第一章　随机事件与概率

教学目标：

1. 理解随机试验、样本空间、随机事件的概念，掌握事件之间的关系及运算，懂得写出一般随机试验的样本空间和把用概率论语言表达出的事件用集合的形式来表示；

2. 了解概率的统计定义、古典定义、几何定义，理解概率的公理化定义，掌握概率的基本性质，懂得计算一些简单的等可能概型、几何概型问题和利用概率的性质计算简单事件的概率；

3. 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式，懂得用这些公式计算有关的概率；

4. 理解事件独立性的概念和伯努利概型的定义，懂得用事件的独立性和二项概率公式计算简单事件的概率。

本章共分为 5 节，建议在 7 个课时内完成。

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科。本章以研究随机现象统计规律的需要，首先给出了随机试验、样本空间、随机事件等概念，然后在此基础上给出概率的几种定义，奠定了概率的公理化定义在概率论与数理统计中的重要地位，让大家清楚认识到概率的真谛，最后给出了在特定场合下计算概率的一些手段和公式，如乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式、事件的独立性、二项概率公式。

第一节　随机事件和样本空间

一、随机试验、样本空间

1. 随机现象

在自然界、生产实践、科学试验和日常生活中，人们观察到的现象大体可以归结为两种类型。一类是在一定条件下必然出现（或者不出现）某种结果的现象。这类现象的一个共同特点就是可以事前预言，即在准确地重复某些条件的情况下，它的结果总是可以肯定的，或是根据它过去的状态，在相同的条件下完全可以预言将来的发展，我们把这类现象称为确定性现象或者必然现象。例如，在标准大气压下，温度达到 100℃的纯水必然沸腾；异性电荷必然相互吸引等。几何、微积分、线性代数都是研究确定性现象的数学工具。另一类现象是不能预言其结果的，即在保持条件不变的情况下，重复实验或观察，或出现这种结果，或出现那种结果，这类现象称为随机现象。例如，投掷一枚骰子时朝上面的点数，某人在公交车站的候车时间，某款产品的使用寿命，天气变化情况，某种股票的涨跌等，它们的变化情况充满了不确定性，个别或少数观察具有偶然性。可以说，随机现象就是在一次观测中其结果不

能事先确定，但进行大量重复观察，这些随机现象会呈现某些规律性。例如，连续把一枚硬币(均匀，指定正反面)抛掷 5 次，则出现正面的次数可能为 0，1，2，3，4，5，出现其中某一个结果带有偶然性。当抛掷的次数很多时，则正面出现的次数占总次数的比例接近 0.5，即正面出现的次数大约占一半，呈现规律性，即统计规律性。

概率论与数理统计就是揭示和应用随机现象统计规律性的一门学科，但是各有侧重。概率论侧重于应用已有的随机现象统计规律性进行计算和推理；而数理统计是以概率论为理论依据，研究如何设计试验并对试验结果进行整理和统计分析，做出统计推断，从而揭示随机现象统计规律性。

2．随机试验和样本空间

正如前面所述，为了研究随机现象内部存在的数量规律性，就必须对它作一定次数的观察。我们把对随机现象进行的一次观察、测量或实验，称为一次试验，如果其还满足下列三个条件，就称为随机试验(简称试验)，记为 E，E_1 或 E_2。

(1) 试验在相同条件下可以重复进行；

(2) 试验前能明确所有可能的结果；

(3) 试验前不能肯定哪个结果会发生。

因此，随机试验 E 将要出现的结果是不确定的，但其所有可能结果是明确的。我们把随机试验的每一个可能的基本结果，称为 E 的一个样本点，用 ω 表示。随机试验 E 的所有样本点的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω 。在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间 Ω 。

例 1 抛掷一枚硬币，观察正面和反面出现的情况，将两个基本结果分别记为 ω_1,ω_2 ，则该试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$ 。

例 2 掷一颗骰子，观察朝上面的点数，可能出现的点数分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6，则该试验的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 。

例 3 从一大批同型号的电子元件中任取一个，测试其使用寿命(单位：小时)，则试验的样本空间为 $\Omega=[0,+\infty)$ 。

例 4 随机试验为：向一个直径为 50cm 的靶子射击，观察弹着点的位置。为表示出试验的样本空间，设弹着点 ω 的坐标为 (x,y) ，则此试验的样本空间为 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 25^2\}$ 。

3．随机事件

在实际中，我们不仅要全面描述随机试验，也常常关心随机试验出现的某种情况，如例 2 中，我们会关心骰子出现的点数是否为偶数点，满足这一条件的样本点组成其样本空间的子集。一般地，我们称随机试验 E 的样本空间 Ω 的一个子集为一个随机事件，简称事件，常记为 A,B,C 等。任一事件 A 是相应样本空间 Ω 中的一个子集，它是由随机试验 E 的一个或几个样本点组成的集合，在概率论中常用一个长方形示意样本空间 Ω，用其中一个圆表示事件 A，如图 1-1 所示。

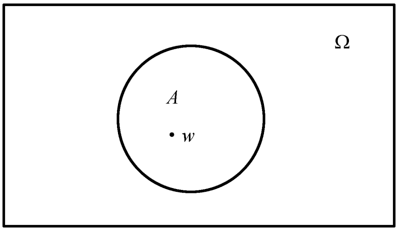

图 1-1

设 $A\subseteq\Omega$ ，若试验结果 $\omega\in A$ ，则称在这次试验中事件 A 发生；若试验结果 $\omega\notin A$ ，则称事件 A 不发生。如例 2 中，可把事件“出现偶数点”表示为 $A=\{2,4,6\}$ ，若掷

得结果为 4 点，则事件 A 发生；又如例 4 中，若规定弹着点距靶心距离不超过 5cm 为 10 环，则事件“射中 10 环”表示为 $B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 5^2\}$，若射中位置为 $(6,2)$，则事件 B 不发生，即未射中 10 环。

特别，由一个样本点组成的单点集也称为基本事件。样本空间 Ω 也是自身的一个子集，称这个事件为必然事件。不含任何样本点的空集 ϕ 称为不可能事件。虽然这两个事件是随机事件的特殊情况，但在概率论研究中起着重要作用。

二、随机事件的关系和运算

由上所述可理解，集合论是讨论随机试验与事件的合适的数学工具。事件既然用样本空间的子集来表示，事件的关系和运算也就能相应地用集合的关系和运算来表示。下面的讨论在一个固定的样本空间 Ω 中进行，主要根据“事件发生”的含义，给出这些关系和运算在概率中的含义，这有助于将复杂事件分解成简单事件，对以后复杂事件概率的计算是极其有益的。

(1) 事件的包含：若事件 A 发生时事件 B 一定发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subseteq B$，见图 1-2。对于任意事件 A，有 $\phi\subseteq A$。如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

(2) 事件的相等：若事件 A 和事件 B 相互包含，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称事件 A 和事件 B 相等，记作 $A=B$。

(3) 事件的并（或和）：事件 A 和事件 B 的并事件是指事件 A 和事件 B 中至少有一个发生，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$，也称作事件 A 和事件 B 的和事件（见图 1-3）。

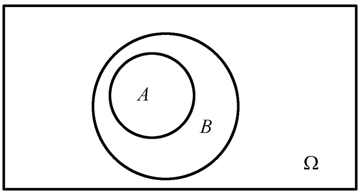

图 1-2

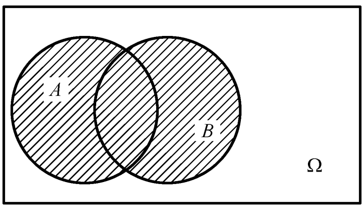

图 1-3

类似地，称“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，中至少有一个发生”的事件为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$；称“可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生”的事件为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 的和，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$。

(4) 事件的交（或积）：事件 A 和事件 B 的交事件是指事件 A 和事件 B 同时发生，记作 $A\cap B$ 或 AB，也称作事件 A 和事件 B 的积事件（见图 1-4）。

类似地，称“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”的事件为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$；称“可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生”的事件为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$。

(5) 事件的互斥（互不相容）：若事件 A 和事件 B 在同一次试验中不能同时发生，则称事件 A 和事件 B 是互斥（互不相容）的，见图 1-5。按照集合的观点，应有 $AB=\phi$。

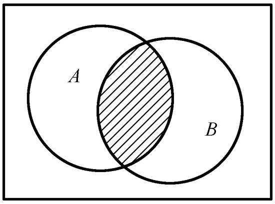

图 1-4

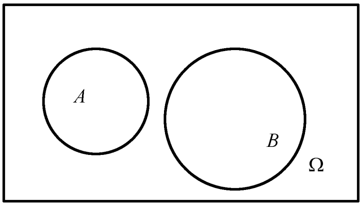

图 1-5

互斥关系可推广到多个事件，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥是指对于任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，$A_i$ 与 A_j 互斥，即 $A_i A_j = \phi$。

(6) 对立事件 $\overline{A}$：称事件 A 不发生为事件 A 的对立事件或补事件，记作 $\overline{A}$，见图 1-6。事件 A 和它的补事件 $\overline{A}$ 满足 $A \cup \overline{A} = \Omega$，$A\overline{A} = \phi$，所以事件 A 和其补事件 $\overline{A}$ 是互斥的特例，同时还有 $\overline{\overline{A}} = A$。

(7) 事件的差：事件 A 与事件 B 的差事件是指事件 A 发生而事件 B 不发生，记作 $A-B$，见图 1-7。根据交事件和补事件的定义，可得 $A-B = A\overline{B} = A - AB$。

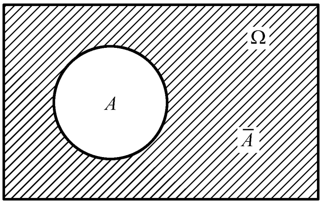

图 1-6

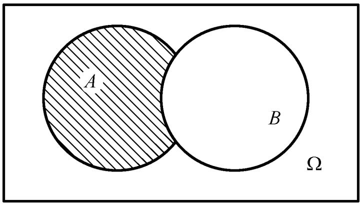

图 1-7

在实际中，对事件间进行具体运算时，完全可以把事件看成一个集合，也就是事件间的运算就是集合间的运算，因此事件运算具有以下性质。

设 A, B, C 为事件，则有：

(1) $A \cup B = B \cup A$，$AB = BA$（交换律）；

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A(BC) = (AB)C$（结合律）；

(3) $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$，$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$（分配律）；

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$，$\overline{AB} = \overline{B} \cup \overline{A}$（对偶律）。

更一般的有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \tag{1.1}$$

例 5 一位同学某学期有三门考试课程，以字母 A, B, C 分别表示这三门课程通过考试的三个事件，请用事件的运算表示下列事件：

(1) 三门课程全部通过考试； (2) 三门课程中至少有一门通过考试；

(3) 三门课程中恰好有一门未通过考试； (4) 三门课程中全部未通过考试；

(5) 三门课程中最多有一门通过考试； (6) 三门课程中至少有一门未通过考试。

解 (1) ABC； (2) $A \cup B \cup C$； (3) $\overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$；

(4) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$； (5) $\overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$； (6) $\overline{ABC}$。

第二节　概　　率

在研究随机现象时，尽管随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，但在一次试验中随机事件发生的可能性大小是客观存在的，并且是可以度量的。为此我们称随机试验中事件 A 发生的可能性大小为事件 A 的概率，记作 $P(A)$。但是对于某个特定的事件 A，概率 $P(A)$ 是怎样规定的呢？我们先介绍概率的统计定义，然后再介绍概率的古典定义及几何定义，最后引进概率的公理化定义。

一、概率的统计定义

首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度。

定义 1.1　在相同的条件下，重复 n 次试验，随机事件 A 在 n 次试验中出现的次数 μ_n 称为频数，比值 $\frac{\mu_n}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$。

可以验证，当试验次数 n 固定时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 有如下的性质：

(1) 非负性：$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：$f_n(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 互不相容，则 $f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$。

尽管事件 A 在一次试验中发生与否是偶然的，但在大量的试验中，事件 A 发生的频率却随着试验次数的增大总在某一确定的数值附近摆动，这种规律性称为频率的稳定性。

例如，在历史上，曾经有人做过大量抛硬币的试验，表 1-1 就记录了掷一枚均匀硬币的结果。

表 1-1

试　验　者	投掷次数 n	正面出现次数 μ_n	正面出现的频率 $\frac{\mu_n}{n}$
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
德摩根(Demoran)	4092	2048	0.5005
费勒(Feller)	10 000	4979	0.4979
皮尔逊(Pearson)	12 000	6019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.4923

从表 1-1 可以看出，事件 A 出现的频率总是围绕 0.5 上下波动，且越来越接近 0.5。

这类例子不胜枚举。这一切表明，在大量试验中事件 A 具有频率的稳定性，也就是统计规律性，为此我们引入概率的统计定义。

定义 1.2(概率的统计定义)　在相同条件下重复进行 n 次试验中，事件 A 出现 μ_n 次，当 n 无限增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$ 的稳定值 p 称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$。一般来说，n 越大，摆动幅度越小。

基于频率与统计概率的这种联系，统计概率应满足：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$。

根据概率的统计定义，我们让试验重复大量次数，计算频率 $f_n(A)$，以它来表征事件 A 发生的概率。这样做数学上不够严格且耗费大量的人力、物力，但对两类特殊的随机现象可不必做大量的试验，就能直接求出事件的概率，它们分别是古典概型和几何概型。我们先讨论古典概型。

二、概率的古典定义

若随机试验 E 满足如下特征：

(1) 每次试验的结果(基本事件)只有有限多个，即样本空间是有限集；

(2) 每个基本事件发生可能性相同。

则称 E 为古典概型，古典概型又称等可能概型。

定义 1.3(概率的古典定义)　若样本空间 Ω 的基本事件总数为 $|\Omega|=n$，事件 A 包含的基本事件数为 $|A|=m$，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{m}{n} \tag{1.2}$$

公式(1.2)是古典概型概率的计算公式，关键在于计算样本空间 Ω 和事件 A 的基本事件个数，这里经常要用到基本计数原理和排列组合的相关知识。

例 6　将一枚均匀的骰子抛掷两次，求两次出现的点数之和等于 8 的概率。

解　显然样本空间 $\Omega=\{(i,j)\,|\,i,j=1,2,\cdots,6\}$，设 A 表示“两次出现的点数之和等于 8”的事件，则 $A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$，于是有 $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{5}{36}$。

例 7　在 100 件产品中有 10 件次品，现从中随机抽取 2 件，求下列事件的概率：

(1) 有放回抽取，先任取 1 件，观察后放回，再任取 1 件，求两件都是次品的概率；

(2) 无放回抽取，先任取 1 件，不放回，再任取第 2 件，求第 1 件是次品、第 2 件为正品的概率。

解　以 A, B 分别表示(1)、(2)两个事件。

(1) 显然样本空间 Ω 的基本事件总数为 100×100，事件 A 包含的基本事件数为 10×10，所以 $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1}{100}$。

(2) 同理可得 $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{10\times90}{100\times99}=\frac{1}{11}$。

例 8　(分房问题)有 n 个人，每个人都以同样的概率 $\frac{1}{N}(n \leqslant N)$ 被分配在 N 间房的任意一间里去住，试求下列事件的概率：

(1) A=“某指定的 n 个房间中各有一人住”；

(2) B=“恰有 n 个房间，其中各有一人去住”。

解　把第一个人分配到 N 间房中之一去有 N 种可能，第二个人分配到 N 间房中之一去有 N 种可能。那么，对于 n 个人来说就有 N^n 种分配方法，即样本空间中包含有基本事件总数为 N^n 个。

(1) 事件 A 即“某指定的 n 个房间中各有一人住”，相当于 n 的一个全排列，即 A 包含的样本点个数为 $n!$，则 $P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$；

(2) 事件 B 中“恰有 n 间房”可以从 N 个房间中任意挑选出来时有 C_N^n 种选法。对每一种选法有 $n!$ 种住法。因此事件 B 所包含的样本点的个数是 $C_N^n \cdot n!$，

则 $P(B)=\dfrac{C_N^n \cdot n!}{N^n}=\dfrac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}$

分房问题是相当广泛的一类问题，很多实际例子都可以归结为它而得到解决。历史上著名的“生日问题”也可以用此模型来解决。

例 9　某次校友聚会有 n 个人（$n\leqslant 365$）。试求下列各事件的概率：

(1) $A=$“所有的人生日全不相同”；

(2) $B=$“至少有两人生日相同”。

解　(1) 把一年 365 天看作 365 个房间，假定每个人的生日是一年中任何一天的概率为 $\dfrac{1}{365}$。那么，事件 A 可看作“恰有 n 个房间，其中各住一人”，则所求的概率为

$$P(A)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n}$$

(2) 事件 A 与事件 B 是对立事件，故 $P(B)=1-P(A)=1-\dfrac{365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n}$，表 1-2 给出了 $P(A)$ 与 $P(B)$ 的近似值。

表 1-2

n	10	20	22	23	30	40	50	55
$P(A)$	0.88	0.59	0.52	0.49	0.29	0.11	0.03	0.01
$P(B)$	0.12	0.41	0.48	0.51	0.71	0.89	0.97	0.99

从上表可以看出，在仅有 50 人的班级里，“至少有两人生日相同”这一事件的概率与 1 相差无几。因此，如果进行调查，几乎总是会出现的，读者不妨试一试。

三、概率的几何定义

古典概型利用了等可能性计算概率，但要求样本空间必须为有限集，这使得无限样本空间的问题不能适用，于是我们去掉对样本空间为有限集的限制，就得到了几何概型的定义。

若随机试验 E 满足如下两个特征：

(1) 每次试验的结果是无限多个，即样本空间是无限点集，可用某一有限的几何区域(直线、平面或三维空间等)表示，且可以度量该区域的大小(长度、面积、体积等)；

(2) 每次试验的各种结果等可能地出现。

则称 E 为几何概型。

定义 1.4(概率的几何定义)　设几何概型的样本空间可表示成有度量的区域，仍记为 Ω，

若事件 A 所对应的区域仍以 A 表示（$A\subset\Omega$），则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}=\frac{S_A}{S_\Omega} \tag{1.3}$$

其中，S_A、S_Ω 分别表示 A、Ω 的度量。

公式(1.3)是几何概型概率的计算公式，关键在于选取合适的参数从而把问题几何化，找到样本空间 Ω 和事件 A 对应的几何区域，分别计算它们的度量。当计算面积时，经常要用到定积分的相关知识。

例 10　设某公共汽车站每间隔 5 分钟有一辆公交车到站，乘客到达汽车站的时刻是任意的，求一位乘客候车时间不超过 3 分钟的概率。

解　设一辆公交车 0 时刻到站，则下一辆公交车到达时刻为 5。若 t 表示乘客的等待时间，A 表示“候车不超过 3 分钟”的事件，则样本空间为 $\Omega=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 5\}$，事件 $A=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 3\}$，所求概率为 $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{3}{5}=0.6$。

例 11　设 x 和 y 是任意两个小于 1 的正数，求 $xy<\dfrac{1}{2}$ 的概率。

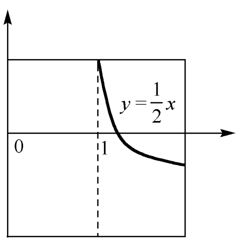

图 1-8

解　本题相当于在平面区域 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$ 内任意选一点，求此点落在区域 $A=\left\{(x,y)\mid(x,y)\in\Omega,xy<\dfrac{1}{2}\right\}$ 内（见图 1-8）的概率。

因为平面区域 Ω 是边长为 1 的正方形，其面积为 1，而 A 的面积为 $\dfrac{1}{2}+\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$，

所以 $P(A)=\dfrac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2}{1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2$。

四、概率的公理化定义

前面讨论的概率的古典定义和几何定义都具有和统计定义一样的性质，即非负性、规范性和有限可加性，但它们都是在特殊的随机试验 E 下给出的概率的计算方法，具有明显的极限性，不能作为事件概率的严格定义。所以要寻求考虑的一般定义，使其具有普遍性、严密性。苏联概率学家 Kolmogorov 在总结前人的研究成果后，于 1933 年在他的著作《概率论的基本概念》中提出了概率的公理化定义，具体定义如下。

定义 1.5　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，若对每一个事件 A，有且只有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且满足如下公理：

(1) 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 完全可加性：若对任一列两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n) \tag{1.4}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

由前述公理可以推出以下概率的重要性质：

性质 1　$P(\phi)=0$

性质 2　对于两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)$。　(1.5)

性质 3　$P(\bar{A})=1-P(A)$　(1.6)

性质 4　若 $A\subseteq B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ 且 $P(A)\leqslant P(B)$。

性质 5　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$（加法公式）　(1.7)

推论：对任意 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^nP(A_1A_2\cdots A_n)\tag{1.8}$$

特别地，若 $n=3$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\tag{1.9}$$

例 12　证明：对于任意两个事件 A,B，有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$（减法公式）。

证明　由于 $B-A=B-AB$，而 $AB\subseteq B$，根据性质 4 可得

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$$

例 13　设 A,B 是同一个试验中的两个事件，且 $P(A)=0.6$，$P(A-B)=0.2$，$P(A\cup B)=0.9$，求 $P(\overline{AB})$，$P(B)$ 和 $P(A\cup\bar{B})$。

解　由于 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，所以 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4$。

于是得到 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$。

由于

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，所以 $P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.7$。

而 $P(\bar{B})=1-P(B)=0.3$，$P(A-B)=P(A\bar{B})=0.2$，

故 $P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=0.6+0.3-0.2=0.7$。

第三节　条 件 概 率

一、条件概率与乘法公式

在讨论复杂的概率问题时，经常会考虑一个事件 B 的发生会对另一个事件 A 的发生产生多大的影响，并要求计算在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率，称作条件概率，记为 $P(A|B)$。

例 14　一个家庭有两个孩子，且已知该家庭有男孩，问两个孩子均为男孩的概率是多少？（假定生男生女是等可能的）

解　样本空间为 $\Omega=\{$（男，男），（男，女），（女，男），（女，女）$\}$，设 A 表示“两个孩子都是男孩”，B 表示“该家庭有男孩”，则有

A=$\{$（男，男）$\}$，B=$\{$（男，男），（男，女），（女，男）$\}$。

由于 B 已经发生，所以计算 $P(A|B)$ 应选择 B 作为样本空间，因此 $P(A|B)=1/3$。

此例题中，若不知道 B 已经发生，则 $P(A)=1/4\neq P(A|B)$，这是由于样本空间的变化而造成的。但 $P(A|B)$ 与 $P(A)$ 和 $P(B)$ 还是存在一定关联。若事件 B 已经发生，事件 A 发生当且仅当 AB 发生，$P(A|B)$ 应为 $P(AB)$ 在 $P(B)$ 中所占的“比重”。由此我们应给出如下条件概率 $P(A|B)$ 的定义。

定义 1.6　设 A,B 是两个随机事件，且 $P(B)>0$，称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。

不难验证，条件概率也满足概率的三条公理和相应的概率性质，如：$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$ 或者 $P(A\cup C|B)=P(A|B)+P(C|B)-P(AC|B)$，等等。

将定义 1 中的 A 和 B 对换，也有 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0)$，称为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。根据这两个条件概率公式，可得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) \tag{1.10}$$

称式(1.10)为概率的乘法公式，它是计算交事件概率的基本公式。

乘法公式可以推广到有限个事件的交的情况：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是同一试验中的 n 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.11}$$

显然 $P(A_1)\geqslant P(A_1A_2)\geqslant P(A_1A_2A_3)\geqslant\cdots\geqslant P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 可保证式(1.11)中其他的条件概率皆有意义。

例 15　设袋中装有 r 只红球，t 只白球。每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球，若在袋中连续取出 4 次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

解　以 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示事件“第 i 次取到红球”，则 $\overline{A_3},\overline{A_4}$ 分别表示事件第三、四次取到白球。所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})&=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2)P(\overline{A_4}|A_1A_2\overline{A_3})\\&=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{t+a}{r+t+3a}\end{aligned}$$

二、全概率公式

在计算复杂事件的概率时，我们可将复杂事件分解为互不相容的简单事件之并，然后用条件概率和乘法公式，求出这些简单事件的概率，最后利用概率的可加性得到所求的概率。这个方法的一般化就是所谓的全概率公式。先给出样本空间的划分的定义。

定义 1.7　设随机试验的一组事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互斥，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，则称事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，如图 1-9 所示。

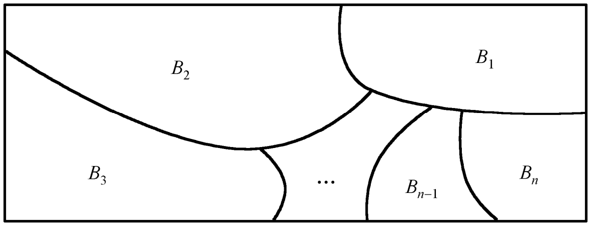

图 1-9

若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间的一个划分，那么，对每次试验，事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中必有一个且仅有一个发生。当 $n=2$ 时， B_1 与 B_2 就是对立事件。有了样本空间的划分后，就可以把复杂事件分解为两两互斥的简单事件的和。从而有：

定理 1.1　设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是一个完备事件组，如果 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$ ，则对任意事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i) \tag{1.12}$$

证明　因为 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间的一个划分，所以有

$$A = A\Omega = A\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (AB_i)$$

又 $AB_1, AB_2, \cdots, AB_n$ 两两互斥，所以

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)\right)=\sum_{i=1}^{n} P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

称公式 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$ 为全概率公式，它是概率论的一个基本公式。

在很多实际问题中 $P(A)$ 不易直接求得，但却容易找到样本空间的一个划分 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ ，且 $P(B_i)$ 和 $P(A|B_i)$ 或为已知，或容易求得，那么可根据全概率公式求出 $P(A)$，具体图示如图 1-10 所示。

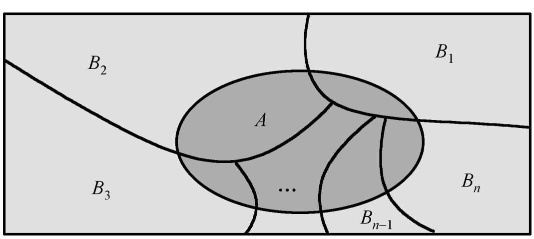

图 1-10

例 16　设某工厂有两个车间生产同一种产品，第 1 车间的次品率为 0.15，第 2 车间的次品率为 0.12，两个车间的产品混合放在同一仓库中，假定第 1，2 车间产量比为 2 : 3，今有一客户从仓库中随机提取一件产品，求该产品合格的概率。

解　设 $A=\{$提取的产品合格$\}$，$B_i=\{$提取的产品为第 i 车间生产$\}$，$i=1,2$ ，可验证 B_1、B_2

为一个完备事件组。由已知 $P(B_1)=\dfrac{2}{5}$，$P(B_2)=\dfrac{3}{5}$，$P(A|B_1)=0.85$，$P(A|B_2)=0.88$，根据全概率公式可得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.4\times0.85+0.6\times0.88=0.868$$

例 17 有两个口袋，第一个口袋中放有 3 个红球和 2 个蓝球，第二个口袋中放有 2 个红球和 4 个蓝球。现从第一个口袋中任取一球放入第二个口袋，再从第二个口袋中任取一球，求从第二个口袋中取出蓝球的概率。

解 设 $A=\{$从第二个口袋中取出蓝球$\}$，$B=\{$从第一个口袋中取出蓝球$\}$，则 $\bar{B}=\{$从第一个口袋中取出红球$\}$，由已知可得 $P(B)=\dfrac{2}{5}$，$P(\bar{B})=\dfrac{3}{5}$，$P(A|B)=\dfrac{5}{7}$，$P(A|\bar{B})=\dfrac{4}{7}$。

根据全概率公式可得

$$P(A)=P(B)P(A|A)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{22}{35}$$

三、贝叶斯公式

在全概率公式中，把事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 看作导致事件 A 发生的原因，$P(B_i)$ 称为先验概率，它反映出各种原因发生的可能性大小，一般在试验之前已知。但在实际应用问题中，有时是知道事件的结果 A 发生了，需要计算条件概率 $P(B_i|A)(i=1,2,\cdots,n)$，来分析事件 A 发生的主要原因。称 $P(B_i|A)(i=1,2,\cdots,n)$ 为后验概率，其计算方法可由如下所示的贝叶斯公式实现。

定理 1.2 设随机试验 E 的事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分，且 $P(A)>0$ 、$P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)} \tag{1.13}$$

证明 根据条件概率公式和乘法公式有

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_kA)}{P(A)}=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

上式由英国数学家贝叶斯给出，故称为贝叶斯公式，它是计算后验概率的基本公式。

例 18 一项血液化验以概率 0.95 将带菌病人检出阳性，但也有 1%的概率误将健康人检出阳性。设已知该种疾病的发病率为 0.5%，求已知一人化验结果为阳性的条件下，此人确实患有此种疾病的概率。

解 设 $B=\{$带菌$\}$，$A=\{$阳性$\}$。由已知 $P(B)=0.005$，$P(\bar{B})=0.995$，$P(A|B)=0.95$，$P(A|\bar{B})=0.01$，根据贝叶斯公式

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}=\frac{0.005\times0.95}{0.005\times0.95+0.995\times0.01}\approx0.323$$

例 19 某商品整箱出售，每箱 10 个，设箱中有 0，1，2 个次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1，一顾客随机地取一箱，商家允许开箱随机地取 2 个检查，若未发现次品，就买下，求买下的一箱确实无次品的概率。

解　用 B_0,B_1,B_2 分别表示箱中有 0，1，2 个次品，A 表示买下，则

$$P(B_0)=0.8,\ P(B_1)=0.1,\ P(B_2)=0.1$$

$$P(A|B_0)=\frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}=1,\ P(A|B_1)=\frac{C_9^2}{C_{10}^2}=\frac{36}{45},\ P(A|B_2)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_0)\cdot P(A|B_0)+P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)\\&=0.8\times1+0.1\times\frac{36}{45}+0.1\times\frac{28}{45}=0.942\end{aligned}$$

由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned}P(A_0|C)=\frac{P(A_0C)}{P(C)}&=\frac{P(A_0)\cdot P(C|A_0)}{P(A_0)\cdot P(C|A_0)+P(A_1)\cdot P(C|A_1)+P(A_2)\cdot P(C|A_2)}\\&=\frac{0.8\times1}{0.942}=0.849\end{aligned}$$

第四节　事件的独立性

一、两个事件的独立性

条件概率 $P(B|A)$ 关注某个事件 A 的发生会对另一个事件 B 的发生产生影响的概率。但在有些情况下，事件 A 的发生不会对另一个事件 B 的发生产生影响，会有 $P(B|A)=P(B)$，这样乘法公式就变成 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$。

例 20　设袋中装有 3 只白球，2 只黑球，每次从袋中任取一球，观察其颜色，用 A 表示事件“第一次取到黑球”，用 B 表示事件“第二次取到白球”。

进行不放回抽样时，$P(A)=\frac{3}{5}$，$P(\bar{A})=\frac{2}{5}$，$P(B|A)=\frac{3}{4}$，$P(B|\bar{A})=\frac{2}{4}$。

根据全概率公式，得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{13}{20}$。

这样有 $P(B|A)\neq P(B)$，$P(AB)=P(A)P(B|A)\neq P(A)P(B)$。

进行放回抽样时，$P(A)=\frac{3}{5}$，$P(B|A)=\frac{2}{5}=P(B)$。

这时有 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=P(A)P(B)$。

从此例可以看到，进行放回抽样时，事件 A 的发生不会对事件 B 的发生产生影响，它们的概率满足关系式 $P(AB)=P(A)P(B)$，我们用关系式 $P(AB)=P(A)P(B)$ 来定义两个事件的独立关系。于是有：

定义 1.8　设 A 与 B 是同一试验 E 的两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 是相互独立的，简称独立。

定理 1.3　如果事件 A、B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$、$\bar{A}$ 与 B、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。

证明　因为 $P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$。由于事件 A 与 B 相互独立，即 $P(AB)=$

$P(A)P(B)$，由此可得 $P(A\overline{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$。

于是得到事件 A 与 $\overline{B}$ 也相互独立。由 A,B 对称性知道 $\overline{A}$ 与 B 也相互独立，从而可得 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

二、多个事件的独立性

对于多个事件也可以考虑独立性的问题，首先有

定义 1.9 设 A,B,C 是同一试验 E 的三个事件，如果它们满足

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(BC)=P(B)P(C),\quad P(AC)=P(A)P(C)$$

则称事件 A,B,C 是两两相互独立的。

例 21 设有四张卡片，其中三张分别涂上红色、黄色、绿色，第 4 张同时涂上红、黄、绿三色。现在任取一张，以 A,B,C 分别表示取到的卡片上有红色、黄色、绿色的三个事件，考察 A,B,C 的独立性。

显然有 $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$，$P(AB)=P(BC)=P(AC)=1/4$，$P(ABC)=1/4$。因此有

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(BC)=P(B)P(C),\quad P(AC)=P(A)P(C)$$

A,B,C 是两两相互独立的，但是 $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$。因而我们有必要给出：

定义 1.10 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是同一试验中的 n 个事件，若对于其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1.14}$$

成立，则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的。

由定义可以得到以下两个推论：

(1) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$（$n\geqslant 2$）相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也是相互独立的；

(2) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$（$n\geqslant 2$）相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们各自的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立。

从此定义可知，多个事件相互独立时必然是两两独立的，但反之未必，上面例 21 就是反例。

在解决实际问题中，往往不是用定义去判断事件的独立性，而是根据问题的实际意义去确定事件的独立性，然后将形如式(1.14)的关系式作为事件独立的性质去运用。

例 22 设有 3 个电子元件，每个元件正常工作的概率均为 $r(0<r<1)$，且各元件是否正常工作相互独立，如图 1-11 所示。求由这 3 个元件分别以串联和并联方式形成的两个系统 I，II 的可靠性(即系统正常工作的概率)。

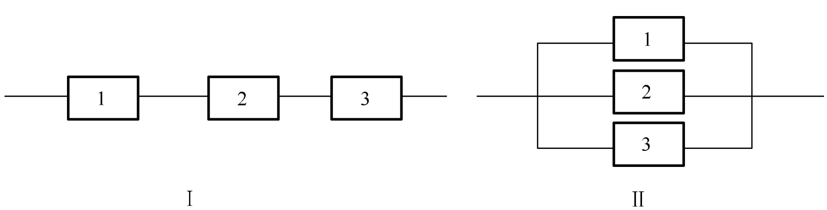

图 1-11

解　设 $A_k=\{$元件 k 正常工作$\}\ (k=1,2,3)$，$A=\{$系统Ⅰ正常工作$\}$，$B=\{$系统Ⅱ正常工作$\}$，则 $A=A_1A_2A_3$， $B=A_1\cup A_2\cup A_3$。由于 A_1,A_2,A_3 相互独立，所以

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=r^3$$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=3r-3r^2+r^3\end{aligned}$$

$P(B)$ 还可以如下计算

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P\left(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)$$

由于 A_1,A_2,A_3 相互独立，所以 $\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3}$ 也相互独立。

$$P(B)=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)=1-(1-r)^3=3r-3r^2+r^3$$

第五节　伯努利概型

一、独立试验系列

在前面的章节中，我们讨论的事件都是针对一个随机试验 E 而言的。为了得到随机现象的统计规律性，我们需要对它进行大数次的观测，从而得到随机试验系列 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$，如多次抛掷一颗骰子，观察每次出现的点数。事件独立性的进一步推广就是试验的独立性。若一个试验系列中，各次试验的结果相互独立，则称它为独立试验。最重要的独立试验是所谓的重复独立试验，即每次试验所可能发生的结果以及各事件的概率在各次试验中都保持不变，并且各次试验是相互独立的情形。在各种类型的重复独立随机试验中，最简单的情形为如下的伯努利概型。

二、二项概率公式

定义 1.11　在相同条件下，重复进行 n 次同一随机试验 E，每次试验的结果只有 A 和 $\overline{A}$ 两种可能，且 $P(A)=p(0<p<1)$， $P(\overline{A})=1-p$，n 次试验的结果相互独立，我们称这 n 次试验为一个 n 重伯努利试验或 n 重伯努利概型，简称伯努利概型。

在 n 重伯努利试验中，我们特别关注事件 A 恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)$。由于每次试验相互独立，n 次试验中事件 A 在指定的 k 个位置发生，在其余 $n-k$ 个位置不发生的概率为 $p^k(1-p)^{n-k}$。而为事件 A 指定 k 个发生位置的方法数是 $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$，因此事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k)=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}p^k(1-p)^{n-k}\ (0\leqslant k\leqslant n) \tag{1.15}$$

因此得到如下定理：

定理 1.4　在 n 重伯努利试验中，若记事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $P_n(k)$，则有

$$P_n(k)=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}p^k(1-p)^{n-k}\ (0\leqslant k\leqslant n)$$

由于$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$是二项展开式

$$[p+(1-p)]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

中的通项，故文献中也称计算概率$P_n(k)$的公式为二项概率公式。

例 23　从次品率为$p=0.1$的一批产品中，有放回抽取 6 次，每次取 1 件，分别求抽到的 6 件中恰好有 4 件次品以及至多有 4 件次品这两个事件的概率。

解　取一件产品有两种结果，要么是次品(A)，要么是正品$(\overline{A})$，因此取一件产品可看作一次伯努利试验，有放回取 6 次产品可看作$n=6$的伯努利概型。

问题归结为计算 6 次伯努利概型中事件A发生 4 次以及至多发生 4 次的概率，由定理 1.4 可得抽到的 6 件中恰好有 4 件次品的概率为

$P_6(4)=\binom{6}{4}(0.1)^4(0.9)^2=0.0012$；而抽到的 6 件中至多有 4 件次品的概率为

$$\sum_{i=0}^{4}P_6(i)=1-P_6(5)-P_6(6)=0.9999$$

例 24　设在每次试验中，事件A发生的概率均为p（$0<p<1$，且p很小，称为小概率事件)，试求在n次独立试验中事件A发生的概率。

解　设B_n=“在n次试验中事件A发生”，

A_i=“在第i次试验中事件A发生”，$i=1,2,\cdots,n$

因此$B_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$P(A_i)=p,i=1,2,\cdots,n$

由于n次独立试验意味着各次试验的结果是相互独立的，于是$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，从而

$$P(B_n)=P\left(\bigcup_{i=0}^{n}A_i\right)=1-P\left(\overline{\bigcup_{i=0}^{n}A_i}\right)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n})$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(A_i)=1-(1-p)^n$$

当$n\to\infty$时，$P(B_n)\to 1$。

这表明，概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的，即实际推断原理，但是在大量试验中几乎必然发生。因此在日常生活中不能轻视小概率事件。例如：一辆行驶在马路上的汽车出事故的可能性很小，然而大量汽车行驶在马路上出事故的可能性就显著增加。

习　题　一

1．试写出下列随机试验的样本空间：

(1) 抛掷三枚均匀硬币，观察正面H和反面T出现的情况；

(2) 同时掷两个骰子，观察它们的点数之和；

(3) 记录某商场某种商品一天内的销售件数；

(4) 将 1 米长的铁丝任意截成两段，观察两段的长度。

2．用事件 A,B,C 表示的运算表示关系式表示下列事件：

(1) A,B 都出现，C 不出现；

(2) 三个事件至少有一个出现；

(3) 三个事件都不出现；

(4) 不多于一个事件出现。

3．一批产品由 45 件正品和 5 件次品组成，从中任取 3 件，求其中恰有 1 件次品的概率。

4．一个口袋内装有 6 只球，分别标有号码 1～6，随机取出 2 只球，试求：

(1) 最小号码是 3 的概率；(2) 最大号码是 3 的概率。

5．把甲、乙、丙 3 名同学随机分配到 5 间宿舍中，假设每间宿舍最多可住 8 人，试求这 3 名同学住在不同宿舍的概率。

6．设一质点一定落在 xOy 平面内由 x 轴、y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成的三角形内，且落在此三角形内各点处的可能性相等，计算这个质点落在直线 $x=1/3$ 的左边的概率。

7．两人约定在 8 点到 9 点之间会面，先到者等候另一人 15 分钟后离开，求两人能够会面的概率。

8．已知 $A \subseteq B$，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，求：

(1) $P(AB)$；(2) $P(A\overline{B})$；(3) $P(\overline{A}\overline{B})$；(4) $P(\overline{A}B)$。

9．设 A 与 B 是两个事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$，试求 $P(A-B)$ 与 $P(B-A)$。

10．已知两个事件 A,B，且 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B\,|\,A)=0.8$，试求 $P(AB)$ 和 $P(\overline{A}\overline{B})$。

11．在 100 件产品中有 10 件次品，每次从这些产品中随机抽取 1 件，取后不放回，求第三次才取到次品的概率。

12．有甲、乙两个盒子，甲盒中放有 1 个红球和 2 个蓝球，乙盒中放有 2 个红球和 3 个蓝球。现从甲盒中任取一球放入乙盒，再从乙盒中任取一球，求从乙盒中取出蓝球的概率。

13．在无线通信传输中信源分别以 0.6 和 0.4 的概率发出“1”和“0”，由于受到某些干扰，发出的“1”接收方以概率 0.8 和 0.2 收到“1”和“0”，发出的“0”接收方以概率 0.9 和 0.1 收到“0”和“1”，求：(1) 接收方收到“1”的概率；(2) 当接收方收到“1”时，信源确实是发出“1”的概率。

14．某工厂有 A、B、C 三个车间，它们生产同一种产品，三个车间的产量之比为 4 : 3 : 5，三个车间出现次品的概率依次为 5%，4%，2%，现从全厂产品中抽取一件产品，得到了次品，求它依次是车间 A、B、C 生产的概率。

15．设事件 A 与 B 相互独立，且 $P(\overline{A}\overline{B})=1/9$，$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，求 $P(A),P(B)$。

16．甲、乙、丙三批产品的优质品率分别为 0.8，0.7，0.6，现从这三批产品中随机抽取 1 件，求下列事件的概率：(1) 3 件都是优质品；(2) 至少有一件是优质品；(3) 恰有一件是优质品。

17．有 6 个元件按图 1-12 所示的连接方式构成两个系统，每个元件的可靠性均为 $r(0<r<1)$，且各元件能否正常工作是相互独立的，求这两个系统的可靠性。

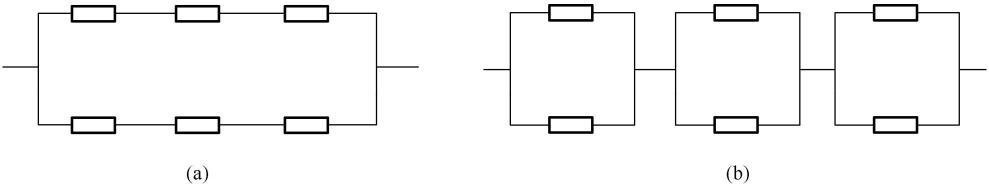

图 1-12

18．一射手的命中率为 0.7，现向指定目标射击，要使得命中目标的概率不少于 0.9，需要至少射击多少次？

19．甲、乙两名选手采用三局两胜的方式进行比赛，甲每局获胜的概率为 0.4，假定每局比赛的胜、负相互独立，且不出现平局，试求甲获胜的概率。

20．在 4 重伯努利概型试验中，已知事件 A 至少出现一次的概率为 0.5，求在 1 次试验中事件 A 出现的概率。

实用案例

蒙提霍尔三门问题

在日常生活中，我们常常先根据直觉下结论，然后再想原因。直觉靠谱吗？在心理学当中，这个问题当然不会有一个是或否的答案。直觉是系统的、有规律的体系；直觉在处理某些复杂问题上比理性更有效。归根结底，直觉是人性的一部分。但是，在很多情形下直觉往往是非理性的。

【案例】　参赛者会看见三扇关闭了的门，其中一扇的后面有一辆汽车，选中后面有车的那扇门可赢得该汽车，另外两扇门后面则各藏有一只山羊。当参赛者选定了一扇门，但未去开启它的时候，节目主持人开启剩下两扇门中的一扇，露出一只山羊。主持人其后会问参赛者要不要换另一扇仍然关上的门。问题是：换另一扇门是否会增加参赛者赢得汽车的概率？

【分析】　三门问题(Monty Hall problem)也称为蒙提霍尔问题或蒙提霍尔悖论，出自美国的电视游戏节目 let’s Make a Deal。问题名字来自该节目的主持人蒙提·霍尔(Monty Hall)。

这一问题在 20 世纪 90 年代曾在美国引起广泛和热烈的讨论，是典型的概率和直觉的博弈：凭直觉，很多人感觉换另一扇门不会增加参赛者赢得汽车的机会，这种感觉对吗？通过概率的计算是这样吗？

【解决方案】　改猜能增大赢得汽车的概率，从原来的 $\frac{1}{3}$ 增大为 $\frac{2}{3}$。这是因为，可记 $A=$“竞猜者选定的一扇门后面有汽车”，$B=$“开启剩下两扇门中的一扇后面山羊，另一扇未开启的门后面有汽车”，则依全概率公式 $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$。

而 $P(A)=\dfrac{1}{3}, P(B\mid A)=0, P(\overline{A})=\dfrac{2}{3}, P(B\mid\overline{A})=1$，因此

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

【结论】　也许有人从直觉的角度去理解，会对此答案提出质疑，认为在剩下未开启的两扇门后面有汽车的概率都是$\dfrac{1}{2}$，因此不需要改猜。

【点评】　该案例告诫我们：基于经验的直觉判断很多时候并不靠谱，通过“概率”这个指标去分析和推理才是合理的。