

姓名: _____ 学号: _____ 所在院系: _____ 所在班级: _____

第 9 章 向量代数与空间解析几何同步练习

9.1 向量和向量运算

1. 设 $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, 用 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 表示 $2\vec{u} + 3\vec{v}$ 。

9.2 空间直角坐标系

2. 已知 $\vec{AB} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, A 点的坐标为 $(0, 5, 3)$, 求 B 点的坐标。

3. 求 $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ 的模、方向余弦和与其同方向的单位向量。

4. 已知向量 \vec{a} 的模为 5, 与 x 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 与 y 轴正向的夹角是 $\frac{\pi}{3}$, 求向量 \vec{a} 。

姓名: _____ 学号: _____ 所在院系: _____ 所在班级: _____

9.3 标量积、向量积与混合积

5. 已知 \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. 求 $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

6. 已知 $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

7. 求向量 $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ 和 $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ 的夹角。

8. 已知三角形 ABC 三顶点坐标 $A(1, 2, 3)$, $B(2, 0, 6)$, $C(0, 3, 1)$, 求三角形 ABC 面积。

9. 已知 $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$, $\vec{b} = \{1, -1, 3\}$, $\vec{c} = \{1, -2, 0\}$, 求 $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$.

10. 求与向量 $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ 和 $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ 都垂直的单位向量。

姓名:_____ 学号:_____ 所在院系:_____ 所在班级:_____

11. 证明点 $A(1,1,1)$, $B(10,15,17)$, $C(4,5,6)$, $D(2,3,3)$ 共面。

12. 求以 $A(2,4,7)$, $B(3,5,5)$, $C(3,4,4)$, $D(1,1,1)$ 为顶点的四面体体积。

13. 设 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 求以 $\vec{a}+2\vec{b}$ 和 $\vec{a}-3\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积。

14. 设 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 求向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角。

9.4 空间曲面

15. 将 zx 平面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程。

姓名: _____ 学号: _____ 所在院系: _____ 所在班级: _____

16. $x^2 + y^2 = 4$ 在平面直角坐标系中和空间直角坐标系中各表示怎样的几何图形?

9.5 空间曲线

17. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + z = 1 \end{cases}$ 在 xy 平面上的投影的方程。

18. 求曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$ 在三坐标平面上的投影。

19. 把下列曲线方程化为参数方程:

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$; (2) $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$; (3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 。

姓名: _____ 学号: _____ 所在院系: _____ 所在班级: _____

9.6 平面

20. 求下列各平面的方程:

(1) 过点 $(0, -3, 3)$ 且与平面 $3x + 2y + 4z - 5 = 0$ 平行;

(2) 过点 $M_1(0, 1, 2)$, $M_2(-1, 2, 2)$ 和 $M_3(1, -1, 4)$;

(3) 过点 $(1, -2, 4)$ 且垂直于 x 轴.

21. 求下列各平面的方程:

(1) 过两点 $P(1, 1, 2)$, $Q(2, -1, 2)$ 且平行于向量 $\vec{n} = \{3, 2, 1\}$;

(2) 过一点 $M(1, 3, 2)$ 且平行于两向量 $\vec{n}_1 = \{1, -1, 1\}$, $\vec{n}_2 = \{3, 1, 2\}$;

姓名: _____ 学号: _____ 所在院系: _____ 所在班级: _____

(3) 通过 x 轴且垂直于平面 $5x - 4y + 2z + 3 = 0$;

(4) 过点 $M_1(2, -1, 1)$ 和 $M_2(3, 1, 2)$ 且平行于 y 轴。

22. 求点 $P(2, -1, -1)$ 到平面 $16x - 12y + 15z - 4 = 0$ 的距离。

23. 已知平面 π 与平面 $x + 2y - 2z + 1 = 0$ 的距离是 5, 求平面 π 的方程。

24. 判断下列各对平面间的位置关系:

(1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$ 和 $4x - 6y + 10z + 3 = 0$;

(2) $3x - y - 2z - 5 = 0$ 和 $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

姓名:_____ 学号:_____ 所在院系:_____ 所在班级:_____

(3) $2x+3y-z-3=0$ 和 $-4x-6y+2z+6=0$ 。

9.7 直线

25. 求空间直线的方程:

(1) 过原点且与直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{5}$ 平行;

(2) 过点 $(2,0,1)$ 且垂直于平面 $x+3y-5z=0$;

(3) 过点 $(1,2,0)$ 与点 $(2,1,3)$;

(4) 过点 $(-2,1,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ 。

姓名: _____ 学号: _____ 所在院系: _____ 所在班级: _____

26. 转化直线方程 $\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ 为对称式方程和参数式方程。

27. 求直线 $x - 2 = y - 3 = \frac{z - 4}{2}$ 与平面 $2x - y + z - 6 = 0$ 的夹角。

28. 求过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程。

9.8 综合例题

29. 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影。

30. 求过点 $P(1, -2, 3)$ 和直线 $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0 \\ x + 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ 的平面方程。

姓名: _____

学号: _____

所在院系: _____

所在班级: _____

9.9 二次曲面

31. 画出下列曲面所围图形:

(1) $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

(2) $x^2 + y^2 = a^2$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$ 。

第 9 章 向量代数与空间解析几何提高题

1. 求通过点 $P(2, -1, -1)$, $Q(1, 2, 3)$ 且垂直于平面 $2x + 3y - 5z + 6 = 0$ 的平面方程。

2. 求过直线 $L: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$ 并且与平面 $x - 4y - 8z + 12 = 0$ 交成二面角为 $\frac{\pi}{4}$ 的平

面方程。

3. 求过点 $M(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直并相交的直线方程。

4. 求直线 $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 l_0 的方程, 并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程。

