第 1 章　函数、极限与连续

学习目标

1. 理解函数的概念，了解分段函数、基本初等函数、初等函数的概念，了解反函数、复合函数的概念，会分析复合函数的复合结构.

2. 了解极限的描述性定义，了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系和性质.

3. 会用两个重要极限公式求极限，掌握极限的四则运算法则.

4. 理解函数在一点连续的概念，知道间断点的分类.

5. 会应用函数连续性的性质.

极限是数学中一个重要的基本概念，也是学习微积分学的理论基础.本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限与连续等问题.

1.1　函数

一、函数概念

1．函数的定义

【定义 1】 设两个变量 x 和 y，当变量 x 在某给定的非空数集 D 中任意取一个值时，变量 y 的值由这两个变量之间的关系 f 确定，称这个关系 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x), x\in D$.

数集 D 叫作这个函数的**定义域**，x 叫作**自变量**，y 叫作**因变量**.

当 x 取定 $x_0\in D$ 时，与之对应的 y 的数值称为函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，$f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的**值域**，记作 R_{f} 或 $f(D)$，即 $R_{\mathrm{f}}=f(D)=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$.

下面介绍邻域的概念. 设 a 是一个实数，$\delta>0$，称区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为以 a 为中心，δ 为半径的**邻域**，简称点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，如图 1.1 所示.

称集合 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 为以 a 为中心，δ 为半径的**去心邻域**，简称点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{o}{U}(a,\delta)$，即 $\overset{o}{U}(a,\delta)=U(a,\delta)\setminus\{a\}$.

函数的表示方法主要有三种：解析法、表格法、图像法.

【例 1. 1】（表格法）如假设 x 表示月份，y 表示某项金额. 表 1.1 给出了 x 和 y 之间的

依赖关系.

表 1.1

x（月）	1	2	3	4	5	6
y（金额）	543	762	564	660	743	800

点集 $P=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$的**图形**或**图像**，如图 1.2 所示.

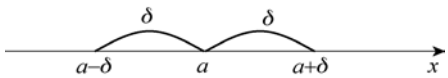

图 1.1

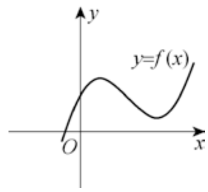

图 1.2

【例 1.2】 求下列函数的定义域.

（1） $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$； （2） $y=\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-2}$.

【解】（1）二次根号下的被开方数必须非负，分母不能为零，因此有$3-x>0$，即 $x<3$，定义域为$(-\infty,3)$.

（2）对数的真数必须为正实数，分母不为零，因此有

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2\neq 0 \end{cases}$$

解得 $x>1$ 且 $x\neq 2$，故定义域为$(1,2)\cup(2,+\infty)$.

【例 1.3】 判断下列各对函数是否为同一函数.

（1） $f(x)=x,\quad g(x)=\sqrt{x^2}$； （2） $f(x)=\cos^2 x+\sin^2 x,\quad g(x)=1$；

（3） $f(x)=\sec^2 x-\tan^2 x,\quad g(x)=1$.

【分析】 只有定义域和对应法则都相同的两个函数才是同一函数.

【解】（1）不相同，因对应法则不同， $g(x)=|x|$.

（2）相同，因定义域和对应法则都相同.

（3）不相同，因定义域不同. $f(x)$ 的定义域为$\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$， $g(x)$ 的定义域为全体实数.

有的函数在定义域的不同取值范围内取不一样的表达式，这样的函数称为**分段函数**.以下举几例.

【例 1.4】（绝对值函数） $y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，图像如图 1.3 所示.

【例 1.5】（符号函数） $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$，图像如图 1.4 所示.

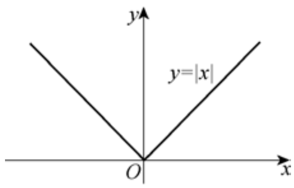

图 1.3

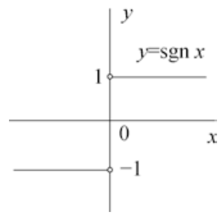

图 1.4

对任意实数 x，有 $x=|x|\cdot\operatorname{sgn}x$.

【例 1.6】（取整函数，又名 Gauss 函数） $y=[x]$．$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数，简称 x 的整数部分．例如 $[\frac{2}{3}]=0,[\sqrt{3}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-2.5]=-3$．取整函数图像如图 1.5 所示.

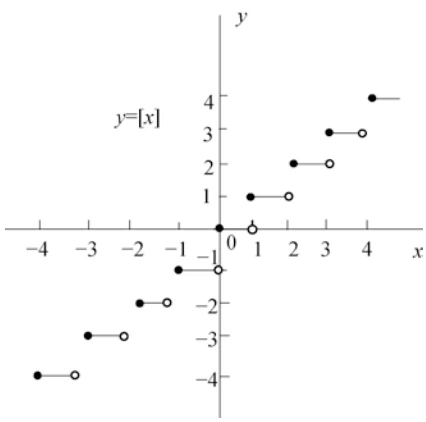

图 1.5

其图像形状如楼梯，因此这类函数又称为阶梯型函数.

2. 函数的几种特性

【定义 2】（有界性）设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 M，使得对每一个 $x\in D$ 有 $\left|f(x)\right|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**；否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

例如，正弦函数 $y=\sin x$，对任意实数 x，满足 $|\sin x|\leqslant 1$，故它在定义域内有界.

有界性的几何意义是：函数 $f(x)$ 的图像完全落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间．例如，正弦函数的图像完全落在直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间.

$\boxed{\text{注}}$ 有界性是与区间有关的，例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 上有界，而在区间 $(0,1)$ 上无界．因此，不能笼统地说某函数有界或无界，而必须指明所考虑的区间.

【定义 3】（单调性）设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$.若对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1< x_2$ 时，不等式 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的（见图 1.6）；若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1< x_2$ 时，不等式 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 恒成立，那

么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的（见图 1.7）.单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**，区间 I 称为单调区间.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的. 函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的.

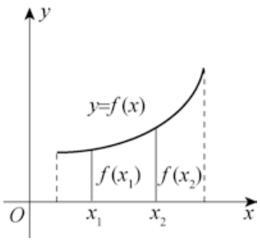

图 1.6

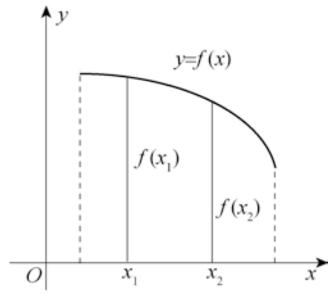

图 1.7

【定义 4】（奇偶性）设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数，函数 $f(x)=\tan x$ 是奇函数，而 $f(x)=x^2+\sin x$ 既非奇函数也非偶函数，函数 $f(x)=0$ 既是奇函数也是偶函数.

思考 既是奇函数又是偶函数的函数是否只有 $f(x)=0$？

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称，如图 1.8 所示.

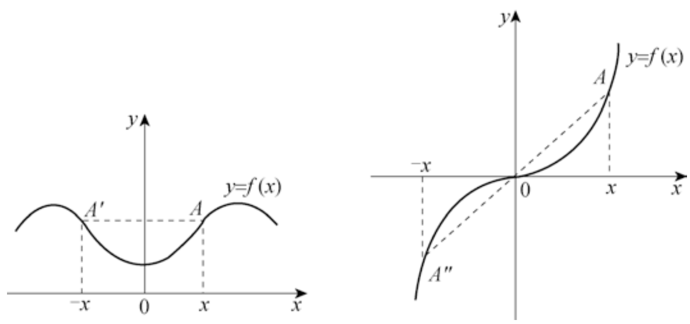

图 1.8

【定义 5】（周期性）设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**. 数 T 称为函数的**周期**，通常我们说周期函数的周期是指满足该等式的最小正数 T，称为**最小正周期**.

三角函数都是周期函数，其中 $y=\sin x, y=\cos x$ 的周期为 2π， $y=\tan x$ 的周期为 π. 电气工程中常用的函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi),(A,\omega>0)$，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

思考 是否所有周期函数都有最小正周期？

二、基本初等函数

【定义 6】 下列函数称为基本初等函数.

（1）常函数： $y=c$.

（2）幂函数： $y=x^{\mu}$（其中 μ 为任意实常数）.

（3）指数函数：$y=a^x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

（4）对数函数：$y=\log_a x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

（5）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

（6）反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

其中，常函数、幂函数、指数函数、对数函数及三角函数，我们在高中阶段已经进行了系统且详细的学习，此处不再赘述. 下面重点介绍反三角函数.

（1）反正弦函数 $y=\arcsin x$：它是函数 $y=\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数，定义域为 $[-1,1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，在定义域内单调增加，奇函数，有界.

（2）反余弦函数 $y=\arccos x$：它是函数 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$ 的反函数，定义域为 $[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$，在定义域内单调减少，非奇非偶函数，有界，其图像经过点 $(0,\frac{\pi}{2})$.

（3）反正切函数 $y=\arctan x$：它是函数 $y=\tan x, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的反函数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，在定义域内单调增加，奇函数，有界.

（4）反正弦函数 $y=\operatorname{arc}\cot x$：它是函数 $y=\cot x, x\in(0,\pi)$ 的反函数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,\pi)$，在定义域内单调减少，非奇非偶函数，有界，其图像经过点 $(0,\frac{\pi}{2})$.

它们的图形分别如图 1.9～图 1.12 中实线所示.

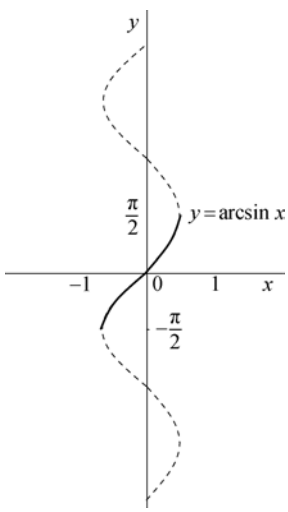

图 1.9

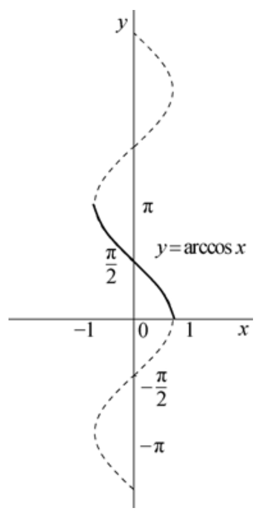

图 1.10

反三角函数在各自的定义域内满足以下关系式：

$$\sin(\arcsin x)=x,\quad \cos(\arccos x)=x,\quad \tan(\arctan x)=x,$$

$$\cot(\operatorname{arc}\cot x)=x,\quad \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad \arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\frac{\pi}{2}.$$

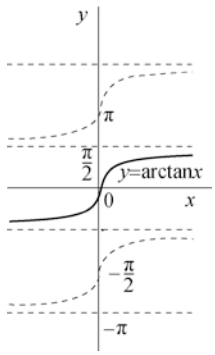

图 1.11

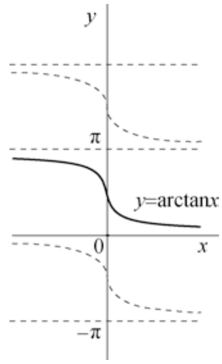

图 1.12

三、复合函数、初等函数

【定义 7】 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则函数 $y=f[g(x)],x\in D$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 D，变量 u 称为**中间变量**.

例如， $y=\ln(2x+1)$ 是由 $y=\ln u,u=2x+1$ 构成的复合函数.

注 1 不是任何两个函数都可以复合，如 $y=\sqrt{u},u=-1-x^2$ 不能复合，这是因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$， $u=-1-x^2$ 的值域为 $(-\infty,-1]$，两者的交集为空集. 若作形式上的复合 $y=\sqrt{-1-x^2}$，则对任意实数 x，该表达式无意义！

注 2 复合函数还可以由三个或以上的函数复合而成，例如函数 $y=\sin\frac{1}{x-1}$ 可看作由函数 $y=\sin u,u=\frac{1}{v},v=x-1$ 复合构成，这里 u,v 都是中间变量.

正确掌握分析复合函数的复合过程的方法对以后的学习非常重要. 方法如下：从外层开始，层层剥皮，逐层分解.

【例 1.7】 指出下列复合函数的复合过程.

（1） $y=\mathrm{e}^{x^2}$，　　　　（2） $y=\sin^2[\ln(3x+1)]$.

【解】（1）由 $y=\mathrm{e}^u$， $u=x^2$ 复合构成.

（2） $y=u^2$， $u=\sin v$， $v=\ln w$， $w=3x+1$.

需要注意区分开函数 $y=\sin^2 x$， $y=\sin x^2$，前者是 $y=u^2$， $u=\sin x$ 的复合，后者是 $y=\sin u$， $u=x^2$ 的复合，切勿混淆.

【定义 8】 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成，并可用一个解析式表示出的函数称为**初等函数**.

例如，例 1.6 中的复合函数都是初等函数，又如 $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$，$y=\sqrt[3]{\dfrac{2\ln x+\tan x+\mathrm{e}^{3x}}{\arcsin x+3}}$ 皆为初等函数. 分段函数一般不是初等函数，如取整函数、符号函数都不是初等函数.

思考 绝对值函数是不是初等函数？

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

（1） $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；　　（2） $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；

（3） $y=\tan(3x+1)$；　　（4） $y=\dfrac{1}{x-2}+\sqrt{x^2-9}$.

2. 设 $f(x)=x^2+3x+2$，求 $f(1), f(-2), f(\dfrac{1}{3}), f(a+1)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ \cos x-1 & x<0\end{cases}$，求 $f(\dfrac{\pi}{2}), f(0), f(-\dfrac{\pi}{3}), f(1)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

（1） $y=x(x-1)(x+1)$；　　（2） $y=\sin x+\cos x$；

（3） $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$；　　（4） $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

5. 确定下列函数的单调区间.

（1） $y=2\sin(3x-1)$；　　（2） $y=1+\sqrt{x-1}$；

（3） $y=(\dfrac{1}{\pi})^x$；　　（4） $y=x^2-2x-1$.

6. 指出下列复合函数是由哪些函数复合构成的.

（1） $y=\sin(\ln x)$；　　（2） $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$；

（3） $y=3\tan x^2$.

7. 用铁皮做一个体积为 V 的圆柱形无盖水桶，将所需的铁皮的面积 A 表示成底面半径 r 的函数，并指出其定义域.

8. 广州的出租车收费方案如下，起步价 7 元，起步里程 2.3 千米，之后每千米 2.6 元，另收燃油费 2 元. 假设交通顺畅（没有因堵车或等候产生的费用）.

（1）把乘坐出租车的收费 y 表示成乘坐里程 x 的函数.

（2）求里程为 15 千米时的车费.

（3）某人带着 50 元，他乘坐出租车最远可以达到多少千米？

1.2　极限

极限思想是由求某些实际问题的精确解答而产生的. 例如，古希腊数学家阿基米德利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——穷竭法。中国古代数学家刘徽利用类似的割圆术，就是极限思想在几何学上的应用.

本节将介绍数列与函数极限的定义及一些计算方法.

一、数列的极限

1. 数列

我们先对高中阶段学习过的数列做个简要的复习.

【定义 1】 按一定次序排列的一些数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称作一个**数列**，记作 $\{x_n\}$. 其中，x_1 称数列的第一项或**首项**，第 n 项 x_n 称为数列的一般项或**通项**.

数列亦可看作以正整数集为定义域的函数，$x_n = f(n), n \in \mathbf{Z}^+$.

下面举几个数列的例子.

（1）等差数列：$2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 2n, \cdots$ 即 $\{2n\}$.

（2）等比数列：$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots, \frac{1}{3^{n-1}}, \cdots$ 即 $\{\frac{1}{3^{n-1}}\}$.

2. 数列的极限

先看一个古代数学问题——截丈问题. 2000 多年前，中国的庄子提出“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”意为一根一尺长的竹竿，每天截取它的一半，那就永远取不完. 从第一天起，我们把该竹竿被截后所剩长度写下来，便得到如下数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

庄子指出，无论经过多少天，竹竿总有剩的，不可能取完. 也就是说，对任意的正整数 n（无论它多大），这个数列的项永远为正数. 但这只是问题的一个方面，另外，我们不难发现，当 n 无限增大时，该数列的项就无限接近于 0. 这里隐含着数列的极限，下面给出定义.

【定义 2】 对于数列 $\{x_n\}$，若当 n 无限增大时，x_n 无限接近于一个确定的常数 a，则称数列 $\{x_n\}$ 以 a 为**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{，或 } x_n \to a(n \to \infty)$$

也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a；如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就称 $\{x_n\}$ 是发散的.

因此，对截丈问题，可以用极限表示为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

【例 1.8】 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

（1）$\{x_n=\frac{1}{n}\}$，（2）$\{x_n=1-\frac{1}{n^2}\}$，（3）$\{x_n=\frac{1}{3^n}\}$，（4）$\{x_n=2\}$.

【解】（1）$x_n=\frac{1}{n}$，当 n 依次取 1，2，3，4，5，…时，x_n 的各项依次为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$，可见，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 0，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

（2）$x_n=1-\frac{1}{n^2}$，与上类似，x_n 的各项顺次为 $0,1-\frac{1}{4},1-\frac{1}{9},1-\frac{1}{16},\cdots$，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 1，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})=1$$

（3）$x_n=\frac{1}{3^n}$，x_n 的各项顺次为 $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots$，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 0，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$$

（4）$x_n=2$，该数列每项都为 2，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}2=2$$

数列一般有以下性质.

【性质 1】 常数数列的极限是常数，$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$.

【性质 2】 公比的绝对值小于 1 的等比数列，极限为 0，即当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

$\boxed{\text{注}}$并非所有数列都有极限，例如数列 $\{n^2\}$，当 n 无限增大时，n^2 也无限增大，并不趋近于一个确定的常数. 又如 $\{(-1)^n\}$，它的项交替取值−1 和 1，当 n 无限增大时，x_n 不断在这两个数之间来回跳动，不是无限接近于一个确定常数. 这两个数列都没有极限.

二、函数的极限

数列可看作自变量为正整数 n 的函数：$x_n=f(n)$，数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，即当自变量 n 取正整数且无限增大 $(n\to\infty)$ 时，对应的函数值 $f(n)$ 无限接近数 a.

若将数列极限概念中自变量 n 和函数值 $f(n)$ 的特殊性撇开，可以由此引出函数极限的一般概念：在自变量 x 的某个变化过程中，如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的数 A，则 A 就称为 x 在该变化过程中函数 $f(x)$ 的极限.

对数列而言，自变量 n 的变化过程不外乎就是 $n\to\infty$. 然而，函数的自变量 x 的变化过程就丰富得多，可以是趋于无穷大或有限值，还可以按这种趋势的左右方向进一步细分. 自变量的变化过程不同，函数的极限就有不同的表现形式. 本部分分两种情况来讨论.

1. 当 $x\to\infty$ 时函数的极限

我们先考察 $x\to\infty$ 时函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势. 如图 1.13 所示，当 $x\to\infty$ 时，函数趋近于确定的常数 0. 我们说，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 0.

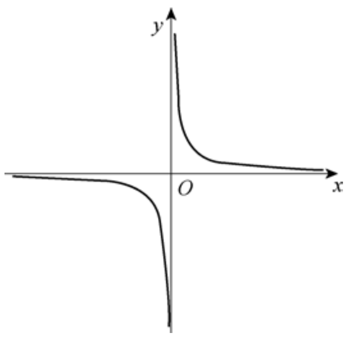

图 1.13

【定义 3】 如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近一个常数 A，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

如果从某一时刻起，x 只取正数或负数且绝对值无限增大，则有以下定义.

【定义 4】 如果当 $x>0$ 且 x 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近一个常数 A，则称当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

【定义 5】 如果当 $x<0$ 且 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近一个常数 A，则称当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty)$$

显然有以下结果：

【定理 1】 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

【例 1.9】 求下列函数极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$；（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

【解】（1）由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

（2）观察 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像可知当 $x\to-\infty$ 时，$\mathrm{e}^x\to0$，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.

（3）观察反正切函数的图像可得，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，由定理 1 可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

【例 1. 10】 考察函数 $f(x)=\dfrac{x}{3}+1$ 当 $x\to3$ 时的变化趋势.

当 x 从左边无限接近于 3 时，对应的函数值变化情况见表 1.2.

表 1.2

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	$x\to 3$
y	1.97	1.997	1.9997	1.99997	$y\to 2$

当 x 从右边无限接近于 3 时，对应的函数值变化情况见表 1.3.

表 1.3

x	3.1	3.01	3.001	3.0001	$x\to 3$
y	2.03	2.003	2.0003	2.00003	$y\to 2$

可见，当 $x\to 3$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x}{3}+1$ 无限接近于 2.我们说，函数 $f(x)=\dfrac{x}{3}+1$ 当 $x\to 3$ 时的极限为 2.

【定义 6】 如果当 x 趋于 x_0（但 $x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

也称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 收敛到 A；否则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时发散或者极限不存在.

【例 1. 11】 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 当 $x\to 1$ 时是否有极限.

【解】 在 $x=1$ 处，$f(x)$ 无定义. 我们考察的是当 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 的变化趋势. 当 $x\to 1$ 时，$x\neq 1$，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1(x\neq 1)$，因此有

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

本例说明 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有极限与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义毫无关系.

一般地，考察函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的极限时，常常需要考察 x 分别从左边和从右边趋于 x_0 时，函数值的变化趋势，为此，我们引入左右极限的概念.

【定义 7】 如果当 $x>x_0$ 且趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的**右极限**是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+) \quad \text{或 } f(x_0+0)=A$$

【定义 8】 如果当 $x<x_0$ 且趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的**左极限**是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-) \quad \text{或 } f(x_0-0)=A$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**.

由上述定义，可得以下结论.

【定理 2】 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在的充要条件是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的左、右极

限存在并且相等.

若记上述极限值为 A，则定理 2 可简记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$$

因此，当 $x\to x_0$ 时，只要 $f(x)$ 的两个单侧极限中有一个不存在，或者都存在却不相等，则 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时无极限. 以上性质常用于判断分段函数在区间分界点处极限的存在性.

【例 1.12】 讨论函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时是否有极限.

【解】 $f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，这是分段函数，0 是区间分界点，因此应分别讨论 x 从左边和右边趋于 0 时的极限情况.

由 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}|x|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，且 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}|x|=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，根据定理 2 得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

【例 1.13】 求函数 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$，当 $x\to 0$ 时的极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

【解】 由

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

$$f(0-0)\neq f(0+0)$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

三、极限的四则运算法则

在以下讨论中，记号“lim”下面没有标明自变量的变化过程，是因为以下定理对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 都成立.

【定理 3】 如果 $\lim f(x)=a$，$\lim g(x)=b$，那么，

（1）$\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$.

（2）$\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=ab$.

特别地，$\lim(C\cdot f(x))=C\cdot\lim f(x)=Ca$（$C$ 为常数）；

$\lim(f(x))^k=(\lim f(x))^k=a^k$（$k$ 是正整数）.

（3）若 $b\neq 0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

定理 3 中的（1）和（2）都可以推广到有限个函数的情形.由于数列可视为整变量函数，则此法则对数列极限也完全适用.

【例 1.14】 求 $\lim\limits_{x\to 3}(3x-2)$.

【解】
$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}(3x-2)&=\lim_{x\to3}3x-\lim_{x\to3}2\\&=3\lim_{x\to3}x-\lim_{x\to3}2\\&=3\times3-2=7\end{aligned}$$

【例 1. 15】 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x^3-x^2+2x+1}$.

【解】 分母的极限 $\lim\limits_{x\to1}(x^3-x^2+2x+1)=3\neq0$，因此可以直接用商的极限法则，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x^3-x^2+2x+1}&=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^3-x^2+2x+1)}\\&=\frac{3}{3}=1\end{aligned}$$

【例 1. 16】 求下列各式的极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2})$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2}$；（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{3^n}$.

【解】（1）
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})&=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\\&=1+0+0=1\end{aligned}$$

（2）当 $n\to\infty$ 时，分子及分母的极限都不存在，不能直接用商的极限法则，但可对分式做分子分母同时除以 n 的变形，便有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}\\&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{2}{n})}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n}&=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n+\lim_{n\to\infty}1^n\\&=0+1=1\end{aligned}$$

【例 1. 17】 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

【解】 分母的极限 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$，不能直接用商的极限法则，应对分式化简再求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(x+2)=4\end{aligned}$$

【例 1. 18】 求 $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x})$.

【解】 当 $x\to1$ 时，以上两式的极限都不存在，需先通分再计算极限.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(2+x)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=1$$

【例 1.19】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2-x+1}$.

【解】 当 $x\to\infty$ 时，分母和分子都发散到 ∞，不能直接用商的极限法则，我们对分母分子同时除以 x^2，然后取极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+3}{2x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
$$=\frac{3+0+0}{2-0+0}=\frac{3}{2}$$

这种通过分子和分母同时除以两者的最高次，化成繁分式再取极限的方法，称为“无穷小因子分出法”，又简称“抓大头”. 用此法，我们可以计算出任何一个有理分式函数当 $x\to\infty$ 时的极限. 一般有：

当 $a_0\neq0,b_0\neq0$， m,n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{当} n=m\\ 0, & \text{当} n>m\\ \infty, & \text{当} n<m\end{cases}$$

【例 1.20】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

【解】 当 $x\to0$ 时，分子和分母的极限都是 0，可对根式做分子有理化，把根号移到分母上.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

习题 1.2

1. 求下列数列极限.

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{4}{n^3})$；　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n-2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n^2-2n+5}{-2n^3+n-1}$；　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n+1}{3^n}$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}]$；　（6）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2})$.

2. 函数 $f(x)$ 在 x_0 左右极限存在是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极限的（　　）条件.

A. 充分非必要　B. 必要非充分

C. 充要　D. 前三者均不是

3. 求下列函数极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 2}(x+2)$；　（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$；　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+1}{5x^3-4x+3}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+6x^2+4}$；　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6x^2+4}{x^2+2x-3}$；

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$；　（8）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+x^2+3x+27}{x-3}$；

（9）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$；　（10）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x+2)^{20}}{(5x+1)^{50}}$；

（11）$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1})$；　（12）$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arc}\cot x$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geqslant 1\\ -3 & x<1\end{cases}$，做出 $f(x)$ 的图像，并求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

5. 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax^2+b}{x-2}=8$，求 a,b 的值.

1.3　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量与无穷大量的概念

在实际问题中，经常会遇到以零为极限的变量. 例如，单摆离开铅直位置并摆动，由于受到空气阻力和机械摩擦力作用，它的振幅随时间增加而逐渐减少并趋近于零；又如在电容器放电时，电压也是随时间的增加而逐渐减少趋近于零.

还有一些变量在变化过程中，绝对值无限增大. 下面我们给出这两种变量的定义.

【定义 1】 如果 $\lim\limits_{x\to X}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to X$ 时的**无穷小量**，简称无穷小.

若 $\lim\limits_{x\to X}f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to X$ 时的**无穷大量**，简称无穷大.

也就是说，无穷小是以 0 为极限的函数，无穷大是绝对值无限增大的函数.

例如，当 $x\to 0$ 时，$x^2,\sin x,\sqrt{x}$ 都是无穷小，当 $x\to 1$ 时，$(x-1)^2,\ln x$ 是无穷小，当 $x\to\infty$

时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小．当$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷大，当$x\to\infty$时，x^2是无穷大．

$\boxed{注}$ 定义中“$x\to X$”表示自变量的某个变化过程，可以是“$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$”中的任何一种．

在自变量的同一变化过程中的无穷小具有如下性质．

【性质 1】 有限个无穷小的代数和是无穷小．

【性质 2】 有界函数与无穷小的乘积是无穷小．

由以上两个性质可得以下两性质．

【性质 3】 常数与无穷小的乘积是无穷小．

【性质 4】 有限个无穷小的乘积是无穷小．

【例 1.21】 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

【分析】 当$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x}\to\infty$，$\sin\dfrac{1}{x}$的取值在区间$[-1,1]$上波动，无极限，不能用积的极限法则计算，应考虑无穷小的性质．

【解】 当$x\to 0$时，x是无穷小量，又因为$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以$\sin\dfrac{1}{x}$是有界变量；根据性质2有$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

二、无穷大量与无穷小量的关系

无穷小与无穷大有如下关系．

【定理 1】 在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大．

简言之，同一过程中的无穷大的倒数为无穷小，非零无穷小的倒数是无穷大．

【例 1.22】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}$.

【解】 当$x\to 1$时，$x-1\to 0$，$x+1\to 2$，不能用商的极限法则．考虑其倒数的极限，有$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$，即当$x\to 1$时，$\dfrac{x-1}{x+1}$是无穷小，由定理1，$\dfrac{x+1}{x-1}$是无穷大，因此

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\infty$$

三、无穷小量的比较

我们通常用速度来描述与比较物体运动的快慢，那么，怎样描述及比较无穷小量收敛速度的快慢呢？例如，当$x\to 0$时，$3x$、$2x$、x^2都是无穷小，而它们的比值的极限有各

种不同情况：

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2},\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}=\infty$$

这反映了在同一极限过程中，不同的无穷小趋于零的“快慢”程度不一样. 从上述例子可看出，在 $x\to 0$ 的过程中，$3x\to 0$ 与 $2x\to 0$“快慢大致相同”，$x^2\to 0$ 比 $3x\to 0$“快些”，而 $2x\to 0$ 比 $x^2\to 0$“慢些”. 下面我们通过无穷小之商的极限来说明两个无穷小之间的比较，给出无穷小的阶的定义.

【定义 2】 设 α,β 是同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$.

（1）若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

（2）若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说 β 是比 α 低阶的无穷小；

（3）若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，就说 β 是与 α 同阶无穷小；

特别地，若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

显然，如果 β 是比 α 高阶的无穷小，则 α 是比 β 低阶的无穷小，这时 β 比 α 收敛到 0 的速度“快些”． 如果 β 是与 α 同阶无穷小，那么它们收敛到 0 的“快慢大致相同”．

例如，当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0$，即 $x^2=o(3x)\ (x\to 0)$；此时 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}=\infty$，因此 $3x$ 是比 x^2 低阶的无穷小；

当 $x\to 0$ 时，$2x$ 与 $3x$ 是同阶无穷小，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$；

当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小，即 $\sin x\sim x(x\to 0)$，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，这是第一重要极限，我们将在下一节加以介绍.

【例 1.23】 当 $x\to 0$ 时，试比较下列无穷小的阶.

（1）$\alpha=x^2+2x,\beta=x$；　　（2）$\alpha=x\cos x,\beta=x$.

【解】（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}=2$，所以当 $x\to 0$ 时，x^2+2x 与 x 是同阶无穷小.

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x}=1$，所以当 $x\to 0$ 时，$x\cos x$ 与 x 是等价无穷小.

四、具有极限的函数与无穷小量的关系

关于等价无穷小，有下面的重要定理.

【定理 2】（无穷小与极限的关系）β 与 α 是等价无穷小当且仅当 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

这个定理是说，两个无穷小等价，当且仅当它们的差是比其中一个更高阶的无穷小.

例如，$x^2+2x\sim 2x(x\to 0)$，因为它们的差 x^2 是比 $2x$ 高阶的无穷小，即

$$x^2=o(2x)(x\to 0)$$

【定理 3】（等价无穷小代换原理）设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$$

这个定理告诉我们一种求极限的方法——等价无穷小代换法.求两个无穷小的商的极限时，分子和分母都可以用等价的无穷小来代替. 通常，我们用形式较简单的无穷小代替较复杂的无穷小，以达到简化计算的目的. 进一步，分子和分母中的无穷小乘积因子也可以用等价无穷小代替.

下面先给出一些常用的等价无穷小：

当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\arcsin x\sim x$,

$\arctan x\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (\alpha\in R)$, $\mathrm{e}^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$.

【例 1.24】 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\sin 2x}$；（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

【解】（1）当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

（2）当 $x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$，$\sin 2x\sim 2x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{x\cdot 2x}=\frac{9}{2}$$

（3）当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，但

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}\neq\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

为什么？因为只有当分子或分母是函数的乘积时，对于乘积因子才可以用等价无穷小代换. 对于和或差中的函数，一般不能用等价无穷小代换. 这是用等价无穷小代换法求极限的易错点，需要特别注意！

正确解法为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}$$

当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\frac{1}{2}x^2)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

结合定理 2，我们介绍等价无穷小代换法中的一种特殊的技巧——舍去高阶无穷小. 根

据定理 2，对于能用等价无穷小代换的分母或分子（或乘积因子），若是两个不同阶的无穷小的和，则可以把其中较高阶的无穷小舍去，即以其中较低阶的无穷小作代换. 以下举例说明.

*【例 1.25】 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\tan 2x-x^3}$.

【解】（1）当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，又 $x^3=o(x)$，故 $x^3+x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

（2）当 $x\to 0$ 时，$\sin^2 x\sim x^2$，而 $x^2=o(3x)$，故 $\sin^2 x=o(3x)$，由定理 2 得 $3x+\sin^2 x\sim 3x$，类似有 $\tan 2x-x^3\sim 2x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin^2 x}{\tan 2x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

习题 1.3

1. 下列函数中，哪些是无穷小，哪些是无穷大？

（1）$y=3x+x^2(x\to 0)$；（2）$y=\dfrac{1}{x-2}(x\to\infty)$；

（3）$y=\dfrac{1}{x-2}(x\to 2)$；（4）$y=\log_2 x(x\to 0^+)$.

2. 函数 $y=\dfrac{x}{x+1}$ 在什么条件下是无穷小，什么条件下是无穷大？

3. 当 $x\to 0$ 时，x^2+2x 与 x^3+3x^2 相比较，哪个是较高阶的无穷小？

4. 当 $x\to 0$ 时，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1+x}=1$，能否说函数 e^x 与 $1+x$ 是 $x\to 0$ 时的等价无穷小？

5. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\sin\dfrac{1}{x-1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2)}{4x}$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin^2 x+\tan^3 x}{\sin 5x+2x^2}$.

1.4 两个重要极限

本节介绍两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ 及 } \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

在物理学中，我们有一个近似计算的公式：当 x 的绝对值 $|x|$ 很小时，$\sin x \approx x$．从无穷小收敛到 0 快慢的角度看，这个近似式就是说当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 和 x 收敛到 0 的“速度相同”．换句话说，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，或记为 $\sin x \sim x(x\to 0)$．

对这个结果，我们列出当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的数值表（见表 1.4）加以说明.

表 1.4

x（弧度）	± 1.000	± 0.100	± 0.010	± 0.001	$x\to 0$
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.8417098	0.99833417	0.99998334	0.9999984	$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$

由表 1.4 可知，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．

【例 1. 26】 证明当 $x\to 0$ 时，下列各对无穷小等价.

（1） $\tan x, x$；（2）$1-\cos x, \dfrac{1}{2}x^2$；（3） $\arcsin x, x$．

【证】（1）因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\\ &= 1\times 1 = 1\end{aligned}$$

所以 $\tan x \sim x(x\to 0)$．

（2）因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\\ &= (\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2\\ &= 1^2 = 1\end{aligned}$$

所以 $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2(x\to 0)$．