理解电学与机械学中常用函数所具有的性质及实际意义

第一节　函数的起源与发展

一、函数的起源与发展

（1）现在使用的函数一词由德国数学家莱布尼茨首先提出并使用.

Gottfried Wilhelm Leibniz（1646—1716 年），德国自然科学家、数学家、物理学家、历史学家和哲学家，一位举世罕见的科学天才，和牛顿（1643 年—1727 年）同为微积分的创建人，是第一个公开微积分方法的人，并且精心设计了非常巧妙简洁的微积分符号，沿用至今；牛顿是被确认早于莱布尼茨使用微积分的人.

（2）瑞士数学家欧拉（1748—1755 年）在数学著作中多次刻画过函数的概念，现在使用的函数符号 $y=f(x)$ 就是欧拉首先提出并使用的.

Leonhard Euler（1707 年—1783 年），他从 19 岁开始发表论文，直到 76 岁．他一生共写下了 886 本书籍和论文，其中在世时发表了 700 多篇论文．他常常抱着孩子在膝盖上完成论文．即使在他双目失明后的 17 年间，也没有停止对数学的研究，口述了好几本书和 400 余篇论文．当他写出了计算天王星轨道的计算要领后离开了人世．欧拉是数学符号的发明者，他创设的许多数学符号，例如 π，i，e，sin，cos，tg，Σ，$f(x)$等等，至今仍在沿用.

（3）法国数学家柯西在 1821 年，柯西著作中指出：……当变量之间联系起来的时候，若给定其中一个变量的值，其他变量的值就随着确定下来，这时这个变量就成为自变量，其他量就叫做这个自变量的函数．柯西不仅给出了函数的文字定义，而且给出了自变量的定义.

Cauchy，Augustin Louis（1789—1857 年）在数学领域，有很高的建树和造诣．很多数学的定理和公式也都以他的名字来命名，如柯西不等式、柯西积分公式.

（4）1837 年，德国数学家狄利克雷首先用单值对应的思想提出了新的函数定义：如果对于给定的区间上的每一个 x 值，有唯一的 y 值同它对应，那么 y 就是 x 的函数.

Dirichlet，Peter Gustav Lejeune（1805—1859 年）对数论、数学分析和数学物理有突出贡献，是解析数论的创始人之一．1837 年他提出函数是 x 与 y 之间的一种对应关系的现代观点．1839 年任柏林大学教授，1855 年接任 C.F.高斯在格丁根大学的教授职位.

1859 年，清代数学家李善兰（1811—1882 年）在翻译《代数学》时第一次将“ function ”

翻译成“ 函数 ”.

（5）用集合概念定义函数（函数的现代定义）：

康托尔，全名格奥尔格 · 康托尔（Georg Cantor，1845 年—1918 年），出生于俄国的德国数学家．创立了现代集合论作为实数理论以至整个微积分理论体系的基础.

康托尔的集合论得到公开的承认和热情的称赞，应该说是在瑞士苏黎世召开的第一届国际数学家大会上表现出来的．瑞士苏黎世理工大学教授胡尔维茨（1859—1919 年）在他的综合报告中，明确地阐述康托尔集合论对函数论的进展所起的巨大推动作用，这破天荒第一次向国际数学界显示康托尔的集合论不是可有可无的哲学，而是真正对数学发展起作用的理论工具．在分组会上，法国数学家阿达玛（1865—1963 年），也报告康托尔对他的工作的重要作用．至此，康托尔集合论思想得到广泛的研究和推广，我们今天函数的定义就是以此而产生的.

在可预见的未来，关于函数的争论、研究、发展、拓展将不会完结，也正是这些影响着数学及相邻学科的发展.

函数是高等数学中最重要的概念之一．在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，函数关系随处可见．微积分学是以函数关系为研究对象的．极限是研究函数和解决各种问题的一种基本方法.

二、函数与方程思想的应用

函数与方程思想是数学教学中的重要思想, 函数与方程的思想蕴含了深刻的哲学思想, 这种思想的渗透与内化会使学生用发展的观点看待问题，透过现象看本质，善于发现事物之间存在的联系，动中求静，以静制动，以不变应万变，奋进中求安宁．这一思想方法与机械（电）专业课程及现实问题的有效结合，很多看似复杂的问题就会变得简单．如以下应用案例.

1．平面四杆机构

最简单的平面连杆机构由四个构件组成，称为平面四杆机构．含有两个移动副的四杆机构常称为双滑块机构，两个移动副不相邻的情况如图 1-1 所示.

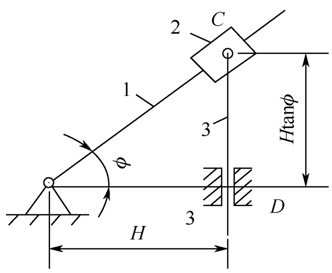


图 1-1

图 1-1 中, 从动件 3 的垂直位移与原动件 1 转角ϕ的正切值成正比, 故又称为正切机构, 位移表达式已标注在图上.

双滑块机构中的两个移动副也可以相邻，其中一个移动副与机架相关联的情况如图 1-2 所示.

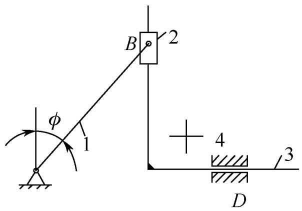


图 1-2

请运用初等函数中的三角函数知识，分析从动件 3 的水平位移与原动件 1 转角φ的关系，并写出函数表达式[答案见本模块第三节].

2. 人造卫星测控站的优化分布模型[答案见本模块第三节]

问题提出　地面监控站的主要任务是测量和控制人造卫星的姿态和轨道运动，测量人造卫星的各种工程参数和环境参数，对人造卫星实施各种功能状态控制，与广播卫星的遥测遥控跟踪系统结合，测控人造卫星的轨道位置和姿态，对人造卫星实施各种功能和状态的切换.

这种测控是航天系统中的一个非常重要的环节，理想的状态是对人造卫星进行全程跟踪监控，地面测控站只能观测到所在点切平面以上的空域，且在与地平面夹角 3°的范围内测控效果不好，实际上每个测控站的测控范围只考虑与地平面夹角 3°以上的空域，在一个人造卫星的运行过程中，往往需要多个测控站联合完成测控任务.

在所有测控站都与人造卫星的运行轨道共面的情况下，至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控？

第二节　函数——变量之间依存关系的数学模型

数形诗

数形本是相倚依，焉能分作两边飞.
数缺形时少直觉，形少数时难入微.
数形结合百般好，隔离分家万事非.
几何代数统一体，永远联系莫分离.

——我国著名数学家华罗庚（1910—1985 年）

学习内容：函数的概念

目的要求：熟练掌握函数的定义、定义域、对应法则，了解分段函数、显函数、隐函数、反函数的概念，熟练掌握函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性及 5 种基本初等函数的图像和性质；掌握复合函数的复合过程. 理解电学与机械学中常用函数所具有的性质及实际意义.

重点难点：函数定义域的求法，复合函数的复合过程，电学与机械学中的常用函数.

一、函数概念

世间万物皆是不断变化的，如人的生老病死，大海的潮涨潮落，经济市场的瞬息万变等，无不体现了一个永恒的真理，不变是相对的，变是绝对的，如何描述各种现象的变化

规律？如何预测其变化趋势？函数是反映这些客观规律的重要模型，它告诉我们不同的量在某个过程中的内在联系，以及它们的变化规律，通过对这些函数模型的分析可以预测各种相关量的变化趋势，这正是我们将要介绍的两个重要概念——函数与极限.

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集．若对于每一个数 $x \in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**；数集 D 称为该函数的**定义域**，是 x 的取值范围.

自变量取定义域内某一值时，因变量的对应值叫做函数值．对于给定的函数 $y = f(x)$，当函数的定义域 D 确定后，按照对应法则 f，因变量的变化范围也随之确定．函数值的集合叫做函数的**值域**．所以**定义域和对应法则就是确定一个函数的两个要素**．两个函数只有在它们的定义域和对应法则都相同时，才是相同的.

函数的三种表示方法：解析式、列表法、图像法.

公式法（解析式）的优点：① 简明精确地概括了变量间的关系；② 可以通过公式求出任意一个自变量所对应的函数值．中学阶段所研究的主要是用公式表示的函数.

图像法的优点：直观形象地表示自变量与因变量的变化趋势，有利于通过图像来研究函数的性质.

列表法的优点：不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值，简洁明了.

【衔接专业】

电工学与企业经营中常出现以不同方法表示的函数，例如：

公式法：正弦函数 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ 常用来描述交变电流和电压，如以电流 $i(t) = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi)$ 为例，它由角频率、振幅和初相位三要素决定．因此，只要能确定这三个要素，那么正弦量就确定了．i 称为称为正弦交流电的瞬时电流值，I_{m} 称为正弦交流电的最大值（幅值），ω 为角频率、φ 为相位，其中 I_{m}、ω、φ 为常量，且 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，$f = \dfrac{1}{T}$．例如，我国工业和民用电频率 $f = 50\mathrm{Hz}$，周期 $T = 0.02\mathrm{s}$，角频率 $\omega = 2\pi f$.

表格法：某汽车销售公司 2016 年度各月份的汽车销量（单位：辆），如表 1-1 所示.

表 1-1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销量 y	750	800	602	799	905	567	432	673	653	756	974	769

表 1-1 确定了月份 x 与销量 y 这两个变量之间的统计关系，不同的月份都有唯一确定销量 y 与之对应.

图像法：理想电压源的伏安特性曲线（见图 1-3），实际电压源的伏安特性曲线（见图 1-4）.

伏安特性曲线常用横坐标表示电流 i、纵坐标表示电压 u，以此画出的 i-u 图像叫作导体的伏安特性曲线图．这种图像常被用来研究导体电阻的变化规律，是电工学常用的图像之一.

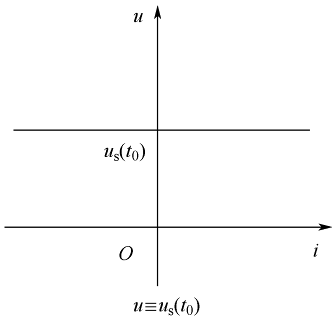


图 1-3

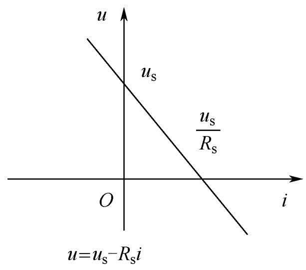


图 1-4

例题 1　求下列函数的定义域

（1）$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$；　　（2）$y=\ln(x+1)+\arccos(x-1)$.

解　（1）由分母不为零且被开方数大于等于零可知，自变量 x 应满足 $x^2-x-2>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-1$，故原函数的定义域为：$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

（2）该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases} x+1>0 \\ -1\leqslant x-1\leqslant 1 \end{cases}$$

的 x 的全体，解不等式组得 $0\leqslant x\leqslant 2$，故原函数的定义域为：$[0,2]$.

2. 分段函数

对于自变量的不同取值范围，有对应法则也不同的函数，称为**分段函数**.

注意：

① 分段函数是一个函数，而不是几个函数；

② 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例如，$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$，$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x\leqslant 5 \\ 0, & x=0 \\ -1, & -5<x<0 \end{cases}$，符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$

等，都是分段函数.

例题 2　设 $f(x)=\begin{cases} x-2, & 1\leqslant x<3 \\ x^2, & 3\leqslant x<5 \end{cases}$，　求$f(x+1)$.

解： $f(x+1)=\begin{cases} (x+1)-2, & 1\leqslant x+1<3 \\ (x+1)^2, & 3\leqslant x+1<5 \end{cases}=\begin{cases} x-1, & 0\leqslant x<2 \\ (x+1)^2, & 2\leqslant x<4 \end{cases}$.

【衔接专业】电工应用

例题 3　蔡氏电路是一种非线性电路，1983 年由学者蔡少棠发明，第一次在混沌理论和混沌电路之间架起了桥梁. 蔡氏电路的核心是一个称为“蔡氏二极管”的分段性电阻.

一种改进的基于符号函数的蔡氏电路中，蔡氏二极管的状态方程为：

$$f(x)=m_1x+(m_0-m_1)\operatorname{sgn}x$$

其中包含了符号函数 $\operatorname{sgn}x$. 符号函数的物理电路图如图 1-5 所示.

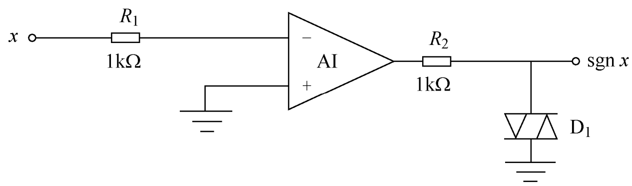


图 1-5

3. 显函数和隐函数

若函数中的因变量 y 用自变量 x 的表达式直接表示出来，这样的函数称为**显函数**.

有些函数的表达方式却不是这样．例如方程 $x+y^3-1=0$ 表示一个函数，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，y 都有唯一确定的值与之对应.

一般地，若两个变量 x,y 的函数关系用方程 $F(x,y)=0$ 的形式来表示，即 x,y 的函数关系隐藏在方程里，这样的函数叫做**隐函数**.

有的隐函数，可以从方程 $F(x,y)=0$ 中解出 y 来化为显函数，但有的隐函数化为显函数比较困难，甚至是不可能的．例如由方程 $xy-\mathrm{e}^{x+y}=0$ 确定的隐函数就不能化为显函数.

4. 反函数——逆向思维的实例

设函数 $y=f(x),x\in D$， $y\in Z$ 且变量 x 与 y 是一一对应的，若果把 y 当作自变量，x 当作因变量,则关系式 $x=\varphi(y)$, $y\in Z$,这时 x 是以 Z 为定义域的 y 的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的直接反函数；而函数 $y=\varphi(x)$称为函数 $y=f(x)$ 的间接反函数，记做 $y=f^{-1}(x)$, $x\in Z$.

通常所说的反函数是指间接反函数 $y=f^{-1}(x),x\in Z$ 今后凡不特别说明, 函数 $y=f(x)$ 的反函数都是这种改写过的 $y=f^{-1}(x),x\in Z$ 形式.

函数 $y=f(x),x\in Z$ 与 $y=f^{-1}(x),x\in Z$ 互为反函数，它们的定义域与值域互换.

在同一直角坐标系下， $y=f(x),x\in Z$ 与互为反函数 $y=f^{-1}(x),x\in Z$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例题 4 函数 $y=3x-2$ 与函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ 互为反函数，如图 1-6 所示；函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，如图 1-7 所示，它们的图形都是关于直线 $y=x$ 对称的.

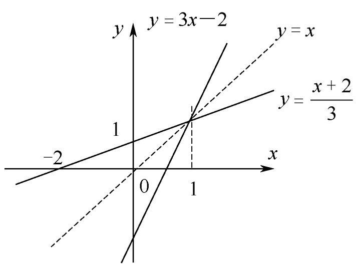


图 1-6

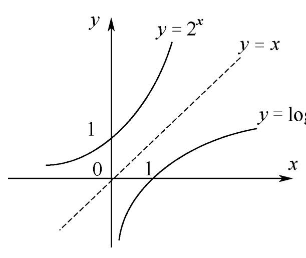


图 1-7

定理 1 （反函数存在定理） 单调函数必有反函数，且单调增加（减少）的函数的反函数也是单调增加（减少）的．求函数 $y=f(x)$ 的反函数可以按以下步骤进行：

（1）从方程 $y=f(x)$ 中解出唯一的 x，并写成 $x=f^{-1}(y)$ ；

（2）将 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x,y 对调，得到函数 $y=f^{-1}(x)$，这就是所求的函数的反函数.

【衔接专业】信息安全中的数学模型

已知一个明文通过一种对应法则 f 得到的密文是 MEQEFSC，要解开密文必须知道对应法则 f 的反对应法则 g. 设反对应法则 g 是：根据英文字母排列顺序，密文每个字母往左数第四个字母为对应的明文，试写出明文.

解　根据英文字母排列 **A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z** 及已知条件得明文为

I　AM　　A　　BOY

5. 复合函数

假设有两个函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$，与 x 对应的 u 值能使 $y=f(u)$ 有定义，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，得到函数 $y=f(\varphi(x))$. 这个新函数 $y=f(\varphi(x))$ 就是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 经过复合而成的**复合函数**，称 u 为中间变量.

例如由 $y=f(u)=\mathrm{e}^u,u=\varphi(x)=\cos x$ 可以复合成复合函数 $y=\mathrm{e}^{\cos x}$.

复合函数不仅可用两个函数复合而成，也可以由多个函数相继进行复合而成. 如由 $y=\sqrt{u},u=\ln v,v=\sin x$ 可以复合成复合函数 $y=\sqrt{\ln\sin x}$；由 $y=f(u)=\mathrm{e}^u,u=\varphi(x)=\cos x$ 可以复合成复合函数 $y=f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{\cos x}$.

注意：不是任何两个函数都能复合成复合函数. 由定义易知，只有当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空时，这两个函数才能复合成复合函数. 例如函数 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=-x^2$ 的值域为 $(-\infty,0]$，而 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，显然 $(-\infty,0]\cap(0,+\infty)=\varnothing, y=\ln(-x^2)$ 无意义.

● 复合函数分解为简单函数的步骤

第一步：确定外层函数 $y=f(u)$（y 是 u 的函数）

第二步：确定内层函数 $u=\varphi(x)$（u 是 x 的函数）

● 复合函数分解为简单函数的标准

（1）基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）

（2）基本初等函数的四则运算

（3）特别注意多项式函数. 如，一次多项式函数 $ax+b$，二次多项式函数 ax^2+bx+c 等.

【衔接专业】指出下列电工学中的函数由哪些简单函数复合而成？

（1）$s(t)=\sin(2\pi t+\frac{\pi}{3})$　　（2）$\varepsilon(r)=\arcsin(1-r^2)$　　（3）$i(t)=\mathrm{e}^{-2t}$

解（1）$s(t)=\sin(2\pi t+\frac{\pi}{3})$ 是由 $s=\sin u$，$u=2\pi t+\frac{\pi}{3}$ 复合而成的.

（2）$\varepsilon(r)=\arcsin(1-r^2)$ 是由 $\varepsilon=\arcsin u$，$u=1-r^2$ 复合而成的.

（3）$i(t)=\mathrm{e}^{-2t}$ 是由 $i=\mathrm{e}^u$，$u=1-r^2$ 复合而成的.

二、函数性质

1. 单调性

设有函数 $y=f(x),x\in(a,b)$，若对任意两点 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，总有

（1）$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是**单调增加**的，区间 (a,b) 称为单调增加区间；

（2）$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是**单调减少的**，区间 (a,b) 称为单调减少区间.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**，单调增加区间和单调减少区间统称为**单调区间**.

【衔接专业】

图 1-3 是理想电压源的伏安特性曲线，它是一条平行于 i 轴且纵坐标为 $u_s(t_0)$ 的直线，意味着随电流 i 的增加电压没有改变，即理想电压源的端电压与电流大小无关.

图 1-4 是实际电压源的伏安特性曲线，它是一条向右下方倾斜的直线，说明在实际电路中，随着电流 i 的增加，电压源的端电压 u 在逐渐降低，电压 u 是关于电流 i 的单调递减函数.

2. 有界性

设函数 $y=f(x),x\in D$，如果存在 $M>0$，使得对任意 $x\in D$，均有 $|f(x)|\leq M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是无界的.

例如 $y=\sin x$ 是有界函数，其中对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $|\sin x|\leq 1$；而 $y=x^2$ 是无界函数，因 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有下界.

【衔接专业】如图 1-8 所示，已知正弦交流电的电流强度 i，随时间 t（单位：s）变化的部分曲线. 试讨论电流强度的周期性、有界性.

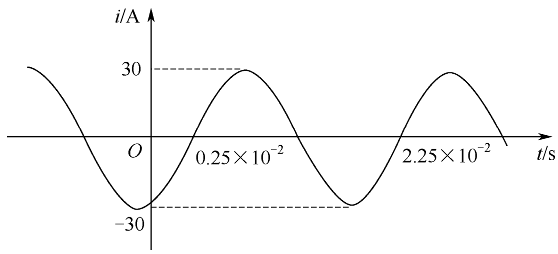


图 1-8

解 电流强度的周期

$$T=2.25\times10^{-2}-0.25\times10^{-2}=2\times10^{-2}\ (\mathrm{s})$$

电流强度为有界函数，$|i|\leq 30\ (\mathrm{A})$.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域内的 x 都有：

（1）$f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；

（2）$f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

（3）奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

（4）如果函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，称为非奇非偶函数.

例如，$y=\sin x,y=x^3,x\in(-\infty,+\infty)$ 是奇函数；$y=\cos x,y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是偶函数.

【衔接专业】图 1-9 和图 1-10 展示了 MATLAB 软件绘制的正弦信号与余弦信号的图形，可见正弦信号为奇函数，余弦信号为偶函数（MATLAB 软件中的英文变量全为正体）.

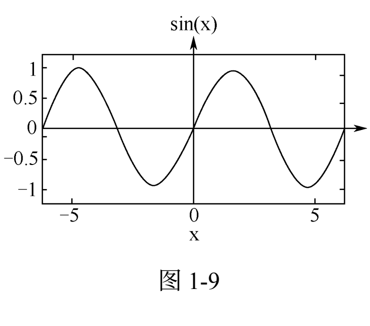


图 1-9

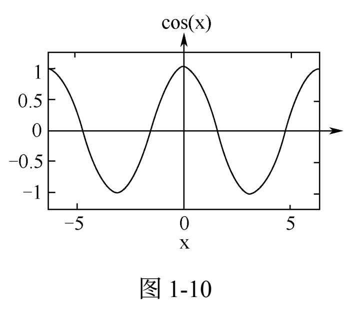


图 1-10

4. 周期性

设函数 $y=f(x),x\in D$，如果存在常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，$f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数；使上式成立的最小正数 T, 称为函数 $y=f(x)$ 的最小正周期，简称周期．例如，$y=\sin x, y=\cos x$ 的周期 $T=2\pi$，$y=\tan x, y=\cot x$ 的周期 $T=\pi$，正弦型曲线函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

【衔接专业】

图 1-11 所示信号的周期 T=π．图 1-12 所示方波信号的周期 T=2．图 1-13 所示信号的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

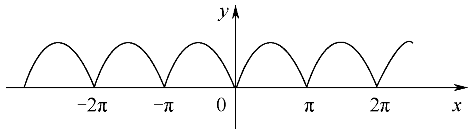


图 1-11

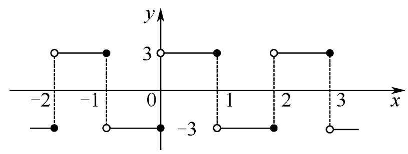


图 1-12

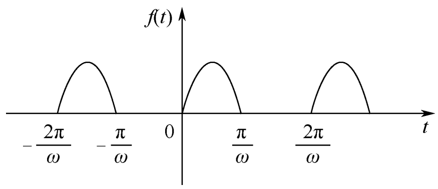


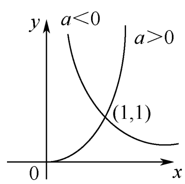
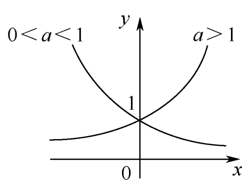
图 1-13

三、基本初等函数

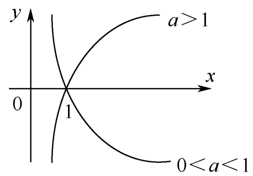
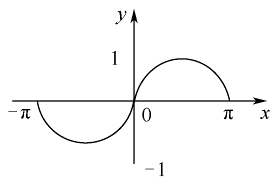
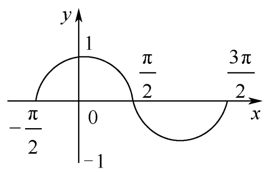
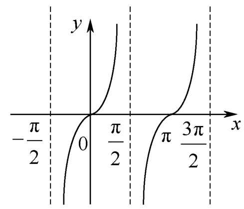
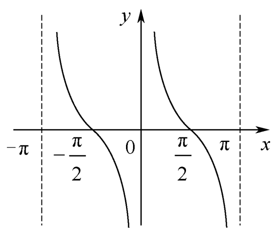
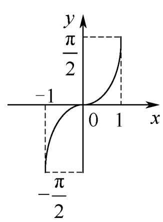
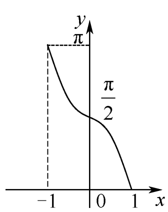
常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

为适应本书的需要，现将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这 5 类基本初等函数的表达式、定义域、性质以及图像归纳成表 1-2，供同学们学习使用.

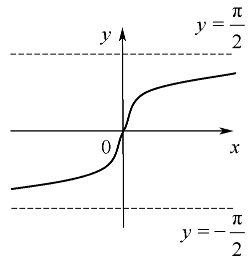
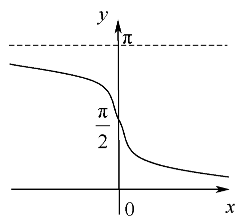
表 1-2

序号	函　数	图　像	性　质
1	幂函数 $y=x^a, a\in R$		在第一象限，$a>0$ 时函数单增；$a<0$ 时函数单减．都过点（1，1）
2	指数函数 $y=a^x$ $(a>0且a\neq 1)$		$a>1$ 时函数单增；$0<a<1$ 时函数单减．共性：过（0，1）点，以 x 轴为渐近线

续表

序号	函数		图像	性质
3	对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0且a\neq 1)$			$a>1$ 时函数单增；$0<a<1$ 时函数单减. 共性：过（1，0）点，以 y 轴为渐近线
4	三角函数	正弦函数 $y=\sin x$		奇函数, 周期 T=2π, 有界 $\|\sin x\|\leq 1$
		余弦函数 $y=\cos x$		偶函数, 周期 T=2π, 有界 $\|\cos x\|\leq 1$
		正切函数 $y=\tan x$		奇函数，周期 T=π，无界
	三角函数	余切函数 $y=\cot x$		奇函数，周期 T=π，无界
5	反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$		$x\in[-1,1], y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，奇函数，单调增加，有界
		反余弦函数 $y=\arccos x$		$x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$，单调减少，有界

续表

序号	函　　数		图　　像	性　　质
5	反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty), y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，奇函数，单调增加，有界，$y=\pm\frac{\pi}{2}$ 为两条水平渐近线
		反余切函数 $y=\operatorname{arc\,cot} x$		$x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$，单调减少，有界，$y=0, y=\pi$ 为两条水平渐近线

【数形结合思想】数形结合思想是指在处理问题时，将抽象的语言与直观的几何图形有机地结合起来思索，促使抽象思维与形象思维和谐复合．化抽象为直观，化直观为精确．

在机电设备与维修这个专业，制冷方式有许多，就拿最常见的单极蒸汽压缩式制冷循环来说，我们首先应该了解的是它的循环中的组成部分及各部分的功能，然后画出它的循环图，单从这方面去了解它，很可能是“丈二和尚——摸不着头脑”，这时我们就必须辅之以压-焓图、温-熵图（函数图像）来使我们更加准确地了解在此循环中的各个工作点的工作状态及其工作变化，这样会使此循环更加明了、更加清晰，使我们能游刃有余地运用它．

四、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的，并能用一个式子表示的函数，统称为初等函数．

初等函数的本质就是一个函数．为了研究需要，今后经常要将一个给定的初等函数看成由若干个简单函数经过四则运算或复合而成的形式．简单函数是指基本初等函数，或由基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数．

本课程研究的函数，主要是初等函数．凡不是初等函数的函数，皆称为非初等函数．

【对数简史】

15 世纪至 16 世纪，天文学得到了较快的发展，为了计算星球的轨道和研究星球之间的位置关系，需要对很巨大的数据进行乘、除、乘方和开方运算．由于数据太大，为了得到一个结果，常常需要运算几个月的时间，冗繁的运算使科学家烦恼，能否找到一种简便的计算方法呢？数学家们在探索和思考，如果能用简单的加减运算来代替复杂的乘除运算那就太好了！直至 16 世纪末 17 世纪初，苏格兰数学家纳皮尔发明了对数，才彻底解决了这一运算难题．恩格斯对对数的发明给予了高度的评价，他认为：“对数的发明与解析几何的产生、微积分的创始同为 17 世纪数学的三大成就．”

五、关于函数概念的理解

本节的中心内容是函数概念，对于函数概念的理解程度将会影响到微积分的学习，甚至涉及概率论与数理统计部分．掌握函数概念的关键在于理解函数关系 $y=f(x),x\in D$，在本质上函数关系 $y=f(x),x\in D$ 是两个变量相互依存的运算结构，而自变量的变化影响着因变量的变化．自变量可以是一个变量，也可以是一个函数形式，因此就有了基本初等函数和复合函数．通过图 1-14 来说明函数形式、基本初等函数和复合函数．

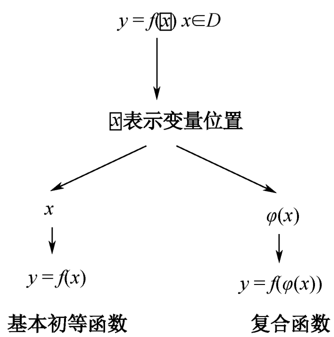


图 1-14

习题 1-2

1．求下列函数的定义域：

（1） $y=\sqrt{2x+1}$；　（2） $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

（3） $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x^2-9}$；　（4） $y=\ln(x^2-4)$

2．已知 $f(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f(0),f(2),f(x^2),f(f(0)),f(f(x^2))$．

3．求下列函数的反函数：

（1） $y=3x-2$；　（2） $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3） $y=\sqrt[3]{2x-1}$；　（4） $y=1-x^2(x<0)$．

4．下列函数是由哪几个简单函数复合而成的？

（1） $y=\sin x^3$；　（2） $y=\ln\sin x$；

（3） $y=\cos\sqrt{x+1}$；　（4） $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$；

（5） $y=(3+x+2x^2)^3$；　（6） $y=\sin^2(1+2x)$；

（7） $y=\ln\ln\sin x$；　（8） $y=\sqrt{\ln 2x}$．

第三节　应用实训

函数是高等数学中最重要的概念之一．在用数学方法解决实际问题时，经常要建立关于实际问题的数学模型，即将问题涉及的变量之间相互依赖的关系用数学公式表示出来，也就是建立各变量之间的函数关系；建立数学模型的目的有两个，① 利用模型来解释实际问题，② 利用模型对实际问题的未来做预测；由此可见建立数学模型的重要性．本节主要介绍函数在电工学、机械学中的数学模型，可使同学们进一步理解函数的实质，提高分析问题、解决问题的能力．

一、正切机构和正弦机构的位移

例题 1　[见本模块第一节函数与方程思想的应用]

解　从动件 3 的水平位移 x 与原动件 1 的杆长 L 和转角 φ 有关，并且与原动件 1 转角 φ 的正弦成正比，其函数表达式为 $x=L\sin\varphi$.

二、人造卫星测控站的优化分布模型

（1）问题提出[见本模块第一节函数与方程思想的应用]

（2）问题的解决：

所有人造卫星的运行轨道平面都通过地心，为使问题简单化，不妨假设地球是球形的，人造卫星的运行轨道是圆形的，根据题意，地面监控站与人造卫星运行轨道共面，如图 1-15 所示，其中内圆表示的是地球表面，外圆为人造卫星或飞船的运行轨道，O 为地球的球心，A 为地面一测控站．

此题要求全程测控且测控站的数量最少，即要使每个测控站所测控到的范围都尽可能大．我们以其运行轨道上的任一点 P 入手分析，当分散在两侧的两个测控站的监测交点恰好与此点重合时，恰好能保证这两个测控站都发挥了它们的最大测控范围，如果测控交点的高度低于此点所在的运行轨道时，两个测控站监控的范围就产生重叠效应；相反，当交点高于此点所在的运行轨道时，会造成测控盲区，致使有一段轨道因为落于两侧控交点的下方而未被测到，显然此问题与人造轨道至地表的高度有关（不妨设此高度为 h），可以通过求出每个测控站测控范围的夹角 β，从而利用一周 2π 与 β 之比求解出需要建立多少测控站．

利用正弦定理可得 $\dfrac{h+R}{\sin(\angle PAO)}=\dfrac{R}{\sin\alpha}$

已知地球半径 $R=6400\text{km}$，$\angle PAO=90°+3°=93°$，可解得

$$\alpha=\arcsin(\frac{6391}{h+6400})$$

$$\frac{\beta}{2}=\frac{87°}{180°}\pi-\arcsin(\frac{6391}{h+6400})$$

$$\beta=\frac{174°}{180°}\pi-2\arcsin(\frac{6391}{h+6400})$$

利用 β 求 N 值

$$N=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\frac{174°}{180°}\pi-2\arcsin(\frac{6391}{h+6400})}$$

测控站建立的数目是与轨道距地表的高度 h 有关的一个函数，若依神舟七号飞船为研究对象，此时 $h=343\text{km}$，可以得到 $N=11.54$，即在讨论神州七号飞船时需要建立 12 个测控站.

此题是在地面测控站与人造卫星的运行轨道共面的前提下，就问题进行研究的，实际上共面的假设仅适用于一种情况，即当人造卫星运行轨道与赤道的倾角等于 0 °时（此时人造卫星的运行轨道称为赤道轨道），当人造卫星的运行轨道与赤道的倾角大于 0 °时，由于地球的自转，人造卫星在运行过程中相继两圈的经度有一些差异，这就使地面测控站与人造卫星的运行轨道不再共面，问题就变得复杂了很多，学习者可以自行参考.

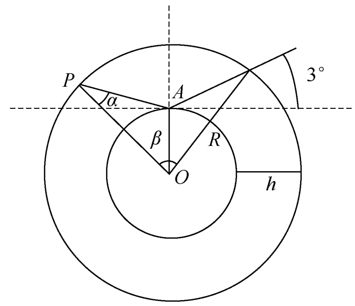


图 1-15

三、电容器电压问题

例题 2 电容器连接直流电源充电时，电容器的电压随时间变化的规律是

$$U_C(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

如图 1-16 所示，其中 E 是电源的电动势，R 是电阻，C 是电容，均为常数.

电容器放电时，电容器的电压随时间变化的规律是

$$u_C=Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

以上两个函数均是指数函数，它们都以无理数 e 为底数，而且指数总取负值.

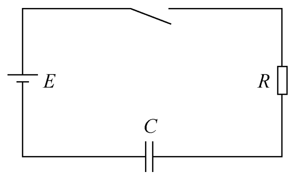


图 1-16

四、感抗问题

线圈的电感对交变电流有阻碍作用，阻碍作用的大小称为感抗，用 X_L 表述. 在交变电路中，线圈的电感作用类似于电阻. 感抗的大小由线圈的电感 L 和交变电流的频率 f 共同决定，表达式为 $X_L=2\pi fL$，线圈的电感越大，交变电流的频率越高，感抗就越大.

例题 3 某检波器输出端的中频扼流圈的电感 $L=14\mu\text{H}$（电感的单位：亨[利]（H）、微亨（μH）），交变电流的频率为 30Hz，问扼流圈的感抗等于多少？

解 已知 $L=14\mu\text{H}=14\times10^{-6}\text{H}$，$f=30\text{MHz}=30\times10^{6}\text{Hz}$，代入感抗公式，有

$$\begin{aligned}X_L&=2\pi fL=2\times3.14\times30\times10^{6}\times14\times10^{-6}\\&=2\times3.14\times30\times14\\&\approx2637.6(\Omega)=2.6376(\text{k}\Omega)\end{aligned}$$

所以，该中频扼流圈的感抗为$2.6376\text{k}\Omega$.

五、电感功率问题

在交流电中，电感两端的电压不是固定值，而是一个随电流大小变化的正弦函数，电感的功率计算公式为

$$p_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{L}} \cdot i$$

例题 4　已知在正弦交流电中，电感两端的电压为$u_{\mathrm{L}} = \sqrt{2}U_{\mathrm{L}}\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}} + 90°)$，电流强度为$i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}})$，求$P_{\mathrm{L}}$

解

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{L}} &= u_{\mathrm{L}} \cdot i = \sqrt{2}U_{\mathrm{L}}\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}} + 90°) \cdot \sqrt{2}I\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) \\ &= \sqrt{2}U_{\mathrm{L}}\cos(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) \cdot \sqrt{2}I\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) \\ &= IU_{\mathrm{L}}\sin 2(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) \end{aligned}$$

六、脉冲电压问题

常见的脉冲形状有矩形脉冲、方波脉冲、尖脉冲、锯齿脉冲、阶梯脉冲、间歇正弦脉冲等，脉冲电压具有突变性和不连续性.

例 5　如图 1-17 所示为一个单三角脉冲电压的波形图，试确立电压与时间的函数关系.

解　从图 1-17 中可以看出，脉冲电压U随时间t的变化规律需要分段进行考察. 求得U随时间t变化的关系式为

$$U \begin{cases} \dfrac{2E}{t_0}t, & 0 \leq t < \dfrac{t_0}{2} \\ \dfrac{2E}{t_0}(t - t_0), & \dfrac{t_0}{2} \leq t < t_0 \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

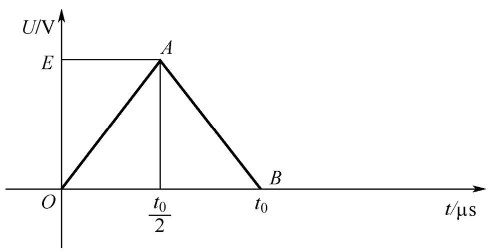


图 1-17

七、信息加密问题

为了保证信息的安全传输，有一种密码系统，其加密原理为：发送方将明文按照秘匙规定的加密方式转化成密文发送出去，接收方接收后再按照秘匙将密文转化成明文.

例题 6　已知秘匙为$y = x^a(a > 0$ 且 $a \neq 1)$，又知道"4"通过加密后得到密文为"2". 现在接收方接收到的密文为"$\dfrac{1}{6}$"，问解密后得到的明文是什么？

解 由题意知，加密秘匙为 $y=x^a(a>0$ 且 $a\neq 1)$，“4”通过加密后得到密文为“2”，即 $x=4$ 时，$y=2$，代入有 $2=4^a$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$，所以秘钥为幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$.

又由接收方收到的密文“$\dfrac{1}{6}$”，即已知 $y=\dfrac{1}{6}$，代入秘钥得 $\dfrac{1}{6}=x^{\frac{1}{2}}$，解得 $x=\dfrac{1}{36}$，所以解密后得到的明文是 $\dfrac{1}{6}$.

该例说明加密解密的过程与幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 紧密相关．变量之间的这种对应规律在雷达的各个分机中也经常遇到，如雷达电路中的二极管与三极管，阳极电流 i 与阳极电压 u 之间的对应规律为 $i=ku^{\frac{3}{2}}$（k 为常数），这种对应关系就是幂函数.

第四节　释疑问答

问题 1　函数可以用数学运算公式表示、用列表法和图示法表示，它们的函数关系 f 是什么意思？

由函数的定义可知，函数关系 f 就是自变量与因变量的对应关系．无论什么方式所表达的函数，我们都可借助直观图像来加深对函数关系 f 的理解，现将函数关系 f 比作一部“数值机器”，把定义域中的每一个数值 x 输入“数值机器”中，通过 f 的“作用”，输出来的就是值域中的函数值（见图 1-18）

例如：多项式函数 $f(x)=x^5-2x^3+3x^2-1$ 的函数关系 f 是什么意思？

观察上式右端，给定一个 x 的值，通过对应关系 $(\quad)^5-2(\quad)^3+3(\quad)^2-1$

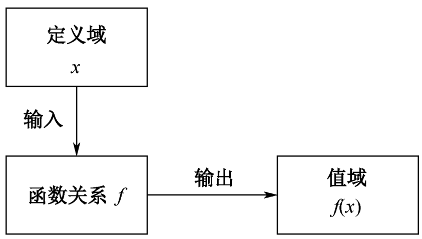


图 1-18

确定函数的一个值，因此，函数的关系 f 是：$(\quad)^5-2(\quad)^3+3(\quad)^2-1$

又如函数：$$f(x)=\log\sin(3x+1)$$

其函数关系 f 是下列运算：$$\log\sin[3(\quad)+1]$$

即对给定 x 的一个值，先乘以 3 再加 1，取 sin，最后再取 log，而得到函数的值．这里，我们把 sin、log 都看成数学运算．以后把指数、对数、三角函数及反三角函数都看成数学运算.

因此，由一个数学解析式表示的函数，其函数关系式 f 是一系列的数学运算.

由一个列表法表示的函数，它的函数关系 f 就是表中所反映的对应规律.

由一个图示法所表示的函数，它的函数关系 f 就是图形所反映的对应规律.

问题 2　函数的定义域与函数关系 f 有什么关系？

我们从分析具体函数入手，如函数

$$y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$$

的定义域是 $a \le x \le b$. 之所以不能取 $x<a$ 或 $x>b$, 是因为受函数关系 $f:\sqrt{[(\ )-a][b-(\ )]}$ 的限制.

又如，自由落体函数：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

定义域：t 从下落的时刻 t_0 直到着地时刻 t_1 为止，

即：$t_0 \le t \le t_1$.

这就是说，函数的定义域是由所讨论问题的实际情况所决定的.

综述：对于不涉及实际问题的初等函数，它的定义域由其函数关系确定；但对于实际问题和特定问题来说，函数的定义域由所讨论问题的实际情况确定.

问题 3　对于 x 的同一值，y 取不同的值是不是函数？

如函数：

$$y=\pm\sqrt{x}$$

由函数的定义，对于 x 的一个值，对应 y 的一个确定的值，现在对应两个，所以它不是函数. 若将函数定义稍加推广，允许对于 x 的一个值对应 y 的一个或两个以上的值，则这个推广以后的函数称为多值函数，此处，$y=\pm\sqrt{x}$. 是多值函数，对于多值函数，以后我们研究它的单值分支，$y=\sqrt{x}$ 或 $y=-\sqrt{x}$.

问题 4　如何理解企业文化是企业竞争力的函数.

若把函数的定义域与值域拓展到非数值集合，企业所有规则的集合用 A 表示（注：规则代表了企业竞争力），即 A= {企业规则}；企业文化为：零投诉. 即用集合 B= {零投诉} 表示，集合 A 中的每一项规则（每一个元素）都为了：零投诉，即都对应 B 中唯一一个元素：零投诉. 由此可见，这个对应 f 是集合 A 到 B 的一个函数. 因此可以说，企业文化就是企业竞争力的函数. 在企业运作中，集合 A 与集合 B 都是优化的对象. 建立企业规则 A 与企业文化 B 的数据库，优选最佳对应关系 f，是优秀企业家一生高度关注的重要工作之一.

【数学历史】

发展中的数学

何谓“数学”？随机向人们提问，你可能获得的答案是“数学是有关数字的一门学问”. 但这种答案无法体现当今数学已经在很大程度上贯穿我们日常生活和社会大部分活动的真实现象. 其实，这样一种关于数学的描述，在大约两千五百年前，就已经不再正确了.

事实上，“何谓数学”这个问题的答案，在人类历史长河中，已经数度更新了.

到公元前 500 年左右为止，数学的确是有关数字（number）的一门学问. 这是古埃及和古巴比伦时期的数学. 在这些文明中，数学所包括的几乎都以算术为主.

从大约公元前 500 年到公元 300 年的这一时期，是希腊数学的时代. 古希腊的数学家主要关心几何学（geometry）. 对于希腊人而言，由于他们强调几何学，所以数学不只研究数字，而且也是有关形状（shape）的学问. 事实上，自希腊数学时代始，数学进入研究领域，而不再只是度量、计算和会计等技巧的大杂烩，他们视数学为一种知性探索，其中包

含了美学和宗教成分.

一直到 17 世纪中叶，英国的牛顿和德国的莱布尼茨各自独立发明微积分前，数学的整体本质未曾有过根本的变革，或者说几乎没有任何显著的进展. 实质上，微积分是研究运动（motion）和变化（change）的一门学问. 在此之前的数学大都局限于计算、度量和形状描述的静态议题上. 在引进了处理运动和变化的技巧后，数学家终于可以研究行星的运行、地球的落体运动、机械装置的运作、液体的流动、气体的扩散、电力和磁力、飞行、动植物的生长、流行病的传染、利润的波动等. 在牛顿和莱布尼茨之后，直到 19 世纪末，数学变成了研究数字、形状、运动、变化以及空间（space）的一门学问.

在 20 世纪，数学活动的爆发相当戏剧化. 在 1900 年，世界上所有的数学知识可以全部装入大约 80 部书籍之中. 而在今日，数学将须十几万部书籍才能容纳. 这种非比寻常的增长，不只源自一个世纪以来数学的进步，也因为许多新的数学分支已纷纷涌现. 譬如代数与拓扑学（topology)，已经细分为不同的子领域.

一种特定的研究之所以被归类为数学，并不是基于什么被研究，反倒是基于它如何被研究，也就是说，基于被使用的方法论. 在最近大约三十年间，一个被大部分数学家所认可的关于数学的定义，才出现了：数学是研究模式的科学（science of patterns）. 数学家的所作所为，就是去检视抽象的模式——数值模式、形状模式、运动模式、行为模式、重复机会模式等. 这些模式可以是真实存在或抽象的、视觉性或心智性的、静态或动态的、定性或定量的、纯粹功利或有点超乎娱乐趣味的. 它们可以源自我们周遭的世界、源自空间和时间的深度，或者源自人类心灵的内部运作. 不同类型的模式当然引出不同的数学分支，比如：算数与数论研究数字与计算模式；几何研究形状模式；微积分主要研究运动模式；概率论主要研究机会模式；拓扑学研究临近与位置模式；逻辑学研究推论模式等.

资料来源——[美]齐斯. 德福林 著. 洪万生等译《数学的语言》

第五节　数列的极限

没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而也没有任何其他的概念能像无穷那样需要加以阐明.

——希尔伯特（1862—1943）

学习内容：数列的极限.

目的要求：理解极限思想与微积分的起源，理解数列、数列极限、数列收敛发散的定义；熟练掌握数列极限的判断，数列极限的四则运算法则；了解收敛数列的性质.

重点难点：数列极限的判断，数列极限的四则运算法则.

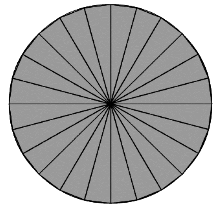
一、极限思想与微积分理论的创立

在日常生活中，我们对“极限”一词时有耳闻，爱好体育的学生知道百米赛跑的极限是 9.2 秒（目前被认可的）；医学专业的学生关注人的生命极限；经济专业的学生关心利润的极限等. 极限对大家并不陌生，那么，数学上的“极限”概念与我们所认知的是否相同呢？

1. 刘徽的极限思想

公元 263 年，我国魏晋时代的著名数学家刘徽提出利用圆内接正多边形来推算圆的面积——割圆术（见图 1-19）.

设有一个圆，首先做其内接正六边形，它的面积记为 A_1；再做其内接正十二边形，它的面积记为 A_2；再做其内接正二十四边形，它的面积记为 A_3；如此下去，每次边数加倍，一般把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n，这样得到一系列内接正多边形的面积：



A_3

图 1-19

$$A_1, A_2, A_3, \cdots A_n, \cdots$$

内接正多边形的边数 n 越多，即正整数 n 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋向于无穷大）时，内接正多边形的面积也在不断增大，显然，无限接近于一个定值——圆的面积 A，但是，虽然无限接近却永远达不到圆的面积.

2. 庄子的极限思想

春秋战国时期哲学家庄子在《庄子 · 天下篇》中对“截丈问题”有一段名言：“一尺之锤，日取其半，万世不竭”，意思是说，一尺长的木棍，每天截取它的一半，这个过程将无穷无尽，其中也隐含了深刻的极限思想. 木棍余量的极限显然是 0，但木棍永远是有的.

以上两个例子都是很典型的极限概念. 数学家从 17 世纪开始研究极限的概念，历经 200 多年，终于在 19 世纪完善了极限概念.

3. 微积分理论的创立

公元 16 世纪，由于社会生产力的提高，特别是欧洲的生产向大工业方向发展，促进了航海、天文等事业的拓展，对于“运动”的研究成为当时自然科学的中心问题，在这种背景下，微积分为解决生产力及科学研究的实际问题而产生了.

到了 17 世纪，法国数学家笛卡儿（1596—1960）引进坐标系后，变量数学的时期开始了. 研究“运动问题”和“几何问题”涉及“变速运动的瞬间速度”、“曲线围成平面图形的面积”等问题，许多卓越的数学家与物理学家的研究，为微积分的诞生作了准备，直到 17 世纪 60~70 年代，牛顿从力学问题入手，莱布尼茨从几何问题出发，利用不严密的极限方法，分别独立创立了微积分. 直到他们把积分的计算与微分联系起来，人们才有了解决诸如变力做功、曲线图形等问题的简单而有效的工具. 然而，微积分理论基础的建立，大约推迟了两个世纪.

1821 年，法国数学家柯西（1789—1857）在他的《分析学教程》等著作中给出了分析学中一系列基本概念的严格定义，并且引入了严格的叙述与论证，从而开创了微积分的近代体系，柯西在 1821 年提出的关于叙述极限的 ε 方法，用不等式刻画整个极限过程，将无穷的运算化为不等式的推导，柯西被称为近代微积分的奠基者，现代微积分的表达和证明方法，基本上都采用了柯西的理论体系，在此基础上，德国数学家威尔斯特拉斯（1815—1897）将 ε 和 δ 结合起来，完善了 ε-δ 方法，摆脱了单纯的运动和直观理解.

二、数列

定义 1　无穷多个数按照一定顺序排成一列 $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 称为数列，记作 $\{y_n\}$，其中 y_n 称为数列的一般项或通项，n 为正整数，称为下标.

显然，数列的项是其下标的函数，因此数列还可以表示为

$$y_n = f(n), n \in N^+$$

例如　观察下列数列的变化趋势：

（1）$\left\{(-1)^n\right\}: -1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$.　　（2）$\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$.

（3）$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$.　　（4）$\left\{1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right\}: \frac{1}{2},\frac{5}{4},\cdots,1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n,\cdots$.

（5）$\left\{n^2\right\}: 1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots$.

在初等数学中，我们关心数列的通项公式及其前 n 项和，现在我们要研究当 n 无限增大时，数列的整体变化趋势.

对于数列（2），当 n 无限增大时，其通项 $\frac{1}{n}$ 越来越小，且无限接近于 0.

对于数列（3），当 n 无限增大时，其通项 $\frac{1}{2^n}$ 越来越小，且无限接近于 0.

对于数列（4），当 n 无限增大时，其通项 $1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ 虽然有时比 1 大有时比 1 小，但到 1 的距离 $\left|y_n-1\right|=\frac{1}{2^n}$ 越来越小，因此 y_n 无限接近于 1.

以上讨论的 3 个数列有共同的特性：当 n 无限增大时，其通项都无限接近于某个常数. 把这种性质抽象出来，就形成了极限的定义.

三、数列的极限

定义 2　设有数列 $\{y_n\}$，如果存在一个常数 A，当 n 无限增大时，y_n 无限接近于 A，则称当 $n\to\infty$ 时数列 $\{y_n\}$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad 或 \quad y_n \to A(n\to\infty).$$

如果一个数列有极限，则称这个数列是收敛的，否则称这个数列是发散的.

上述数列中，(2)，(3)，(4) 数列是收敛的，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]=1$. (1)，(5) 数列是发散的，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2$ 不存在. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2$ 是趋于无穷大而不存在，也可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$.

【关注符号 lim】

lim 表示“极限”，是其英文 limit 的缩略语，这个符号从来不单独使用，总是与“$\to$”相伴而行，写成 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 或 $\lim\limits_{n\to 0}$ 这样的形式. 这两种写法分别表示“n 无限增大”和“n 无限接近于零”. 其中，$\lim\limits_{n\to\infty}$ 也不单独使用，写成诸如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$ 形式. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$=0 的含义是“$n$ 无限增大时，1/n+1 无限接近于零”.

在 1786 年出版的数学书籍中，第一次使用 lim 这个符号. 刚开始的时候没有“$n\to\infty$”这一写法，都是用“n=∞”这一写法，进入 20 世纪，才用“$\to$”代替“=”.

但“无限接近……这一描述方法没有数学的精确性”，德国数学家外尔斯特拉斯的 ε—