第 1 章　函数　极限　连续

数学的本质在于充分的思想自由。

——格奥尔格·康托尔（Georg Gantor，1845—1918）/德国数学家、集合论的创始者

数学就是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想增添光辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。哪里有数，哪里就有美。

——普罗克洛斯（Proclus，410—415）/古希腊哲学家、柏拉图学院院长

§1.1　函数：微积分的研究对象

人们的精神财富与物质财富的对数成正比。

——丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli，1700—1782）/瑞士数学家、数学物理学的奠基人

内容提要

集合可以用来作为这个数学大厦的基础，这个事实是康托尔的伟大发现。宇宙中的一切物质都在运动、发展和变化，因此，数学中研究变量与变量之间的关系是十分自然的事情。作为数学概念的函数只表述变量之间的那种确定的依赖关系。将自然规律数量化的关键一步是函数概念的引进。伽利莱·伽利略的落体运动定律，艾萨克·牛顿的万有引力定律、阿尔伯特·爱因斯坦的质能转换公式等都是用函数概念表达的。函数概念的诞生标志着近代科学的开始。分析的化身、瑞士数学家莱昂纳德·欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）于 1734 年首创了 $f(x)$ 作为函数的记号（用 i 表示 $\sqrt{-1}$、用 Σ 表示求和，等等），这种用法一直保持到今天，这是函数概念从解析表达式走向抽象表示的第一步。函数的概念就是下列谜语的谜底。

数集 A、B 两非空，对应法则驾彩虹。

A 中都是痴情数，嫁入 B 中唯一从。

我为美而死

作者：[美]艾米莉·狄金森（Emily Dickinson，1830—1886）

我为美而死——
当我刚适应坟墓时
就有人躺进了邻室——
他为真而死——
他和蔼地问，我为何而死？

我答道：“为了美。”——
他说：“我们是兄弟。”——
于是像亲戚，一夜相遇——
我们隔壁低语
直到青苔爬上了我们的嘴唇
盖住了——我们的名字——

1.1.1 悬链线

[例 1-1-1] 两手抓住一根均匀链子的两端，让其自然下垂，问它是何种曲线?

答案：悬链线。

[评注 1] 连接 A 、 B 两点的曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转，侧面积最小者必为悬链线 $y=a\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}(a\neq 0)$，即悬链面是仅有的极小旋转曲面。

[评注 2] 1690 年，瑞士数学家雅各布 · 伯努利（Jakob Bernoulli，1654—1705）提出悬链线问题，如图 1.1.1 所示。德国数学家莱布尼茨、荷兰天文学家克里斯蒂安·惠更斯（Christiaan Huygens，1629—1695）、约翰 · 伯努利（Johannes Bernoulli，1667—1748）及雅各布 · 伯努利于 1691 年分别独立地给出了问题的解，该曲线满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{s}{a}$$

其中， a 为常数， $s=$ 弧长 OP （图 1.1.1）①。他们导出此方程的办法是对链上 OP 部分做了代换。注意到 P 点切线方向的力是 F_1，水平方向的力是 F_0 ——它与 P 点无关时链处于平衡状态；此时用质量等于 OP 的一点 W 来代换 OP 弧（因此它与 s 成比例），可达到同样的力的平衡。比较这些力的方向和大小，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{W}{F_0}=\frac{s}{a}$$

利用 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$

可将微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{s}{a}$ 变换为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\dfrac{a}{\sqrt{1+z^2}}$，其中 $z=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

通过上述精巧的变换，伯努利将上述方程约化为方程②

$$\mathrm{d}x=\frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-a^2}}\Rightarrow y=a\mathrm{ch}\frac{x}{a}\quad(a\neq 0)$$

① 陈鼎兴．数学思维与方法：研究式教学．南京：东南大学出版社，2008.

② John Stillwell．数学及其历史．袁向东，冯绪宁译．北京：高等教育出版社，2011.

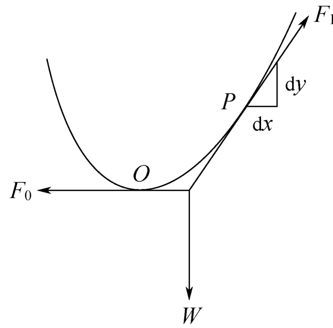

图 1.1.1　悬链线

虽然今天它只是微积分学或力学中的一道练习题，但在雅各布·伯努利把所有这些都做出来的时候，它却是新颖而困难的（见例 5-2-17）。

[评注 3] 双曲正弦函数 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$ 的反函数是 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$。函数存在反函数时可用于密码学中的加密变换和解密变换。

[评注 4] 德国数学家兰伯特（Lambert，1728—1777）于 1770 年首次系统地研究了双曲函数，并发现：$v=\mathrm{sh}x$ 与 $u=\mathrm{ch}x$ 是等轴双曲线 $u^2-v^2=1$ 上一点的坐标。

1.1.2　函数概念及其演变

1769 年，法国数学家达朗贝尔（Jean le Rond d'Alembert，1717—1783）首次导出了函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

法国数学家奥古斯坦·路易·柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789—1857）在 1821 年导入了更多的函数方程：$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$。

18 世纪上半叶的数学家都相信：一个函数处处有相同的表达式。但 1822 年，法国数学家、“诗人”约瑟夫·傅里叶（Joseph Fourier，1768—1830）在其经典文献《热的解析理论》（该书是一首伟大的数学诗，记载着傅里叶级数与傅里叶积分的诞生经过的重要历史文献）中用三角级数和的形式表示间断函数。例如，函数 $y=f(x)=\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\cdots$ 收敛到函数

$$y=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & 2n\pi<x<(2n+1)\pi\\ 0, & x=n\pi\\ -\dfrac{\pi}{4}, & (2n-1)\pi<x<2n\pi\end{cases}$$

在区间 $0<x<\pi$ 内的所有 x 的值，$\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 的值是相等的，但不能说 $\varphi(x)\equiv f(x)$。

[例 1-1-2] 德国数学家狄利克雷（Dirichlet，1805—1859）于 1829 年定义了一个函数：它把实数中的每一个有理数对应于 1，而把每一个无理数对应于 0，这便是著名的狄利克雷函数。这个函数具有四个特点：没有公式；没有图形；不连续；没有实际背景。

[评注 1] 任何正有理数都是该函数的周期，周期函数不一定有最小正周期。

[评注 2] 意大利数学家朱塞佩·皮亚诺（Peano，1858—1932）证明了，狄利克雷函数（处处不连续）可用下面的表达式解析地表示：

$$D\left(x\right)=\lim_{m\to\infty}[\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^n]。$$

[评注 3] 1837 年，狄利克雷提出了函数的定义，这个定义至今还在使用，他的定义如下：函数是一种定义关系，对于每一个自变量 x，对应一个且只有一个因变量 y，而不管这个对应是如何定义的。

[评注 4] 从微积分诞生到 19 世纪初，整个分析的基础就是连续函数和函数导数的概念，在近 200 年的时间内没有函数的精确概念。历史上第一个给出函数一般定义的是狄利克雷，这是微积分严格性的开始。

直到集合论诞生后，才出现现在的函数定义。函数的定义作为两个任意集合（未必是数集）的对应关系是由德国数学家理查德 · 戴德金（Richard Dedekind，1831—1916）于 1887 年给出的。

连续函数与可积函数不是一件事情，它们之间存在着一条鸿沟。例如，黎曼函数：当 x（$x=\frac{p}{q}$，最简分数）是有理数时候，$f(x)=\frac{1}{q}$（黎曼函数是不连续的）；当 x 是 0 或无理数时，$f(x)=0$（黎曼函数是连续的），但黎曼函数是可积的。

连续函数和可微函数之间也出现一条鸿沟。例如，1874 年德国数学家魏尔斯特拉斯构造了一个没有导数的连续函数。

三个重要函数（狄利克雷函数、黎曼函数、魏尔斯特拉斯函数）向人们暗示，微积分最基础的东西是实数。于是魏尔斯特拉斯提出了一个规划：首先逻辑地构造实数系；继而从实数系出发去定义函数概念、极限概念、函数的连续性、可微性、可积性和级数的收敛和发散。这个规划称为分析的算术化。任务繁重而困难，但在接近 19 世纪末的时候这个规划最终完成了，魏尔斯特拉斯规划的成功在数学基础方面产生了深远的影响。

1.1.3　函数的图象

点集 $C=\{(x,y)\,|\,x\in D,y\in f(x)\}$ 称为函数的图象。

[评注 1] 无限的拓荒者、集合论的奠基人康托尔正是从考虑超越数的存在，开始研究集合论的。1874 年，他给集合下了这样一个定义：把若干确定的有区别的（无论是具体的或抽象的）事物合并起来，看做一个整体，就称为一个集合（简称集），其中各事物称为该集合的元素（或成员）。集合可以用来作为整个数学大厦的基础，这个事实是康托尔的伟大发现。

一一对应，别开生面。1872 年戴德金定义：如果一个集合包含一个与它的元素一一对应的元素所组成的子集，那么这个集合就是无穷的。1873 年康托尔写信给戴德金说，他已经成功地证明了实数集能与 0～1 之间的数建立一一对应（如 $f(x)=\tan\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right):\left(0,1\right)\to\left(-\infty,+\infty\right)$），但实数集不能与自然数集一一对应。它是“不可数的无穷”，康托尔给这种集合取名为“连续统”，用符号 c 表示。这一刻，集合论诞生了。而像自然数集这样“可数的无穷”，他用了希伯来字母表的第一个字母阿列夫（aleph）和下标 0 表示。自然数集可以包含一个与它的元素一一对应的子集，因此整个集合与它的部分相等。当然，这与人们 2000 多年来信奉的欧几里得的公理“整体大于部分”是相悖的。“一一对应”是开启天堂之门的金钥匙，也是管理混乱无序的无限世界的铁律，荷兰著名数学家、数学教育家弗赖登塔尔（Freudenthal，190—1990）曾经如此说过。数学是依靠“就这样继续下去”与“一一对应”两大思想发展起来的。实际上，任何人都是依靠“就这样继续下去”的信念才能活下去的，再依靠“一一对应”使自己活得更充实。

[评注 2] 一幅图胜过千言万语，函数的简单作图法主要有以下几种：

（1）迭加，如 $y=x+\dfrac{1}{x}$。

（2）放大或缩小，如 $y=2\sin x$。

（3）平移，如 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-3$。

（4）翻转，如 $y=|\sin x|$。

（5）相乘，如 $y=\mathrm{e}^x\sin x$。

（6）旋转，如可将笛卡儿叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$ 绕坐标原点顺时针旋转 45°。

1.1.4　黎曼猜想

[例 1-1-3] 素数函数 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$，被定义为到 x 为止的素数的个数，例如，$\pi(2)=1$；$\pi(3)=2$；$\pi(100)=25$；$\pi(1000)=168$；$\pi(10^8)=5761455$。1859 年 8 月，没有什么名气的 32 岁数学家黎曼向柏林科学院提交了一篇论文，题为“论小于一个给定值的素数的个数”，在这篇论文的中间部分，黎曼做了一个附带的备注——一个猜测，一个假设。时至今日，在经历了 156 年的认真研究和极力探索之后，这个猜想仍然悬而未决。

[评注 1] 18 世纪末，法国数学家勒让德（Legendre，1752—1833）和高斯（Gauss，1777—1855）各自猜测：

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}\ (x\to+\infty)，\text{即}\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1$$

这个论断称为素数定理。素数定理是整数中最受关注的课题，从很多角度说，这一定理的证明及相关领域的研究都在哲学意义上的层面上揭示了一个复杂系统整体意义上的规律性和局部意义意义上的随机性。Dirichlet 定理（任何正整数无限等差数列，如果首项与公差互素，那么该数列中存在无限多个素数）令人信服地揭示了素数分布在整体意义上的均匀性。它告诉我们只要满足很微弱的必要条件，那么素数等同分布在整数序列的每个密度均匀的子序列中。1896 年，法国的数学家阿达玛（Hadamard，1865—1963）和比利时的瓦莱 · 普桑（Poussin，1866—1962）用复变函数的方法独立证明了上述**素数定理**（the Prime Number Theorem，PNT）。1949 年，在挪威出生的美国数学家赛尔伯格（Selberg, 1917—2007）和匈牙利数学家保罗 ·厄多斯（Paul Erdös，1913—1996）又各自用初等方法证明了素数定理。次年，赛尔伯格获得了菲尔兹奖。

[评注 2] $\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x)$ （$x\to+\infty$）（PNT 的改进版）积分对数函数 $\mathrm{Li}(x)$，它被定义为 $1/\ln t$ 的图象下方从 0 到 x 之间的面积，即

$\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\dfrac{\mathrm{d}u}{\ln u}+c_0$，其中 $c_0=\lim\limits_{\delta\to0}\left(\int_0^{1-\delta}\dfrac{\mathrm{d}u}{\ln u}+\int_{1+\delta}^2\dfrac{\mathrm{d}u}{\ln u}\right)$，$\mathrm{Li}(1.4513692348828\cdots)=0$。$\mathrm{Li}(x)$ 的斜率在任一点处都是 $1/\ln x$，这就是在 x 附近的一个整数是素数的概率。

[评注 3] 公式 $\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+O\left(\sqrt{x}\log x\right)$ 是黎曼猜想（1859 年）的算术等价形式。

2000 年 5 月 24 日，美国 Clay 数学研究院（Clay Mathematics Institute）公布的新千年七大数学难题中第一问题就是黎曼猜想。（见例 3-2-11）

[例 1-1-4] 取整函数 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，一般的，$[x]\le x<[x]+1$；

可以证明（拉格朗日定理）：$n!=\prod_{p\le n}p^{\alpha(p,n)}$，这里的连乘号表示对所有不超过正整数$n$的素数求积，$\alpha(p,n)=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^j}\right]$，例如，$20!=2^{18}\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$。

[评注 1] 取整函数是由德国数学家高斯在 1800 年研究椭圆内整点问题时引进的函数。大家知道，实数系是通过自然数系的逐步扩张获得的，实数取整又让实数回归到整数，这让我们找到了返璞归真的感觉。取整函数的文化解读就是“抓住本质，舍去次要”。$y=[x]$的图象解读可用唐朝诗人王之涣（Wang Zhihuan，688—742）的美丽诗句“欲穷千里目，更上一层楼”、“大鹏一日同风起，扶摇直上九万里”来形容。

[评注 2] $n!$的解析表达式是$n!=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$。詹姆斯 · 斯特林（James Stirling，1692—1770）公式：$m!=\sqrt{2\pi m}m^m\mathrm{e}^{-m}\mathrm{e}^{\theta_m}\left(0<\theta_m<\frac{1}{12m}\right)$，其$n$阶置换可用于语音的加解密。法国数学家亚伯拉罕 · 棣莫弗（Abraham de Moivre，1667—1754）于 1733 年用$n!$的近似公式导出正态分布的频率曲线，作为二项分布的近似。

[评注 3] 21 世纪的数学难题：$3x+1$问题。1937 年，德国数学家柯拉兹（Collatz，1910—1990）考虑了下列数论函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & \text{若}x\text{是偶数}\\[2mm] \dfrac{3x+1}{2}, & \text{若}x\text{是奇数}\end{cases}$$

他猜想，经过有限次迭代运算后，$f(x)$均归于 1。

1.1.5 问题探究：函数之美

[例 1-1-5]算术平均值与几何平均值有什么几何意义？求解方程：$\mathrm{e}^{\frac{x}{G}}=\left(\frac{x}{G}\right)x,\ G>0$。

解：算数平均值与几何平均值的几何意义如图 1.1.2 所示。

[评注 1]如图 1.1.3 所示，令$G=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，则$\mathrm{e}^{\frac{a_1}{G}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{a_2}{G}}\cdots\mathrm{e}^{\frac{a_n}{G}}\ge\left(\frac{\mathrm{e}a_1}{G}\right)\left(\frac{\mathrm{e}a_2}{G}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{e}a_n}{G}\right)$。

注意到：$G^n=\prod_{i=1}^{n}a_i$，$\therefore\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge G$。

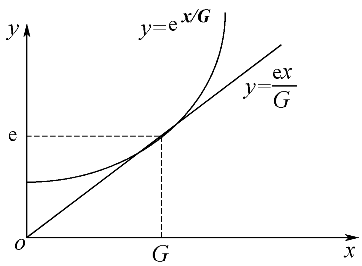

图 1.1.2 算术平均值与几何平均值的几何意义

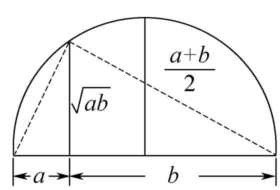

图 1.1.3 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$示意图

[评注 2]匈牙利数学家保罗 · 厄多斯给出了巧妙证明，他观察到对于任何$x\ge -1$，都有

$e^x \geq 1+x$，令 $G_n=\left(a_1a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$，$A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，以 $x_r=\dfrac{a_r}{A_n}-1$ 一一代入上述不等式，然后把 n 个不等式乘起来，可以得到

$$1=\prod_{r=1}^{n} e^{\frac{a_r}{A_n}-1} \geq \prod_{r=1}^{n} \frac{a_r}{A_n}=\left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n$$

推论 1：$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$。

推论 2：$n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$。

[例 1-1-6] 证明数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调有界。

[提示]利用几何平均与算术平均的关系证明 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的单调性：

$$x_n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left[\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1}=x_{n+1}$$

用二项式定理证明其有界性：$x_n<3$。利用 $\dfrac{1}{n!}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，得

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}<1+\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=1+2\left(1-\frac{1}{2}\right)<3$$

[例 1-1-7] $f(x)=xe^{-|\sin x|}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 为（　　）。

（1）有界函数（2）单调函数（3）周期函数（4）奇函数

答案：(4)。

分析 非有界，反正法：如果 $f(x)$ 有界，则 $|x|=|f(x)|e^{|\sin x|}\leq Me$，矛盾。

非单调：因为 $f(0)=0$，$f(\pi)=\pi$，$f(\dfrac{3\pi}{2})=\dfrac{3\pi}{2e}$，但 $f(0)<f(\pi)$，而 $f(\pi)>f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$。

[评注 1] 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数关于原点不对称，则该函数就不是奇函数或偶函数。

[评注 2] 定义在（-1，+1）上的任意函数 $f(x)$ 均可表示为一个奇函数与一个偶函数之和：$f(x)=\dfrac{[f(x)+f(-x)]}{2}+\dfrac{[f(x)+f(-x)]}{2}$。

[评注 3] $f(x)+f(-x)=0$ 是判断奇函的有效方法。

[例 1-1-8] 任何周期函数，必有最小正周期，对吗？

[反例] 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}=\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos m!\pi x)^n]$$

则任何正有理数都是该函数的周期，因为不存在最小的有理数，所以它没有最小正周期。

[例 1–1–9] 求复合函数表达式的代入法。

设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}$。

解：用归纳法 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$。

[评注] 在微积分中复合函数是一个重要概念。代入法就是将一个函数的自变量用另一个函数的表达式替代，适用于初等函数。

[例 1–1–10] 求复合函数表达式的分析法。

设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$，$g(x+1)=x^2+x+1$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

解 由 $g(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+1$，得

$g(x)=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$。

设 $f[g(x)]=g(x)$，$g[f(x)]=f^2(x)$ - $f(x)+1=\begin{cases}1, & x<0\\ x^2-x+1, & x\geq 0\end{cases}$。

[评注 1] 所谓分析法就是抓住最外层函数的定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数方法，适用于分段函数。

[评注 2] 函数概念的两个要素：定义域和对应法则，函数的表示法只与函数规则有关，而与用什么字母表示无关，即

$$f(x)=f(t)=f(u)$$

简称函数表示法的“无关特性”，这是由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法。

[例 1-1-11] 复合函数 $f\circ g=f[g(x)]$ 的定义域即为 $g(x)$ 的值域，对吗？

[反例] $f(u)=\sqrt{\dfrac{1}{2}-u}$，$u=\sin x$，$\sin x$ 的值域是 $[-1,\ 1]$，而 $f(u)$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi,\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right]$，$n\in\mathbf{Z}$。

[评注] 函数的复合是有条件的，并不是任何两个函数都能复合成一个复合函数，只有复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域 $D_{f\circ g}$ 与函数 $g(x)$ 的值域 Z_g 满足：$D_{f\circ g}\cap Z_g\neq\phi$（空集）。适当限制 x 的取值范围，f 与 g 才能构成复合函数。

[例 1-1-12] 设 a 和 b 互质，则 $\left[\dfrac{a}{b}\right]+\left[\dfrac{2a}{b}\right]+\cdots\left[\dfrac{(b-1)a}{b}\right]=?$

解：由图 1.1.4 得出答案为 $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$。

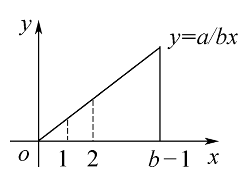

图 1.1.4　三角形中格点的总数

[例 1-1-13] 如何计算星期几？

[提示]如果将日期写成D=第“N”年“m”月“d”日，则星期数W_D可由下式给出：

$$W_D \equiv d+\left[\frac{(13m-1)}{5}\right]+y+\left[\frac{y}{4}\right]+\left[\frac{c}{4}\right]-2c \pmod 7$$

这里c，y由下式确定：

$$N=100\cdot c+y，0 \le y < 100$$

[评注 1]星期日=0，星期一=1，星期二=2，星期三=3，星期四=4，星期五=5，星期六=6。

[评注 2]由于闰年增加的一天定在 2 月 29 日，所以我们把 3 月算做这一年的第一个月，4 月算做这一年的第二个月，…，12 月算做第十个月，下年的 1 月算做这一年的第十一个月，下年的 2 月算做这一年的第十二个月。例如，2000 年 1 月 1 日是星期几？此时按规定：D=第“1999”年“11”月 1 日，所以$c=19$，$y=99$，$m=11$，$d=1$，由公式W_D可得

$$W_D \equiv 1+\left[\frac{142}{5}\right]+99+\left[\frac{99}{4}\right]+\left[\frac{19}{4}\right]-38 \equiv 6 \pmod 7$$

因此，这天是星期六。

[评注 3] 公式W_D的证明途径是这样的[①]：先给出N年 3 月 1 日，即“N”年“1”月“1”日的星期数W_N^0；然后求出“N”年“m”月“1”日的星期数$W_{N,m}^0$；最后求出“N”年“m”月“d”日的星期数W_D。这里$W_N^0 \equiv 3-2c+y+\left[\frac{y}{4}\right]+\left[\frac{c}{4}\right]-2c \pmod 7$，$W_{N,m}^0 \equiv W_N^0+\left[\frac{(13m-11)}{5}\right] \pmod 7$，$W_{N,m}^0 \equiv W_N^0+\left[\frac{(13m-11)}{5}\right] \pmod 7$，$W_D \equiv W_{N,m}^0+(d-1) \pmod 7$。

[评注 4] 公式W_D实用于 1582 年 10 月 15 日（格里哥利历）以后的日期是星期几。

1582 年，在罗马教皇格里哥利十三世（Gregory ⅩⅢ，1502—1585）主持下，完成了对基督教世界沿用了一千多年的儒略历的改历工作，颁行了格里哥利历。它与儒略历的主要不同有两点：一是去掉了 10 天，将公元 1582 年 10 月 5 日直接变成 15 日；二是逢百之年只有能被 400 整除的年份才算闰年。我国从 1912 年开始采用格里哥利历，但同时保留我国自己的阴阳合历，即农历。

1.1.6　e 是所有数的老师[②]

英国数学家约翰·纳皮尔（John Napier，1550—1617）考察基于乘除法的几何级数与基于加减法的算术级数之间的对应关系于 1614 年发明了对数（Logarithm，这个名称源自两个古希腊语单词，Logos（理性，或比例、比）和 Arithmos（数）），早于微积分的建立，但是无理数 e 的发现肯定与微积分计算直接相关。因此，可以断定 1614 年纳皮尔发明的是以 10 为底的常用对数（log：数与数之间总保持相同的比列），自然对数则出现在微积分之后。

历史上纳皮尔曾用积分来定义对数函数，例如，双曲线$xy=1$与x轴之间在区间$[1，b]$所围的面积（在区间$[1，b]$中插入$n-1$个分点x_1，x_2，…，使得x_0，x_1，x_2，…，x_{n-1}，x_n成等比数列：$x_0=1$，$x_n=b$，其公比为$q=\frac{x_k}{x_{k-1}}(1 \le k \le n)$（具体参见§5.1），得出了

① 潘承洞，潘承彪．初等数论．3 版．北京：北京大学出版社，2013.

② 张广祥．数学思想十讲．北京：科学出版社，2013.

对数函数的定义：

$$\ln b=\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

由于$\int_1^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_1^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{x_1}^{x_1\cdot x_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{x_1x_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即可得乘积的对数变成对数之和。

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=(\ln x)'\big|_{x=1}=1$，以 e 为底取指数$\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}$，于是得到无理数 e 的定义：$\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.71828182\cdots$

1914 年，第一次世界大战的阴云笼罩着英伦三岛，对数发明 300 周年的庆典依然在纳皮尔的故乡爱丁堡举行。领主莫尔顿挥动着手臂，发表了盛情并茂的演说："对数的发明如黑夜中一道闪电划破长空，没有任何预兆。它未曾借助其他已知的智慧结晶，也未沿袭现存的数学理念，那么突然、孤立而又出人意料地出现了。①"意大利著名物理学家、天文学家伽利略甚至声称："给我空间、时间和对数，我们可以创造一个宇宙。"这话说到无以复加的程度，可见纳皮尔发明的对数影响有多大。

e 的亲密有理数：$\mathrm{e}\approx 2\frac{232}{323}=2.7182662\cdots$。最美公式$\mathrm{e}^{i\pi}+1=0$见例 3-2-13。

e 与自然数列的亲密关系：$\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)}{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}}$，就是说 e 是前$n$正整数的算术平均值与几何平均值之比的极限。

e 和 π 是两兄弟。π 是两个长度之比（圆的周长与直径），而 e 是双曲线$xy=1$、与横坐标轴之第一个单位区间所夹区域的面积。π 较多地与初等函数有关，而 e 较多地与微积分有关。

e 是时间的见证。现在，越来越多的人都知道：考古界确定古生物（包括植物和动物）历经年代的最有力工具是精确测定生物体某种特定元素的含量，因为这些元素的含量随时间的变化会以指数规律衰减，即$N(t)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$式中，$N_0$是$t=0$（即生物体刚死亡）时的含量；而$N$代表$t$时刻的含量；特别重要的是衰减快慢由参数$\lambda$来决定，而$\lambda$只与特定的物质有关，与温度、环境等因素均不相关，所以我们只需已知N_0和测量到的N，根据特定的物质参数λ，即可确定古生物的存在时间 t，而$t=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$。

e 是自然律的精髓，其形象代言人是对数螺线$\rho=\mathrm{e}^{a\theta}$："纵使变化，依然故我"。微观的放射性原子的衰变率及辐射总量，宏观的人口增长的基本规律，物理学声波在空中传播的强度测定，金融帐户的复利计算，细胞繁殖的具体描绘，宇宙大爆炸的理论阐述，这些自然界和社会中的大量事物，看起来毫无关联，但因为它们有生有灭、有降有升，在依存中对抗，在对抗中妥协，在妥协中共生，联系着内在也联系着外在，联系着过去也联系着未来，虽然有各自不同的情况，有各自不同的表达式，但 e 是它们共同的基座。

随机性和 e 的奇妙联系。概率论表明，当许多随机触发的事件分布在有限时空间隔中时，就可以料到 e 会出来。例如，平均选出多少个正小数相加才能使和大于 1？答案是 e。再如，大约一个世纪前，统计学家拉迪斯劳斯 · 博尔特基维茨（Ladislaus Bortkiewicz）对普鲁士军队

① 张宏时．数学如诗．苏州：苏州大学出版社，2015.

中的死亡情况所进行的经典研究，发现 e 潜伏在如因遭马踢而死亡的风险那样的随机事件中。根据多篇研究报告，普鲁士士兵都面临着虽然小但并非完全不可能的因遭马踢而死亡的风险，数量为平均 1.64 年死亡一例。博尔特基维茨发现，在 200 篇报告中，有 109 篇根本没有死亡记录。现在，用 200 除以 109，把得到的商取 1.64（因遭马踢而死亡的平均间隔年数）次幂，结果为 2.71，误差在 e 的真值得 1%范围内。

设定一个整数 n，然后不按顺序随机写下 1～n，那么没有配对的概率就是

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

其极限就是 $\frac{1}{\mathrm{e}}\approx 0.37$，37 是一个神秘数字，如在前 37%产品中选择最优惠的产品（但不购买），再接下来的产品中有比这个产品更优惠的就买下来。那么此时赢的概率是 37%。这个策略是最优策略；其他策略再复杂也不可能使赢的概率更高。

e 究竟是谁发现的？有的说是欧拉，e 取自欧拉（Eluer）的第一个字母，以纪念他做出的杰出贡献。这当然是一种“合情”的推测；有的说，e 作为自然对数的底，可能取自“指数”（Exponent）的第一个字母。这也是一种合理的推断。e 只是其名，表达式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 才是其实（设年初本金为 1 元、年利率为 100%、一年内计算复利共 n 次，则年终的本金变为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$）。18 世纪，欧拉首次用字母 e 表示自然对数的底，一直沿用至今。

e 与“易”有异曲同工之妙。e 是自然律的主角，“易”含三义：简易、变易、不易。自然指数函数的导数即它自身，竟与“以不变应万变”这一中国古老禅宗《周易》的经典思想暗暗相符。

一个没有几分诗人才气的数学家永远不会成为一个完美的数学家。

——[德]卡尔·魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1818—1897）/现代分析学之父

数学的无穷无尽的诱人之处在于，它里面最棘手的悖论也能盛开出美丽的理论之花。

——戴维（Humphry Davy，1778—1829）/英国物理学家、化学家

§1.2　数列的极限：微积分的奠基石

内容提要：

极限（Limit）是微积分学的基本概念之一，用于描述变量在某一变化过程中的变化趋势。体现“人类精神的最高胜利”的微积分奠基在极限这块基石上。随着微积分学的产生，极限概念被明确提出，但含糊不清，直至 19 世纪，才由柯西、魏尔斯特拉斯等人的工作，以及实数理论的建立，才使极限理论有了严密的理论基础之上。

极限语言近于诗。有如美国著名音乐家约翰尼·默瑟（Johnny Mercer，1910—1976）的诗句“强调的是肯定，去掉的是否定。你筑起篱笆围上了确定。”与用“$\varepsilon-N$ 语言”描述的数列极限的定义“$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$”的文学意境是相同的。

数列是一种特殊的函数，数列极限与函数极限有以下关系：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，当且仅当每一个以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 时，有 $f(x_n)\to A(x_n\neq x_0)$。这可以将函数的极限问题转化为数列极

限问题来考虑。在某些情况下，这种方法是很有用的。

每天进步一点一点就是完美：

$(1-0.02)^{365}=0.0006$；

$(1-0.01)^{365}=0.0255$；

$1^{365}=1$；

$(1+0.01)^{365}=37.783$；

$(1+0.02)^{365}=1377.4$；

……

1.2.1　曲边梯形的面积

[例 1-2-1]求抛物线 $y=x^2$、x 轴、直线 $x=1$ 所围成的曲边三角形的面积 S，如图 1.2.1 所示。

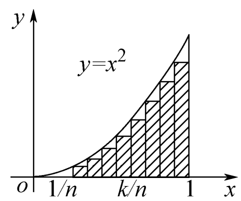

图 1.2.1　$y=x^2$ 示意图

[提示] $S\approx x_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{3}$。

[评注 1] 数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界。

[评注 2] 该曲边三角形绕 x 轴旋转一周的体积：（见 5.2.8）

$$V\approx y_n=\sum_{i=1}^{n}\pi\left(\frac{i}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}=\frac{\pi}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{\pi}{30}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\to\frac{\pi}{5}。$$

[评注 3] 1638 年，业余爱好者中的数学王子费马注意到以下公式：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1}=\frac{n(n+1)}{2\times1}，\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2\times1}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3\times2\times1}$$

费马（Pierre de Fermat，1601—1665）用类比方法得到：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)}{3\times2\times1}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4\times3\times2\times1}，\quad\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

1.2.2　割圆人间细，方盖宇宙精

公元 3 世纪北魏的刘徽（Liu Hui，225—295）提出的“割圆术”，就是现代微积分的极限思想，即用圆内接正多边形的面积来逼近圆面积。具体来讲，刘徽的“割圆术”把极限的动态变化过程及其归宿描述得十分透彻和传神：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与园周合体而无所失矣”，他用圆内接 192 边形的周长与直径之比作为“π”的近似值，得到了π≈3.14 的世界首创的近似值；用圆内接 24576 边形的周长与直径之比，对 9 位数做 12 次加减乘除乃至开方的大容量计算，方能得出 3.1415926<π<3.1415927。刘徽的思想经 5 世纪南北朝的祖冲之（Zu Chongzhi，429—500）及其儿子祖暅发扬光大，证明了圆周率介于 3.1415926

与 3.1415927 之间（祖率 355/113，疏率 22/7），祖冲之是世界上第一个把π的准确值计算到小数点后七位的人，而欧洲的奥托（RALENTINUS Otto，约 1550—1605）于 1573 年才算出此结果，在π的近似的国际竞赛中领先了近千年之久。祖冲之祖籍河北涞源县，熏陶于既重视科学技术与工程技术，又有深厚的文化修养的家庭环境之中，形成了崇尚科学技术又儒雅细致的思想品格。可惜的是，《缀术》六卷在 11 世纪早已失传。祖冲之在当时的计算工具非常简陋（还没有算盘）的情况下，用何种方法达到世人所未达到的精度？其推测有三种方法。

推测一："调日法"[李俨（Li Yan，1892—1963），钱宝琮（Qian Baocong，1892—1974）中国数学史家]，$\dfrac{a}{b}<\dfrac{(a+c)}{(b+d)}<\dfrac{c}{d}$，取$\dfrac{a}{b}=3.14=\dfrac{157}{50}$（后人称之为"徽率"），$\dfrac{c}{d}=3.14286=\dfrac{22}{7}$，用上式 9 次，得$\dfrac{(157+22\times 9)}{(50+7\times 9)}=\dfrac{355}{113}$（祖率）。

推测二："连分数"法[华罗庚（Hua Luogeng，1910—1985），中国数学家]。

$3.14=\dfrac{157}{50}=3+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}$，$3.1416=\dfrac{3927}{1250}=3+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{11}$，$\dfrac{355}{113}=3+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{16}$。

推测三："外推法"。单位圆的内接正n边形的面积$S_n=n\times\frac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\pi$。同时可以证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{\sin 2x-\dfrac{1}{2}\sin 4x}=\dfrac{1}{4}$，这样就可以得到$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{4n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=\dfrac{1}{4}$。

$$\begin{aligned}S-S_{2n}&=\left(S_{4n}-S_{2n}\right)+\left(S_{8n}-S_{4n}\right)+\left(S_{16n}-S_{8n}\right)+\cdots\\&\approx\left(S_{4n}-S_{2n}\right)+\frac{1}{4}\left(S_{4n}-S_{2n}\right)+\frac{1}{4^2}\left(S_{4n}-S_{2n}\right)+\cdots\\&=\frac{4}{3}\left(S_{4n}-S_{2n}\right)\approx\frac{1}{3}\left(S_{2n}-S_n\right)\end{aligned}$$

这样就得到π的近似公式

$$\pi\approx S_{2n}+\frac{1}{3}\left(S_{2n}-S_n\right)$$

[评注 1] π越精确，文明程度也越高。德国数学史家康托尔记述了从远古到 1799 年全部数学史的《数学史讲义》一书中就指出："历史上一个国家所算得的圆周率的准确程度，可以作为衡量这个国家当时数学发展的水平的指标。"刘徽和祖冲之在圆周率方面的成就是中国古代数学最辉煌的篇章之一。1767 年，德国数学家兰伯特严格证明π是无理数；1882 年，德国数学家林德曼（Lindemann，1852—1939）从$1+\mathrm{e}^{i\pi}=0$出发证明π是超越数，即π不是有理系数多项式的根，从而为解决"化圆为方"问题提供了关键步骤，其中法国数学家夏尔·埃尔米特（Charles Hermite，1822—1901）在 1873 年证明了 e 的超越性。1706 年伦敦天文学家梅钦（Machin，1686—1771）提出公式$\pi=16\arctan\dfrac{1}{5}-4\arctan\dfrac{1}{239}$，并用幂级数展开的手段，突破了π的百位小数大关；英国人向克斯（W.Shanks，1812—1882）花了 15 年时间用梅钦公式计算出π的 707 位（1853），这项记录一直保持到 1945 年，这一年弗格森（D. F. Ferguson）发现向克斯的结果在 527 位之后是错误的。他用当时的台式计算机在 1947 年将π的近似值计算到 808 位，所用的公式是$\dfrac{\pi}{4}=3\arctan\dfrac{1}{4}+\arctan\dfrac{1}{20}+\arctan\dfrac{1}{1985}$；2006 年，一位日本退休工程师原口证（Akira Haraguchi）创下世界记录，一口气背诵出π小数点后的 10 万位数字；2011 年 10

月 16 日，日本的工程师近藤茂利在家中组装电脑计算 π 到了十万亿（10^{13}）位，等等。英国格拉斯哥大学（Glasgow）的权威经典物理学家开尔文爵士（Lord Kelvin，1824—1907）曾说："数学家觉得 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ （见例 5-2-13）是很显然的，就像外行人看待 $2\times 2=4$ 那样。"

[评注 2] 月球背面有 4 座环形山以中国古代科学家命名，分别是战国魏国天文学石申（约公元前 4 世纪），中国东汉科学家、文学家、思想家张衡（Zhang Heng，78—139），元代的天文学家、数学家、水利专家和仪器制造家郭守敬（Guo Shoujing，1231—1316）和祖冲之。

[评注 3] 用微积分基本定理（见§5.2）可以证明：$\frac{22}{7}-\pi=\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$（第 29 届普特南数学竞赛试题，1968 年 12 月 7 日）。

$$\because\ x^4(1-x)^4=x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)\left(x^2+1\right)-4$$

$$\therefore\ \int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{4}{6}x^5+x^5-\frac{4}{3}x^3+4x-4\arctan x\right)\bigg|_0^1=\frac{22}{7}-\pi$$

1.2.3 极限的定性和定量描述

1．定性描述

给定数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，x_n 有确定的变化趋势 —— 与某一实数 a 无限接近，则说数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

[评注 1] 所谓无限接近应包括两层含义：一是充分接近，二是一致接近。充分接近就是当 n 充分大时，x_n 与 a 要多近就有多近，即无论给出多少小的正数，总可以找到一点 x_n，使得 x_n 与 a 之差小于这个数；一致接近是指甚至可以找到这样的点 x_n，使得排在 x_n 后的所有无穷多个点与 a 的距离均小于这个数。现在为了描述充分接近，给出一个量 ε，用以表示 x_n 与 a 的接近程度，即总有 x_n 满足 $|x_N-a|<\varepsilon$，而为了说明要多近就有多近，ε 必须是可以任意给定的；为了描述一致接近，再引入一个量 N，表示当给定一个接近程度 ε 时，数列中排在第 N 位以后的所有点 x_n 均满足上述不等式关系。可见，ε 总是任意给定的，处于主动地位，而 N 只有在 ε 在给定之后，才有可能被确定下来，处于被动地位。如此的 N 是否存在也就意谓着一个数列是否存在极限。

[评注 2] $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示，只要 n 充分大，x_n 与 a 就可以接近预先任意给定的程度，即 $|x_N-a|<\varepsilon$ 可以小于预先任意给定的正数 ε。但"x_n 越来越接近 a"一般理解为 $|x_n-a|$ 单调减少。

[评注 3] 在为微积分奠定理论的漫长过程中，法国数学家达朗贝尔也做出了重要贡献。他提出用极限概念代替牛顿的"最初和最终比"。他称一个量为另一个量的极限，就是后者趋向于前者，比任何给定的量都更接近于前者，但不等同于前者。他认为求方程的导数只是要求出方程中所包含的两个变量的差分之比的极限，他还给出了判别正项级数的"达朗贝尔法"。

[评注 4] 数学分析的奠基人、法国数学家柯西对数学的最大贡献是在微积分中引进了清晰和严格的表述与证明方法，使微积分摆脱了对于几何与运动的直观理解和物理解释，他对微积分的见解被普遍接受并沿用至今。柯西首先把无穷小量简单地定义为一个以零为极限的变量，

最早证明了极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的存在性，并在其中第一次使用极限符号“ lim ”。柯西的著作朴实无华，有思想，有创见。

定义 1.2.1：$\{x_n\}$ 为柯西列 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 n，$m>N$ 时有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$。

例如，数列 $y_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，由于 $y_{2n}-y_n=\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}>\dfrac{n}{n+n}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\{y_n\}$ 不是柯西列。

定理 1.2.1：$\{x_n\}$ 为柯西列 $\Leftrightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 收敛。

2．定量描述

如何让学生从柯西对极限的语言描述去理解魏尔斯托拉斯的 $\varepsilon-N$ 的描述？

（1）给定 $\varepsilon>0$，总能找到自然数 N，使得 $|x_N-a|<\varepsilon$。

[评注] 若 n 项以后的项与 a 误差很大，则不能反映出 x_n 无限接近 a。

（2）给定 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，就有 $|x_N-a|<\varepsilon$。

[评注] 对更小的误差 $\varepsilon_1>0$，若不能保证数列 x_n 自某项以后各项与 a 的误差小于 ε_1，也不能反映出 x_n 无限接近于 a。

定义 1.2.2（$\varepsilon-\delta$ 定义）：对于一个实数序列

$$x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n,\cdots$$

如果 a 是一个实数且有以下性质，我们就称 a 是以上数列的极限，或数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a：对任意一个正数 ε，必有一个自然数 N 存在，使当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$。我们用符号 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 来代表。

[评注] 德国数学家魏尔斯特拉斯的主要贡献在于函数论和分析方面，被誉为“现代分析之父”，“魏尔斯特拉斯的严格”成了“精细推理”的同义词，引进了现在通用的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，他还构造了一个著名的处处不可微的连续函数（1872 年 7 月 18 日）：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos\left(b^n\pi x\right)$ $\left(0<a<1,\ ab>1+\dfrac{3}{2}\pi,\ b\text{为奇数}\right)$，为分析学的算术化做出了重要贡献。（见例 2-1-12）数学家同我们其余的人一样都是人，为什么他们总是如此学究式地精确和如此不近人情地完美呢？正如魏尔斯特拉斯所说，“确实，一个没有几分诗人气质的数学家，永远不会成为一个完美的数学家”。答案就是：就诗一般完美这一事实而言，一个完美的数学家将会是某种数学上的不可能性。

3．极限的几何意义

数列 $\{x_n\}$ 以 a 的极限 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\{x_n\}$ 至多只有有限项落在区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 之外。

[评注 1] 数学符号的读音：ε [epsilon]，δ [delta]，π [pi]，$\sum$ [sigma]。数学符号“ $\forall$ ”与“ $\exists$ ”由德国数学家弗雷格（Frege，1848—1925）在 1884 年出版的《数论的基础》一书首先使用。“ $\forall$ ”表示“任意给定”，“ $\exists$ ”表示“存在”；“ ∞ ”这个符号由英国数学家约翰 · 沃利斯（John Walls，1616—1703）在其著作《无限的算术》（1656 年）中首先使用；匈牙利数学家黎斯（Riesz，1880—1956）在 1905 年引入符号“ $\to$ ”，表示连续地趋向一个极限；从 19 世纪活跃到 20 世纪的英国数学家哈代（Hardy，1877—1949）写下了 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)=0$，这种写法与现在所使用的是相同的。

[评注 2] 极限$\varepsilon-N$的定义，蕴含着“有限与无限”对立统一的辩证思想，这是到目前为止人类找到的用“可以操作的有限”去认识“无法接触的无限”的最有效的数学方法。

[例 1-2-2] 证明：$x_n=(-1)^n$是发散的。

证明：取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，对任意$a\in\mathbf{R}$，$\forall$正整数N，都存在$2n>N$，使x_{2n}与x_{2n+1}不会落在邻域$\left(a-\dfrac{1}{2},a+\dfrac{1}{2}\right)$内，即落在外边的有无穷多项。

[评注 1] 有界数列不一定有极限。

[评注 2] 数列$\{x_n\}$不存在极限，正好呈现一种对称美：存在某个$\varepsilon_0>0$，对于任意的正整数N，存在n_0，$m_0>N$，有$\left|x_{n_0}-x_{m_0}\right|\geqq\varepsilon_0\Leftrightarrow$数列$\{x_n\}$无极限。

数列$\{x_n\}$不以a的极限$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，$\exists n_N>N$，使得$|x_{n_N}-a|\geqq\varepsilon_0$（即落在区间$(a-\varepsilon_0，a+\varepsilon_0)$之外有无穷多项）。

[例 1-2-3] 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\alpha=0\quad(0^\circ<\alpha<180^\circ)$。

[评注] 蓦然回首，我们发现一个无穷等比数列收敛，公比是-1～+1 之间的实数，都恰好对应0°～180°中某个角的余弦值。为什么等比数列又称几何数列？或许这里就能给出解释。

4．收敛数列$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的有界性、唯一性及保号性

有界性：必存在常数$M>0$，使得$|x_n|\leqq M\quad(n=1，2，\cdots)$。

唯一性：如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，则$a=b$。

保号性：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<0$，则必存在$N$，当$n>N$时，有$x_n<0$。

定理 1.2.2 单调有界定理：单调增加有上界序列或单调减少有下界序列均存在极限。

定理 1.2.3 魏尔斯特拉斯-波尔查诺（Weierstrass-Bolzano）**定理**：

设$\{a_n\}$是一个有界序列，即存在实数M及$x\leqq M$，$\forall x\in\boldsymbol{D}$使得

$$M\leqq a_n\leqq N，\forall n=1，2，\cdots\cdots$$

则$\{a_n\}$有一了序列$\{a_{n_k}\}$，当$k\to\infty$时，$\{a_{n_k}\}$有极限。

[例 1-2-4]　数列$\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，$\cdots$的极限是多少？

解：令$X_n=\sqrt{2+\mathrm{X}_{\mathrm{n-1}}}$，则$X_n$单调增加且$X_n<2$，所以当$n\to\infty$时$X_n$的极限存在，令$X_n\to A$，则$A=\sqrt{2+A}$，$A=2$或$A=-1$（舍去）。

[评注 1] $X_n-X_{n-1}=\sqrt{2+\mathrm{X}_{n-1}}-\sqrt{2+\mathrm{X}_{n-2}}=\dfrac{X_{n-1}-X_{n-2}}{\sqrt{2+X_{n-1}}+\sqrt{2+X_{n-2}}}$。

[评注 2] $\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\dfrac{\pi}{8}$，$\cdots$，$X_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\to2(n\to\infty)$。

[评注 3] 不证明存在性是会有问题的，反例：$b_n=q^n\left(q>1\right)$，令$b_n\to b$，则$b=bq$，$q=1$错！

[例 1-2-5] 证明：序列的极限存在，并求极限A。

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x^2{}_n+3a)}{(3x^2{}_n+a)}，a\geqq0，x_0>0$$

证明：由 $A=\dfrac{A(A^2+3a)}{(3A^2+a)}$，得 $A=\sqrt{a}$。

设 $x_0^2<a$，那么，$\dfrac{x_n^2+3a}{3x_n^2+a}>1$，即 $x_{n+1}>x_n$，

$x_{n+1}^2=\dfrac{x_n^2(x^2{}_n+3a)^2}{(3x^2{}_n+a)^2}=f\left(x_n^2\right)$，

$f(z)=z\left(\dfrac{z+3a}{3z+a}\right)^2$，$f'(z)=3\dfrac{(z+3a)}{(3z+a)}\left(\dfrac{z-a}{3z+a}\right)^2>0$，

$f''(z)=\dfrac{96a^2\left(z-a\right)}{\left(3z+a\right)^4}$。

所以，$x_{n+1}^2=f(x_n^2)<f(a)=a$。所以，当 $x_0^2<a$ 时，$\{x_{n+1}\}$ 单调增加并收敛于 $\sqrt{a}$。同理，当 $x_0^2>a$ 时，$\{x_{n+1}\}$ 单调减少并收敛于 $\sqrt{a}$。

[评注] 对函数 $f(x)=x^2-a(a>0)$ 应用关于方程求根的哈雷（Halley，1656—1742）迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f\left(x_n\right)f'\left(x_n\right)}{2\left[f'\left(x_n\right)\right]^2-f''\left(x_n\right)f\left(x_n\right)}$$

可产生求平方根 $\sqrt{a}$ 的迭代序列

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x^2{}_n+3a)}{(3x^2{}_n+a)}$$

定理 1.2.4 夹逼准则：若 $X_n\le Y_n\le Z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=A<\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=A$。

[例 1-2-6] 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\quad(|a|>1)$。

证明：对于任意正整数 m，当 n 充分大时，总有 $n!=m!(m+1)\cdots n>\dfrac{m!}{m^{n-m}}$。

取 $m>|a|$，则 $\dfrac{|a|}{m}<1$，$0\le\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|<\dfrac{m^m}{m!}\left(\dfrac{|a|}{m}\right)^n$，注意到 $\left(\dfrac{|a|}{m}\right)^n\to 0\quad(n\to\infty)$。

[例 1-2-7] 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdot\cdot\dfrac{2n-1}{2n}=0$。

[分析] 令 $x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdot\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$，$y=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\cdot\cdot\dfrac{2n}{2n+1}$，则 $0<x^2<xy=\dfrac{1}{2n+1}$。

定义 1.2.3（$\varepsilon-\delta$ 定义的改进）：

设 $\{a_n\}$ 是无穷数列，如果有一个无界不减数列 $\{D_n\}$：$|a_n|\le\dfrac{1}{D_n}$（对一切自然数 n），则称 $\{a_n\}$ 是无穷小数列。

数列极限概念的非 $\varepsilon-\delta$ 语言定义：对于数列 $\{a_n\}$，如果有一个实数 a，使 $\{a_n-a\}$ 是无穷小数列，则称 $\{a_n\}$ 以 a 的为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

[例 1-2-8] 已知数列 $\{a_n\}$ 以 0 为极限，令 $s_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$n=1，2，3，\cdots$

求证：$s_n\to 0\quad(n\to\infty)$。

证明：$\because a_n \to 0 \quad (n\to\infty)$，故有无界不减数列$\{D_n\}$，使$|a_n| \le \dfrac{1}{D_n} = d_n$，取$m<\sqrt{n}$便有

$$|s_n| \le \frac{d_1+d_2+d_3+\cdots+d_m}{n} + \frac{n-m}{n}d_{m+1} \le \frac{m}{n}d_1 + d_m \le \frac{d_1}{\sqrt{n}} + d_m$$

[评注] 利用数列$\dfrac{1}{D_n}=d_n$的单调性，用代数符号代替了逻辑运算。

1.2.4 问题探究：美是一切事物生成和发展的本质特征

[例 1-2-9] 反正切的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}+\cdots+\arctan\frac{1}{2n^2}\right)=?$$

答案：$\dfrac{\pi}{4}$。注意使用公式$\arctan\dfrac{1}{2n-1}-\arctan\dfrac{1}{2n+1}=\arctan\dfrac{1}{2n^2}$，$n=1$，2，3，…

[评注] 美在奇异。数论大师赛尔伯格（Selberg，1917—2007）曾经说，他喜欢数学的一个动机是以下优雅漂亮的格列固里-莱布尼茨（Gregory-Leibniz）公式：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

这个公式实在美极了（见 5.2.5），奇数 1、3、5、…这样的组合可以给出圆周率，对于一个数学家来说，此公式正如一幅美丽图画或风景。

中国著名数学家、伟大的几何学家、快乐数学提倡者陈省身（Chern Shiing-shen，1911—2004）：有限与无限之转化，观古今于须臾，抚四海于一瞬（陆机《文赋》）。这是宇宙之美啊!

著名美学家、翻译家朱光潜（Zhu Guangqian，1897—1986）：美是一切事物生成和发展的本质特征。美是心借物的形象来表现情趣，是合规律性与合目的性的统一。

[例 1-2-10] 穷竭法。阿基米德（Archimedes，公元前 287—公元前 212）《论螺线》的命题 24：螺线（$\rho=a\theta$）第一圈与极轴所围的面积等于$\dfrac{4}{3}\pi^3a^2$。

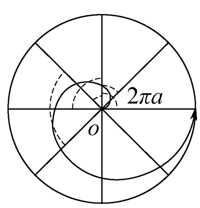

图 1.2.2 $\rho=a\theta$的示意图

解：设半径为OA的圆的面积为S，将圆n等分，设螺线和OA所围成的s'，它同样被分成n个部分，每个部分都夹在一个外接扇形和一个内接扇形之间，如图 1.2.2 所示。

$$\sum_{1}^{n-1}\text{内接扇形面积} < S' < \sum_{1}^{n}\text{外接扇形面积}$$

用微积分基本公式（见§5.2），这个面积就是

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\theta^2\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{4}{3}a^2\pi^3$$

[评注 1] 阿基米德将他的螺线定义为当一条射线围绕着其一端的固定点匀速转动时，一个点顺着这条直线以均匀径向速度移动时的轨迹。

[评注 2] 阿基米德是古希腊力学家和数学家。他发展了前人的穷竭法，把面积或体积看做有重量的东西，由许多长条或薄片组成，然后用已知面积或体积去“ 平衡 ”这些元素，找出重心和支点，并利用杠杆原理来求出这些面积或体积。他的工作蕴含了微积分的思想。利用这些方法，他求出了抛物线弓形、螺线的面积，圆球体积等。穷竭法的核心思想是“ 无限接近 ”，这是一种蕴涵着“ 潜无穷 ”的极限思想，旨在解决“ 芝诺（Zeno of Elea，公元前 490—公元前

430）悖论”引发的第一次数学危机而首创“穷竭”原理的是古希腊伟大的数学家欧多克索斯（Eudoxus，公元前 400—公元前 347），后被阿基米德发扬光大为阿基米德公理：“$\forall a>0, b>0, \exists n\in\mathbf{N}^+$，使得 $na>b$”，欧多克索斯和阿基米德被认为是近代极限理论的先驱。关于杠杆原理，阿基米德曾说过“给我一个支点，我能撬动整个地球”。

[例 1-2-11] 符号$[\cdot]$和$\{\cdot\}$。设$[x]$表示不超过x的最大整数（见例 1-1-4），记号$\{x\}\equiv x-[x]$表示x的小数部分，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}$（1977 年莫斯科铁道运输工程学院入学试题）。

分析：$\left(2+\sqrt{3}\right)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\left(\sqrt{3}\right)^k 2^{n-k}=A_n+B_n\sqrt{3}$。

其中，对应偶数k的那些项之和记为A_n，对应奇数k的那些项之和记为$B_n\sqrt{3}$。可见A_n、B_n都是整数。去掉第一项A_n，不影响小数部分$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}=\left\{B_n\sqrt{3}\right\}$。

为了进一步求$\left\{B_n\sqrt{3}\right\}$的表达式，打开思路，考虑对偶问题，我们有

$$0<\left(2-\sqrt{3}\right)^n=A_n-B_n\sqrt{3}\to 0\quad(n\to\infty)$$

这说明A_n不仅是比$B_n\sqrt{3}$大的整数，而且是与$B_n\sqrt{3}$无限接近的整数。故$B_n\sqrt{3}$的小数部分

$$\left\{B_n\sqrt{3}\right\}=B_n\sqrt{3}-\left(A_n-1\right)=1-\left(A_n-B_n\sqrt{3}\right)\to 1\ （当\ n\to\infty）$$

[例 1-2-12]设$\{x_n\}$是由天体力学中的开普勒方程所确定的递推数列：

$$x_{n+1}=q\sin x_n+a\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

其中，x_0是任意给定的实数，a，q为常数且$0<q<1$。证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$存在；（2）$l$是方程$x=q\sin x+a$的根。

证明：（1）由$|x_{n+1}-x_n|=q|\sin x_n-\sin x_{n-1}|$

$$=q\left|2\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right|\le q|x_n-x_{n-1}|\le\cdots\le q^n|x_1-x_0|$$

可得

$$|x_{n+p}-x_n|\le|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$\le\left(q^{n+p-1}+q^{n+p-2}+\cdots+q^n\right)|x_1-x_0|=\frac{q^n}{1-q}\left(1-q^p\right)|x_1-x_0|<\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|$$

可知$\{x_n\}$是柯西列，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$存在。

（2）进一步，由$|\sin x_n-\sin l|\le|x_n-l|$可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin l$，在递推式中两边取极限得$l=q\sin l+a$。

[评注] 德国数学家、天文学家开普勒深信上帝是按照完美的数的原则创造世界的，所以根本性的数的和谐，即天体音乐，乃是行星运动的真实的可以发现的原因。这是鼓舞开普勒辛勤工作的真正动力。开普勒将奇妙的想象力、洋溢的热情、获取观测资料的无限耐心与对事实细节的极度服从结合起来。在获得了第谷 · 布拉赫的观察资料，并且自己做了更多的观测后，开普勒提出了天体运动三定律，据此被誉为“天空的立法者”。

[例 1-2-13] **阿基米德力学试探法**：阿基米德用力学的方法得到许多辉煌的成果，成为近代积分学的先驱。例如，抛物弓形$ABCD$的面积是等底等高的三角形ABC面积的$\frac{4}{3}$，如图 1.2.3

所示。

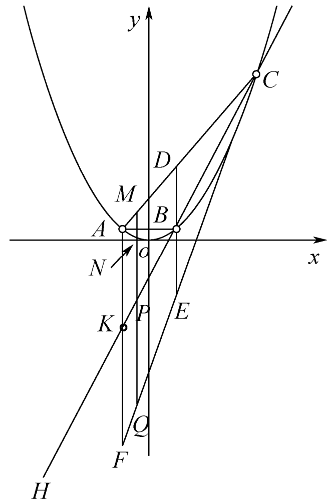

图 1.2.3　阿基米德力学试探法

已知：① 过 AC 中点 D 且平行于 y 轴的直线必过弓形的顶点 B（即在 ABC 弧上与 AC 距离最远的点）。

② B 是 DE 的中点；作 $AF // Oy$，过 C 点的切线 CF 于 F，延长 CB 交 AF 于 K，则 K 是 AF 的中点。取 $KH = KC$，过 AC 上任意点 M 作 $MQ // Oy$，交 CK 于 P，交 CF 于 Q。

③ $MQ : MN = AC : AM = KC : KP$。

④ 过 B 的切线必平行于 AC。

阿基米德的发现如下：

① 假想各线段的重量与长度成正比。

② 因为 HP 是一根以 K 为支点的杠杆，如果将 MN 放在 H 点，就可以和位于杠杆的另一端 P 的 MQ 平衡，P 是 MQ 的重心，此关系对任意 M 都成立。

③ 弓形可看做由许多这种 MN 线段构成的，而 ΔAFC 由许多 MQ 线段所组成。

若将整个弓形都放在 H 上（以 H 为重心），就可以和 ΔAFC 平衡。将 ΔAFC 的重量可以看做集中在其位于中线 KC 的重心上，而重心与 K 的距离是从 K 到 C 的 $\frac{1}{3}$ 处，故弓形的面积是 ΔAFC 的 $\frac{1}{3}$。

④ $\Delta AFC = 4\Delta ABC$（两个三角形同底，$AC = 2DE = 4DB$，高也是 4 倍）。

由此可以看出阿基米德解决问题的技巧多么高超，方法的妙用存乎一心，不能不令人叹为观止。

[例 1-2-14] 阐述数学等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ 所表达的数学思想或数学问题。

庄子（Zhuangzi，约公元前 369—公元前 286），中国战国时期哲学家，道家学派的代表人物。庄周名篇《庄子 · 天下》里面惠施（Hui Shi，约公元前 370—公元前 310）就讲：“一尺之捶，日取其半，万事不竭。”捶即为木杖。这个命题反应了“其小无内”的思想，即再小的物质也可以无限地分割，亦即物质是由无限小的单位组成的。此命题是说，一尺长的杖，取去一