第 1 章

离散时间信号与系统

本章学习信号和信号处理的概念，了解离散时间信号的定义、表示方法及常用的典型序列；学习有关周期序列的概念，掌握有关序列的移位、翻转、和、积、累加、差分、时间尺度变换、卷积和等运算方法；了解用单位脉冲序列的移位加权和表示任意序列的方法、系统的输入/输出描述法、与系统有关的因果性和稳定性；熟悉线性时不变系统及其性质，能够用递推法解线性常系数差分方程。

1.1　信号和信号处理

信号是传递信息的函数（或序列），函数的图像称为信号的波形。信号通常是一个或几个自变量的函数。仅有一个自变量的函数称为一维信号，否则称为多维信号。本书仅研究一维数字信号处理的理论与技术。

信号的自变量和函数值的取值有多种形式，通常把信号视为时间的函数，即把时间视为信号的自变量，而代表其他物理量（如距离、速度、温度、压力、电压、电流等）随自变量变化而变化的量视为函数（因变量）。注意在讨论信号的有关问题时，“信号”与“函数（或序列）”两个词常互相通用。

生活中经常遇到的信号有语音信号、音乐信号、图片信号和视频信号等。例如，语音信号和音乐信号表示空间上某个点的空气压力，它是时间的函数。黑白图片是光强度的一种表示，它是两个空间坐标的函数。电视中的视频信号由称为帧的图像序列组成，是一个有三个变量的函数，包括两个空间坐标和一个时间坐标。可见，信号在人们的日常生活中扮演了非常重要的角色。

大多数信号都是自然产生的，也可以通过人工合成或计算机仿真产生。

信号携带着信息，各类信号只有经过一定的处理才能具有实用价值。信号处理就是对信号进行分析、变换、综合、识别等加工，以达到提取有用信息和便于利用的目的。信息提取的方法取决于信号的类型及信号中信息的性质。处理信号的设备用模拟部件，则称这种处理方法为模拟信号处理，其英文缩写为 ASP。若系统中的处理部件用数字电路，信号也是数字信号，则这样的处理方法称为数字信号处理，其英文缩写为 DSP。数字信号处理是用数值计算的方法对信号进行处理的一门科学。数字信号和模拟信号可以相互转换。

信号处理涉及信号的数学表示，以及用以信息提取所执行的算法。信号可以用自变量的原始域中的基本函数表示，或者用变换域中的基本函数表示。信息提取处理同样可以在信号的原始域或变换域中进行。

1.1.1　信号的特征与分类

通常根据自变量的特征及函数的定义域，将信号定义成不同的类型。根据信号的自变量是否连续或离散，相应地定义信号是连续信号或离散信号。信号可以是一个实值函数或一个复值函数。

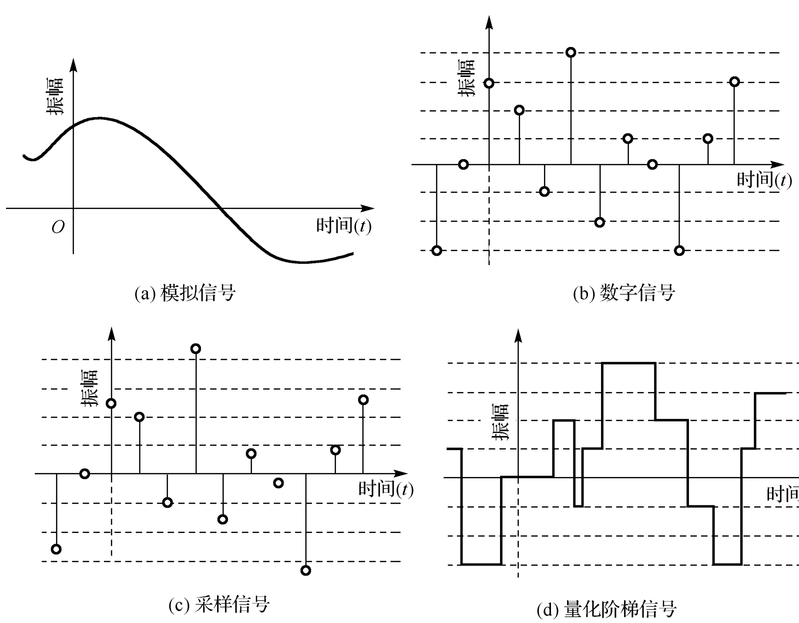
根据信号来源的多少，可以定义一个信号源产生的信号为一维信号或标量信号；由多个源产生的信号为多维信号，或向量信号。向量信号也称为多通道信号。

日常生活中接触最多的是语音信号和图像信号。语音信号是以时间为自变量的典型一维（1-D）信号的例子，而图像信号是二维（2-D）信号的典型例子。如照片等图像信号，是以两个空间变量为其两个自变量。例如，黑白视频信号的每一帧是空间的两个离散变量的函数，它是一个二维图像，而每一帧在离散时间上按顺序出现，因此，黑白视频信号是以两个空间变量和一个时间变量为自变量的三维（3-D）信号。常见的彩色视频信号则是由表示红、绿、蓝（RGB）三原色的三个三维信号和一个时间变量组成的多维信号。

在指定的自变量上的信号值称为信号的幅度。习惯上把幅度随着自变量的变化称为波形。

通常把时间作为自变量，若自变量是连续的，则该信号称为连续时间信号（或时域连续信号）。若自变量是离散的，则该信号称为离散时间信号（或时域离散信号）。连续时间信号定义在每个时刻，而离散时间信号定义在离散时刻。因此，一个离散时间信号实质上是一个数字的序列。

在规定的连续时间范围内，信号的幅值可以取连续范围内的任意值，或者说具有连续幅值的连续时间信号称为模拟信号。在日常生活中会经常遇到的信号多为模拟信号，通常以自然方式产生。话筒转换声音得到的语音信号就是模拟信号的一个典型例子。用有限个数字表示的离散幅值的离散时间信号称为数字信号，即数字信号是自变量取离散值，其幅度也被量化且被编码的离散时间信号。与数字信号一样自变量取离散值，但是具有连续幅值的离散时间信号称为抽样数据信号（或采样数据信号，有时也称采样信号）。从这个意义上可以说数字信号是量化的抽样数据信号。另外，具有离散振幅值的连续时间信号称为量化阶梯信号。这四种类型的信号如图 1-1 所示。



(a) 模拟信号　(b) 数字信号

(c) 采样信号　(d) 量化阶梯信号

图 1-1　四种类型的信号

常用的表示信号的方法有公式法、图示法和集合法。用公式法表示信号的特点是从数学表达式中可以清楚地看到它的函数关系。一维连续时间信号的自变量通常用 t 表示。而对于一维离散时间信号，离散的自变量通常用 n 表示。例如，$x(t)$表示一个一维连续时间信号，而 $x(n)$表示一个一维离散时间信号。离散时间信号中的每个成员 $x(n)$称为样本。离散时间信号一般是通过对原始的连续时间信号以相同的时间间隔采样产生的。用图示法表示信号的特点是比较直观，用集合法表示信号的特点是便于数

据的存储和用计算机进行分析。图示法和集合法的缺点相似，不便于用数学工具进行分析。

二维连续时间信号的两个自变量是空间坐标，通常用 x 和 y 表示。例如，黑白图像的强度可以表示为 $u(x,y)$。彩色图像由表示红、绿、蓝三原色的三个信号组成，其强度可以表示为 $\boldsymbol{u}(x,y)=[r(x,y),g(x,y),b(x,y)]^{\mathrm{T}}$。

目前大量使用的计算机图像（数字图像）是二维离散信号，它的两个自变量通常用离散化的空间变量 m 和 n 描述，可将数字图像通常用 $v(m,n)$表示。黑白视频序列是三维信号，可以用 $u(x,y,t)$表示，这里用 t 表示时间变量，x 和 y 分别表示两个空间变量。彩色图像信号是向量信号，可以用红、绿、蓝三原色的三个信号表示。

信号的分类不限于上述方法，还可以根据信号的其他特征进行。例如，根据信号是否有唯一确定的描述对信号进行分类，由一个完全定义的过程（如通过一个数学表达式或规则，或通过查找表）来确定的信号称为确定信号；反之，由随机方式产生且不能在时间上预测的信号称为随机信号。本书主要涉及离散时间的确定信号的处理。由于实际的离散时间系统是用有限字长来存储信号并用数学运算的方法对信号进行处理的，所以需要分析有限字长效应对离散时间系统性能的影响。因此，将某些信号表示为随机信号，用统计的方法进行分析会比较方便。

1.1.2　典型的信号处理运算

如前所述，信号处理就是对信号进行分析、变换、综合、识别等加工，以达到提取有用信息和便于利用的目的的过程。模拟信号的处理通常都在时域进行，离散时间信号的处理既可以在时域进行，也可以方便地在频域进行。但不论何种情况，信号处理所需的运算是通过一些基本运算的组合来实现的。值得注意的是，尽管在某些应用中，这些运算可以离线实现，但它们的实现通常是实时的或准实时的。

1．时域的基本运算

三个最基本的信号运算是乘、延时和相加。

乘运算将信号与一个正的或负的常数相乘，也称标乘。例如，若 $x(t)$是一个模拟信号，则乘运算产生信号 $y(t) = ax(t)$，其中 a 是标乘常数。习惯上将标乘常数的幅度大于 1 的运算称为放大，相乘的常数称为增益；而将标乘常数的幅度小于 1 的运算称为衰减。

延时运算产生一个原信号延时后的复制信号。例如，若 $y(t)=x(t-t_0)$ 是 $x(t)$延时 t_0 后的信号，其中 t_0 通常被假定为一个正数。若 t_0 是负数，则对应的运算是一个超前运算。

许多应用需要通过两个或多个信号的运算来生成一个新信号。例如，$y(t)=x_1(t)+x_2(t)-x_3(t)$是三个模拟信号 $x_1(t)$、$x_2(t)$和 $x_3(t)$通过相加产生的信号。而两个信号 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的相乘产生信号 $z(t)=x_1(t)x_2(t)$。

积分和微分运算。模拟信号 $x(t)$的积分生成信号 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)\mathrm{d}t$，而 $x(t)$的微分得到信号 $w(t)=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$。

两个或多个基本运算的组合可实现更为复杂的信号运算。例如，连续时间信号 $x(t)$的连续傅里叶变换 $X(\mathrm{j}\Omega)$定义为

$$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t \tag{1-1}$$

$X(\mathrm{j}\Omega)$称为 $x(t)$的频谱。

2．滤波

滤波的主要目的是根据指定的要求改变组成信号的频率成分，是使用最广泛的复杂信号处理运算之一，实现滤波运算的系统称为滤波器。

设用冲激响应 $h(t)$来表示滤波器，则滤波器对应于输入 $x(t)$的输出 $y(t)$可以用卷积积分描述为

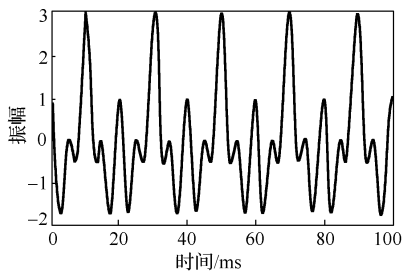
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-2}$$

这里假设在输入信号作用时，滤波器是零初始条件的松弛状态。在频域中，式（1-2）可表示为

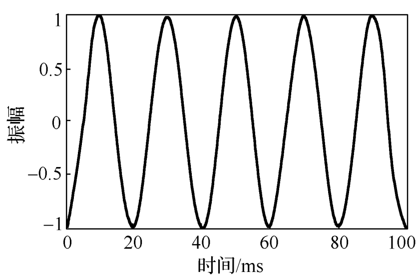
$$Y(\mathrm{j}\Omega)=H(\mathrm{j}\Omega)X(\mathrm{j}\Omega) \tag{1-3}$$

式中，$Y(\mathrm{j}\Omega)$、$X(\mathrm{j}\Omega)$和 $H(\mathrm{j}\Omega)$分别表示 $y(t)$、$x(t)$和 $h(t)$的连续时间傅里叶变换。

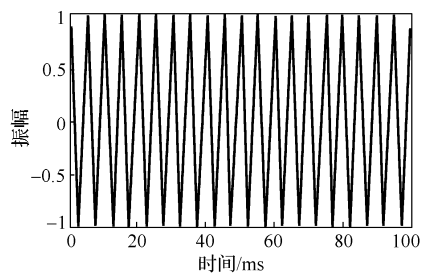
滤波器允许通过的频率范围称为通带，而被滤波器阻止通过的频率范围称为阻带。一般将滤波器定义为低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器、带阻滤波器、陷波器、梳状滤波器等。低通滤波器允许低于某个特定频率 f_{p}（称为通带截止频率）的所有低频成分通过，并阻止所有高于 f_{s}（称为阻带截止频率）的高频成分通过。与低通滤波器相对应，高通滤波器允许所有高于某个通带截止频率 f_{p} 的高频成分通过，并阻止所有低于阻带截止频率 f_{s} 的低频成分通过。带通滤波器允许两个通带截止频率 f_{p1} 和 f_{p2} 之间的所有频率成分通过，其中 $f_{\mathrm{p1}}<f_{\mathrm{p2}}$，并阻止所有低于通带截止频率 f_{p1} 和高于通带截止频率 f_{p2} 的频率成分通过。带阻滤波器与带通滤波器相对应，阻止两个阻带截止频率 f_{p1} 和 f_{p2} 之间的所有频率成分通过，允许所有低于通带截止频率 f_{p1} 和高于通带截止频率 f_{p2} 的频率成分通过。图 1-2(a)显示了一个由频率分别为 50Hz、100Hz 和 200Hz 的三个正弦成分组成的信号。图 1-2(b)～(e)显示了上面 4 种类型的滤波运算经适当选择截止频率后得到的滤波结果。



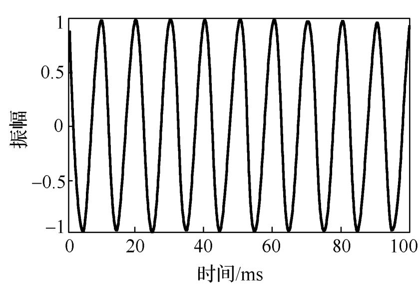
(a) 频率为50Hz、100Hz和200Hz的三个正弦成分组成的信号



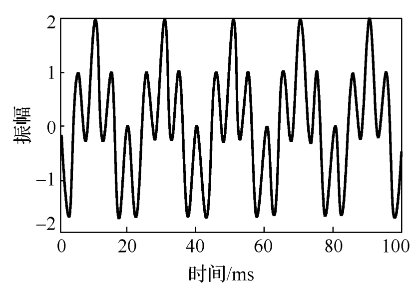
(b) 截止频率为80Hz的低通滤波器输出



(c) 截止频率为150Hz的高通滤波器输出



(d) 截止频率为80Hz和150Hz的带通滤波器输出



(e) 截止频率为80Hz和150Hz的带阻滤波器输出

图 1-2　由三个正弦成分组成的信号及 4 种类型滤波器的滤波结果

陷波滤波器是用来阻止单个频率分量的带阻滤波器。有多个通带和多个阻带的滤波器称为多频带滤波器。梳状滤波器就是设计用来阻止某个低频的整数倍频率成分的多频带滤波器。

例如，在我国由电力线辐射的电磁场产生的噪声表现为污染期望信号的一个 50Hz 的正弦信号，从被污染的信号中恢复出期望信号的一种有效方法是通过陷波频率为 50Hz 的陷波器。另一种常见情况是应用中期望的信号占据从直流（DC）到某个频率 f_L 的低频带，并被一个频率成分大于 f_H 的高频噪声污染，其中 $f_H > f_L$。这时可以将被噪声污染的信号通过一个截止频率为 f_c 的低通滤波器来恢复期望信号，其中 $f_L < f_c < f_H$。

3．复数信号

从数学角度看，信号可以是实数信号或者复数信号。显然，所有自然产生的信号都是实数信号。在工程实际应用中，常常需要由具有更多期望性质的实数信号来构成复数信号。

实数信号通过数学运算可以产生复数信号，其方法有多种。最直接的复数信号产生方法是用两个实信号分别作为复数信号的实部和虚部来构成复数信号。复数信号的一个重要用途是人为将两个实数信号合成为一个复数信号，这样可以在一次复数信号的傅里叶变换运算中完成两个实数信号的变换，从而提高运算效率。

复数信号也可以通过变换的方法产生。例如，通过希尔伯特变换器可以用来产生复数信号，该变换由如下冲激响应 $h_{HT}(t)$描述

$$h_{\mathrm{HT}}(t) = \frac{1}{\pi t} \tag{1-4}$$

其傅里叶变换 $H_{HT}(j\Omega)$为

$$H_{\mathrm{HT}}(\mathrm{j}\Omega) = \begin{cases} -\mathrm{j}, & \Omega > 0 \\ \mathrm{j}, & \Omega < 0 \end{cases} \tag{1-5}$$

设实数模拟信号 $x(t)$，其傅里叶变换为 $X(j\Omega)$。实数信号的幅度谱具有偶对称性，而相位谱具有奇对称性。因此，实数信号 $x(t)$的频谱 $X(j\Omega)$包含正、负频率，于是可以表示为

$$X(\mathrm{j}\Omega) = X_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\Omega) + X_{\mathrm{n}}(\mathrm{j}\Omega) \tag{1-6}$$

式中，$X_p(j\Omega)$是 $X(j\Omega)$的正频率部分，$X_n(j\Omega)$是 $X(j\Omega)$的负频率部分。若将 $x(t)$通过一个希尔伯特变换器，则其输出 $\hat{x}(t)$的频谱 $\hat{X}(j\Omega)$可以表示为

$$\hat{X}(\mathrm{j}\Omega) = H_{\mathrm{HT}}(\mathrm{j}\Omega)X(\mathrm{j}\Omega) = -\mathrm{j}X_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\Omega) + \mathrm{j}X_{\mathrm{n}}(\mathrm{j}\Omega) \tag{1-7}$$

由式（1-7）可以看出 $\hat{x}(t)$ 也是一个实数信号。考虑由 $x(t)$与 $\hat{x}(t)$ 的和组成的复数信号 $y(t)$

$$y(t) = x(t) + \mathrm{j}\hat{x}(t) \tag{1-8}$$

信号 $x(t)$和 $\hat{x}(t)$ 分别称为 $y(t)$的同相分量和正交分量。$y(t)$的连续时间傅里叶变换则可以表示为

$$Y(\mathrm{j}\Omega) = X(\mathrm{j}\Omega) + \mathrm{j}\hat{X}(\mathrm{j}\Omega) = 2\mathrm{j}X_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\Omega) \tag{1-9}$$

因此，复数信号 $y(t)$称为解析信号，它只存在正频率成分。

希尔伯特变换器的一个应用是实现了单边带调制。从实数信号产生解析信号的原理如图 1-3 所示。

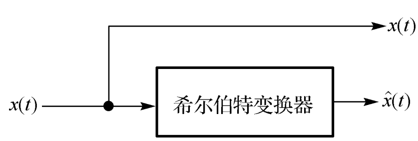


图 1-3　用希尔伯特变换器产生解析信号

除了上述运算外，在通信领域中还有幅度调制、复用和解复用及信号的产生等运算，在相应课程中专门讨论，在此不再一一赘述。

1.2　离散时间信号

数字信号处理是使用数值计算的方法对信号进行处理的一门科学。数字信号处理系统可以对数字信号进行处理。对于模拟信号，可以在处理系统中增加模数转换器（Analog Digital Converter，ADC），将模拟信号转换成数字信号后再进行处理，如果需要还可以用数模转换器（Digital Analog Converter，DAC）将处理后的数字信号转换成模拟信号。因此，数字信号处理中涉及模拟信号、时域离散信号和数字信号三种不同形式的信号。

1.2.1　时域离散信号的表示方法

1．时域离散信号 $x(n)$的常用表示方法

时域离散信号 $x(n)$的表示方法有多种，常用公式、图形和集合三种表示方法。对模拟信号 $x_a(t)$以采样间隔 T 为周期进行等间隔采样，得

$$x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty \tag{1-10}$$

式中，n 为整数。取不同的 n 值，$x_a(nT)$是一个有序的数值序列：$\cdots, x_a(-T), x_a(0), x_a(T), \cdots$，该数值序列就是离散时间信号。为了方便起见，直接用 $x(n)$表示第 n 个离散时间点的序列值，在数值上它等于信号的采样值，即

$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

特别要注意，显然 n 不是整数时没有定义。

（1）公式法表示序列

如果时域离散时间信号 $x(n)$可以用公式计算，则可方便地用数学公式表示该序列。例如

$$x(n) = a^n + 0.5 \qquad 0 < a < 1, \quad 0 \leqslant n < \infty$$

（2）集合法表示序列

与数学中表示数的集合的方法基本一致，用$\{*\}$表示。时域离散信号是一组有序数的集合，当然可表示成集合。例如，当 $a = 0.5$，$n = \{0, 1, 2, \cdots\}$时，序列 $y(n) = a^n$ 的样本值为

$$y(n) = \{\underline{1}, 0.5, 0.25, 0.625, \cdots\}$$

式中，带下画线的集合元素表示 $n = 0$ 点的序列值（或者用其他符号指明）。

（3）图形法表示序列

信号 $x(n)$随 n 的变化规律还可以用图形来描述，如图 1-4 所示。

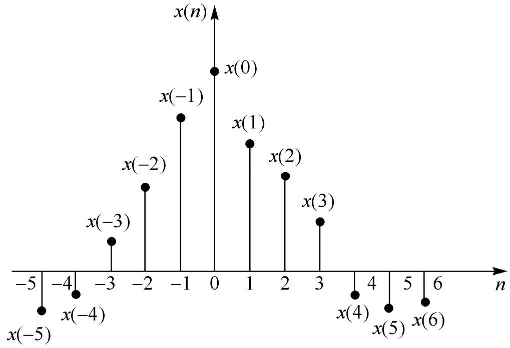


图 1-4　离散时间信号的图形表示

习惯上用垂直于横坐标轴的短线表示序列，并根据需要在短线的端点处加圆点或圆圈。横坐标轴虽为连续直线，但只在 n 为整数时才有意义。垂直于横坐标轴线段的长短代表各序列值的大小。为方便使用，常常略去图 1-4 中函数值符号 $x(0)$、$x(1)$、$x(-2)$等，仅用平行于纵轴的线段长短表示采样值的大小，用各线段在横轴上的投影值表示采样时刻。

2. MATLAB 中时域离散时间信号的表示方法

工具软件 MATLAB 中，所有计算是以向量运算为基础进行的，用两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 表示有限长序列 $x(n)$，其中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 向量中的元素一一对应，分别表示 $x(n)$的幅度向量和位置向量。容易理解，位置向量相当于序列图形表示法中的横坐标。位置向量通常是单位增向量，由“:”命令产生，如果序列 $x(n)$的起始点为 ns，终止点为 nf，那么 $\boldsymbol{n}$ 向量由语句“n = ns：nf”产生。这样，将有限长序列 $x(n)$记为{$x(n)$；n = ns：nf}。本书中与 MATLAB 程序有关的文字用正体字书写。

【例 1-1】 计算序列 $x(n) = \sin(\pi n/5)$在 $n = -5, -4, \cdots, 0, \cdots, 4, 5$ 的样本值。

解　用 MATLAB 计算 $x(n)$样本值的计算程序如下：

```
%fex1_1.m：用 MATLAB 表示序列 x(n)
n = -5:5;                  %位置向量 n 从-5 到 5
x = sin(pi*n/5);           %计算序列向量 x(n)在 n 从-5 到 5 区间的样本值
subplot(3,2,1);            %绘图窗口分割为三行两列共 6 个绘图区，并选择左上角为绘图区
stem(n, x , '.');          %绘制序列图，并在端点处标记圆点，若要标记圆圈，可在单引号内输入字母o
axis([-5,6,-1.2,1.2]);     %调整水平和垂直坐标轴
xlabel('n');               %标记水平坐标轴名称
ylabel('x(n)')             %标记垂直坐标轴名称
```

程序的运行结果如图 1-5 所示。不难看出，用图形法表示序列与 MATLAB 程序语句表示序列是等价的。

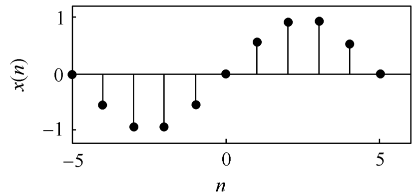


图 1-5　序列 $x(n) = \sin(\pi n/5)$的计算机图形表示

【例 1-2】 将已知模拟信号 $x_a(t) = 0.8\cos10\pi t$ 转换成时域离散信号和数字信号。

解　将模拟信号转换成时域离散信号需要对模拟信号进行等间隔采样，根据采样定理，采样频率必须是模拟信号最高频率的两倍以上。所给信号 $x_a(t) = 0.8\cos10\pi t$ 的频率是 5Hz，周期是 0.2s。选择采样频率 $f_s = 50$Hz 对 $x_a(t)$进行采样，即以采样间隔 $T = 1/f_s = 0.02$s 等间隔采样。即将 $t = nT$ 代入 $x_a(t) = 0.8\cos10\pi t$ 中，得

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) = 0.8\cos10\pi nT$$

式中，$n = \{\cdots, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$。将 n 代入上式，得

$$x(n) = \{\cdots, 0.8000, 0.6472, 0.2472, -0.2472, -0.6472, \cdots\}$$

式中，$x(n)$称为时域离散信号，其中变量 n 表示第 n 个采样点，且 n 只能取整数，非整数无意义。按照上式计算 $x(n)$所得的序列值是精度无限的小数，现实中必须将其量化为二进制数才能用来进行数字信号处理运算。为方便起见，$x(n)$的二进制编码形成的数字信号用 $x[n]$表示。因此，例 1-2 中所形成的 5 位二进制数字信号为

$$x[n] = \{\cdots, \underline{1.1001}, 1.0100, 0.0111, -0.0111, -1.0100, \cdots\}$$

例 1-2 说明，时域离散信号可以通过对模拟信号等间隔采样得到，所得结果为时域采样序列，采

样序列再进行量化编码就得到数字信号。考察 $x(n)$与 $x[n]$可见，以二进制编码为例，随着二进制编码位数的增加，两者的差别越来越小。实际工程中，采用 32 位二进制编码时，数字信号和时域离散信号的幅度值在数值上相差无几，误差可以忽略，只是信号形式不同。目前计算机的运算精度高达 32 位或 64 位以上，所以在用软件处理数字信号时一般不考虑编码误差产生的影响。但在很多实时信号处理应用场合，为了实现信号处理的高速实时处理，受设备复杂性和成本高低的影响，这时二进制编码的位数是受限制的，要考虑这种误差带来的影响。

1.2.2 典型的时域离散信号

典型的时域离散信号

下面介绍一些典型的离散信号。

1．单位脉冲序列 $\delta(n)$

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1-11}$$

$\delta(n)$称为单位脉冲序列，类似于连续时间信号与系统中的单位脉冲函数 $\delta(t)$。注意，这里 $\delta(n)$在 $n=0$ 时取值为 1。单位脉冲序列如图 1-6 所示。

2．单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{1-12}$$

单位阶跃序列的特点是只有在 $n\geqslant 0$ 时，它才取非零值 1。$n<0$ 时，均取零值。其波形如图 1-7 所示。

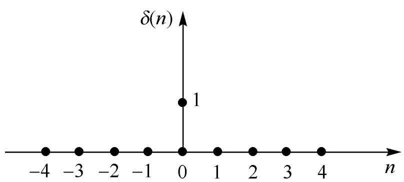


图 1-6 单位脉冲序列

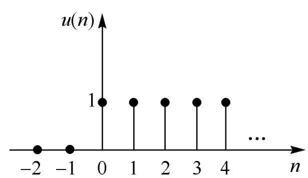


图 1-7 单位阶跃序列

$u(n)$可以用单位脉冲 $\delta(n)$表示为

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots \tag{1-13}$$

3．矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1-14}$$

式中，N 称为矩形序列的长度。当 $N=4$ 时，$R_4(n)$的波形如图 1-8 所示。

矩形序列 $R_N(n)$可用单位阶跃序列表示如下

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{1-15}$$

矩形序列 $R_N(n)$用单位脉冲 $\delta(n)$表示为

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots+\delta[n-(N-1)]$$

4．实指数序列

$$x(n)=a^n u(n) \tag{1-16}$$

式中，a 为实数。当$|a|<1$ 时，序列是收敛的，称序列 $x(n)$收敛。而当$|a|>1$ 时，序列是发散的，称序列 $x(n)$发散。图 1-9 表示 $0<a<1$ 时 $a^n u(n)$的图形。

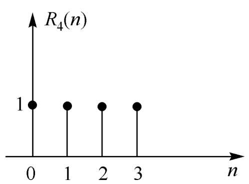


图 1-8　矩形序列

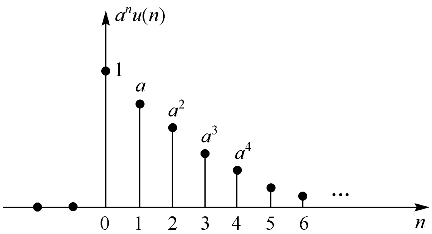


图 1-9　$0<a<1$ 时的实指数序列

5．复指数序列和正弦序列

复指数序列用下式表示

$$x(n)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)n} \tag{1-17}$$

或

$$x(n)=\mathrm{e}^{\sigma n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n} \tag{1-18}$$

它具有实部与虚部，ω_0 是复正弦的数字域频率。对第一种表示，可写成

$$x(n)=\mathrm{e}^{\sigma n}(\cos\omega_0 n+\mathrm{j}\sin\omega_0 n)=\mathrm{e}^{\sigma n}\cos\omega_0 n+\mathrm{j}\mathrm{e}^{\sigma n}\sin\omega_0 n$$

如果用极坐标表示，则

$$x(n)=|x(n)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[x(n)]}=\mathrm{e}^{\sigma n}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$$

因此

$$|x(n)|=\mathrm{e}^{\sigma n},\qquad \arg[x(n)]=\omega_0 n$$

正弦序列用式（1-19）表示

$$x(n)=A\sin(\omega n+\varphi) \tag{1-19}$$

式中，A 为幅度；ω 为数字域的频率，单位是弧度，它表示序列变化的速率，或者说表示相邻两个序列值之间变化的弧度数；φ 为起始相位，单位是弧度。

如果正弦序列 $x(n)$是由模拟正弦信号 $x_a(t)=\sin(\Omega t)$采样得到的，那么

$$x_a(t)=\sin(\Omega t)$$
$$x_a(t)|_{t=nT}=\sin(\Omega nT)$$
$$x(n)=\sin(\omega n)$$

因为在数值上序列值与采样信号值相等，故得

$$\omega = \Omega T \tag{1-20}$$

式（1-20）具有普遍意义，表明数字角频率（数字域频率，简称数字频率）ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系，说明凡是由模拟信号采样得到的序列，模拟角频率 Ω 与序列的数字域频率 ω 呈线性关系。由于采样频率 f_s 与采样周期 T 互为倒数，数字频率 ω 也可表示成

$$\omega = \frac{\Omega}{f_s} \tag{1-21}$$

式（1-21）表示数字域频率是模拟角频率对采样频率的归一化频率。本书中用 ω 表示数字域频率，Ω 表示模拟角频率，f_s 表示模拟采样频率。

综上可知，复指数序列和正弦序列都是以 2π 为周期的周期信号。用欧拉公式将复指数序列展开，其实部和虚部分别对应一个正弦序列。

1.2.3　周期序列

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N，序列 $x(n)$满足

$$x(n) = x(n+N) \tag{1-22}$$

则称序列 $x(n)$是周期序列，周期为 N。应特别注意 N 为整数。例如 $x(n)=\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$，数字频率是 π/4，并可写成下式

$$x(n) = \sin\left[\frac{\pi}{4}(n+8)\right]$$

表明 $x(n)=\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$是周期为 8 的周期序列，也称正弦序列，如图 1-10 所示。

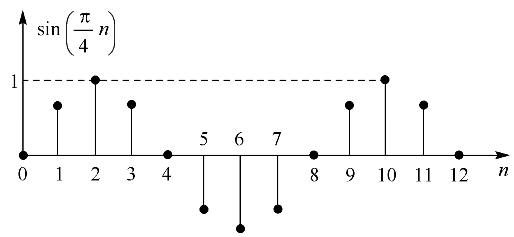


图 1-10　正弦序列

下面讨论正弦序列的周期性。设

$$x(n) = A\sin(\omega n + \varphi)$$

其中，ω 为数字域频率，φ 为起始相位，则

$$x(n+N) = A\sin[(n+N)\omega + \varphi] = A\sin[N\omega + n\omega + \varphi]$$

如果正弦序列 $x(n)$是周期序列，则有

$$x(n) = x(n+N)$$

或

$$A\sin(\omega n + \varphi) = A\sin[(n+N)\omega + \varphi]$$

考察上式，因为正弦函数以 2π 为周期，因此要求 $N\omega$ 是 2π 的整数倍，即 $N\omega = 2k\pi$，得

$$N = \frac{2\pi}{\omega} k \tag{1-23}$$

式中，k 与 N 均取整数，且 k 的取值要保证 N 是最小的正整数，满足这些条件，正弦序列 $x(n)$才是以 N 为周期的周期序列。所以，只有当 $\frac{2\pi}{\omega}k$ 是正数时，正弦序列 $x(n)$才能是周期序列。

同样，指数为纯虚数的复指数序列的周期性与正弦序列的情况相同。

无论正弦或复指数序列是否为周期序列，参数 ω 皆称为它们的频率。

上述讨论的结论是：周期信号经等间隔采样不一定得到周期序列。那么，采样时间间隔 T 和连续正弦信号的周期 T_0 之间应该是什么关系，才能使所得到的采样序列仍然是周期序列呢？

若连续正弦信号 $x(t)$为

$$x(t) = A\sin(\Omega t + \varphi)$$

则该信号的频率为 f，角频率为 $\Omega = 2\pi f$，信号的周期为

$$T_0 = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\Omega}$$

对连续周期信号 $x(t)$以采样间隔 T 为周期进行采样，采样后信号 $x(n)$为

$$x(n) = x(t)\,|_{t=nT} = A\sin(\Omega nT + \varphi)$$

令 ω 为数字频率，满足

$$\omega = \Omega T = \Omega \frac{1}{f_{\mathrm{s}}} = 2\pi \frac{f}{f_{\mathrm{s}}}$$

式中，f_{s} 是采样重复频率，简称采样频率。可见，ω 是一个相对频率，它是连续正弦信号的频率 f 对采样频率 f_{s} 的相对频率乘以 2π，也就是连续正弦信号的角频率 Ω 对采样频率 f_{s} 的相对频率。用 ω 代替 Ω，可得

$$x(n) = A\sin(\omega n + \varphi)$$

这就是上面讨论的正弦序列。下面讨论 $2\pi/\omega$ 与 T 及 T_0 的关系。

因为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \frac{1}{\Omega T} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi f T} = \frac{1}{fT} = \frac{T_0}{T}$$

考察上式，若要 $2\pi/\omega$ 为整数，则连续正弦信号的周期 T_0 应为采样时间间隔 T 的整数倍；若要 $2\pi/\omega$ 为有理数，则 T_0 与 T 是互质的整数。

1.2.4　离散序列的时域运算

离散序列的时域运算包括和、积、移位、翻转、累加、差分、时间尺度（比例）变换、卷积和等。

离散序列的时域运算

1．和运算

和运算是指两序列同序号(n)的序列值逐项对应相加而构成一个新的序列的运算。例如，两个序列 $x(n)$和 $y(n)$对应项相加形成的序列 $z(n)$表示为

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

【例 1-3】 设

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

$$y(n)=\begin{cases}2^n & n<0\\ n+1 & n\geqslant 0\end{cases}$$

求 $z(n)=x(n)+y(n)$。

解

$$z(n)=x(n)+y(n)=\begin{cases}2^n, & n<-1\\ \dfrac{3}{2}, & n=-1\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+n+1, & n\geqslant 0\end{cases}$$

$x(n)$、$y(n)$及 $z(n)=x(n)+y(n)$如图 1-11 所示。

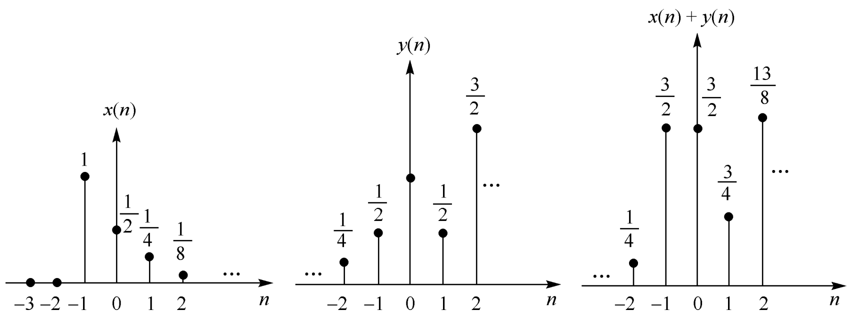


图 1-11　两序列相加

2．积运算

积运算是指两序列同序号(n)的序列值逐项对应相乘的运算。例如，两个序列 $x(n)$和 $y(n)$对应项相乘形成的序列 $z(n)$表示为

$$z(n)=x(n)y(n)$$

【例 1-4】 同例 1-3 中的 $x(n)$、$y(n)$，计算 $z(n)=x(n)y(n)$ 。

解

$$z(n)=x(n)y(n)=\begin{cases}0, & n<-1\\ \dfrac{1}{2}, & n=-1\\ \dfrac{1}{2}(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant 0\end{cases}$$

3．移位运算

移位运算有时也称为延时运算。是指一序列 $x(n)$逐项依次延时（右移）m 位而得到一个新序列 $y(n)$的运算，记为 $y(n)=x(n-m)$。同理，而 $y(n)=x(n+m)$则指依次超前（左移）m 位的运算。

【例 1-5】 已知

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

求 $x(n+1)$。

解

$$x(n+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}, & n+1\geqslant -1\\ 0, & n+1<-1\end{cases}$$

或

$$x(n+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}, & n\geqslant -2\\ 0, & n<-2\end{cases}$$

$x(n)$及 $x(n+1)$如图 1-12 所示。

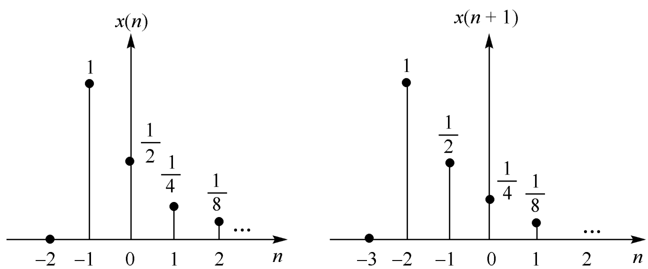


图 1-12　序列 $x(n)$及超前序列 $x(n+1)$

4．翻转运算

翻转运算是指将序列 $x(n)$以 $n=0$ 的纵轴为对称轴翻转形成序列的运算，所得序列为 $x(-n)$。

【例 1-6】 已知

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

求 $x(-n)$。

解

$$x(-n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}, & n\leqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

$x(n)$及 $x(-n)$的波形如图 1-13 所示。

5．累加运算

设序列为 $x(n)$，则序列 $x(n)$的累加运算形成的序列 $y(n)$定义为

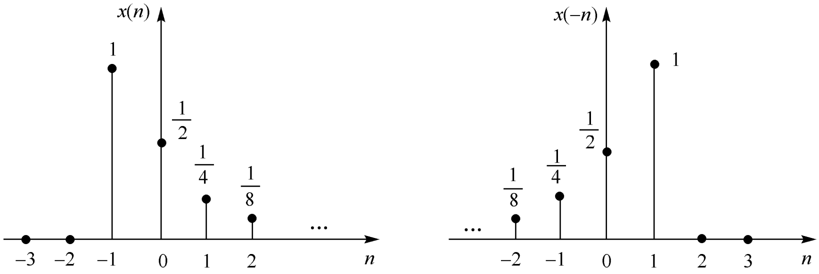


图 1-13　序列 $x(n)$及翻转后的序列 $x(-n)$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$

它表示 $y(n)$在某一个 n_0 上的 $x(n_0)$值以前的所有 n 值上的 $x(n)$值之和。

【例 1-7】 设

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

求序列 $x(n)$的累加运算形成的序列 $y(n)$。

解

$$y(n)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=-1}^{n}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<1\end{cases}$$

因而

$n=-1$，　$y(-1)=1$

$n=0$，　$y(0)=y(-1)+x(0)=1+1/2=3/2$

$n=1$，　$y(1)=y(0)+x(1)=3/2+1/4=7/4$

…

其他 $y(n)$值可依此类推。$x(n)$及 $y(n)$的波形如图 1-14 所示。

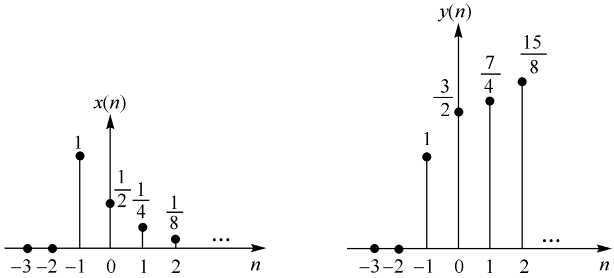


图 1-14　序列 $x(n)$及其累加序列 $y(n)$的波形

6．差分运算

前向差分

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$$

后向差分

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

由此容易得出

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

7．序列的时间尺度（比例）变换运算

对于序列 $x(n)$，其时间尺度变换序列为 $x(mn)$或 $x(n/m)$，其中 m 为正整数。例如，当 $m = 2$ 时，$x(2n)$不是 $x(n)$序列简单地在时间轴上按比例增一倍，而是以一半的采样频率从 $x(n)$中每隔 2 点取 1 点，如果 $x(n)$是连续时间信号 $x(t)$的采样，则相当于将 $x(n)$的采样间隔从 T 增大到 $2T$，这就是说，若

$$x(n) = x(t)\,|_{t=nT}$$

则

$$x(2n) = x(t)\,|_{t=n2T}$$

通常把这种运算称为抽取，即 $x(2n)$是 $x(n)$的抽取序列。$x(n)$及 $x(2n)$如图 1-15 所示。

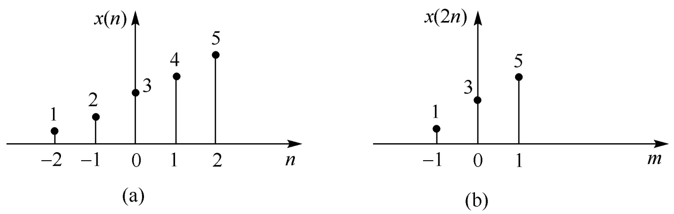


图 1-15　某序列及其抽取序列

与上述运算相反，$x(n/2) = x(t)|_{t=nT/2}$ 表示采样间隔由 T 变成 $T/2$，$x(n/2)$在原序列 $x(n)$相邻两点中间增加一个点，相当于插入一个点，因此将序列 $x(n/2)$称为 $x(n)$的插值序列。

8．卷积和运算

设两序列为 $x(n)$和 $h(n)$，则 $x(n)$和 $h(n)$的卷积和定义为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n) \tag{1-24}$$

式中，卷积和用∗来表示。卷积和的运算在图形表示上可分为 4 步：翻转、移位、相乘、相加，如图 1-16 所示，图中 $x(m) = h(m) = R_4(n)$。

（1）翻转：先在坐标 m 上作出 $x(m)$和 $h(m)$，将 $h(m)$以 $m = 0$ 的垂直轴为对称轴翻转成 $h(-m)$，如图 1-16(c)所示。

（2）移位：将 $h(-m)$移位 n，即得到 $h(n-m)$。当 n 为正整数时，右移 n 位。当 n 为负整数时，左移 n 位，$n = 1$ 时，如图 1-16(d)所示，$n = 2$ 时，如图 1-16(e)所示。

（3）相乘：再将 $h(n-m)$和 $x(m)$的相同 m 值的对应点值相乘。

（4）相加：把以上所有对应点的乘积叠加起来，即得 $y(n)$值，如图 1-16(f)所示。

按照上述方法，取 $n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$各值，即可得全部 $y(n)$值。

一般求解时，可能要分成几个区间来分别加以考虑，举例说明如下。

【例 1-8】 设 $x(n)=R_4(n)$，$h(n)=R_4(n)$，求

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

解 按照式（1-24)，有

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_4(m)R_4(n-m)$$

式中，矩形序列长度为 4，求解上式主要是根据矩形序列的非零值区间确定求和的上、下限，$R_4(m)$的非零值区间为 $0\leqslant m\leqslant 3$，$R_4(n-m)$的非零值区间为 $0\leqslant n-m\leqslant 3$，其乘积值的非零区间，要求 m 同时满足下面两个不等式：

$$0\leqslant m\leqslant 3$$
$$n-3\leqslant m\leqslant n$$

因此，当 $0\leqslant n\leqslant 3$ 时，

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}1=n+1$$

当 $4\leqslant n\leqslant 6$ 时，

$$y(n)=\sum_{m=n-3}^{n}1=7-n$$

卷积和的过程及 $y(n)$波形图解表示如图 1-16 所示。$y(n)$用公式表示为

$$y(n)=\begin{cases}n+1, & 0\leqslant n\leqslant 3\\ 7-n, & 4\leqslant n\leqslant 6\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

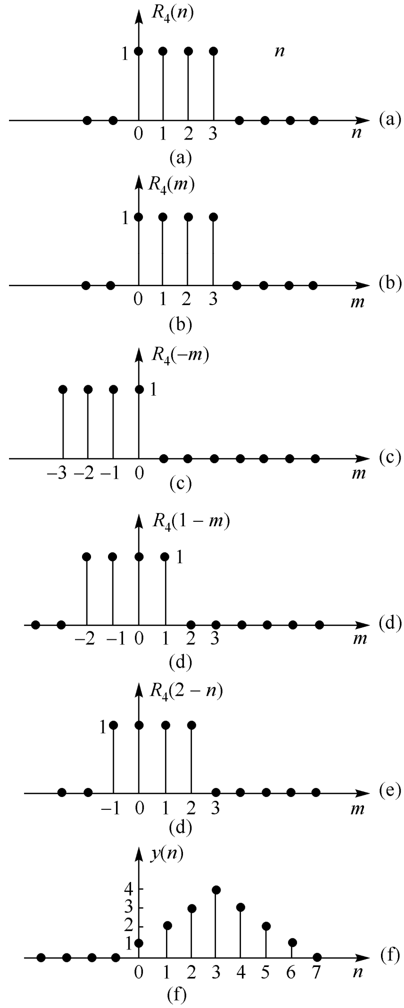


图 1-16 图解序列 $x(n)$和 $h(n)$的卷积和

由式（1-24）看出，卷积和与两序列的先后次序无关。证明如下。

令 $n-m=m'$代入式（1-24)，然后再将 m'换成 m，得

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

因此

$$y(n)=x(m)*h(n-m)=h(n-m)*x(m)$$

9．离散序列的能量

序列 $x(n)$的能量 E 为

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$$

1.2.5　任意序列的单位脉冲序列表示

对于任意序列 $x(n)$，可用单位脉冲序列的移位加权和表示为

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{1-25}$$

式中，

$$x(m)\delta(n-m)=\begin{cases}x(n), & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

因为按照 $\delta(n)$定义

$$\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

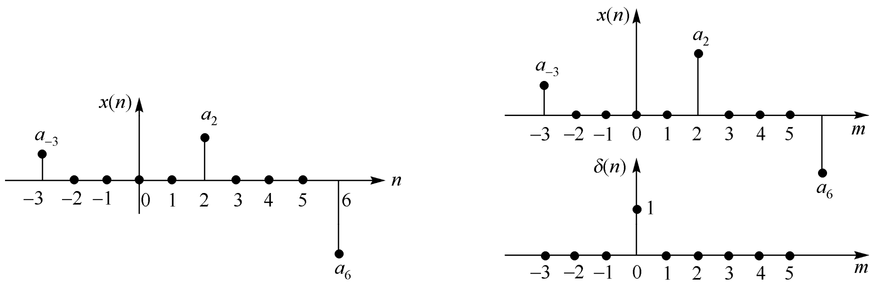
所以，按照卷积和的定义，式（1-25）也可视为 $x(n)$和 $\delta(n)$的卷积和。单位脉冲序列对于分析线性时不变系统（下面即将讨论）是很有用的工具。

【例 1-9】 $x(n)$如图 1-17(a)所示，试用单位脉冲序列表示该序列。

解　如图 1-17(a)所示，$x(n)$可视为单位脉冲序列的移位加权和，即

$$x(n)=a_{-3}\delta(n+3)+a_2\delta(n-2)+a_6\delta(n-6)$$

$x(n)$也可表示成 $x(n)$与 $\delta(n)$的卷积和，如图 1-17(b)所示。



(a) 将$x(n)$表示成单位脉冲序列的移位加权和　　(b) 将$x(n)$表示成$x(n)$和$\delta(n)$的卷积和

图 1-17　用单位脉冲序列表示任意序列 $x(n)$

1.3　时域离散系统

时域离散系统的作用是，经过规定的运算，将输入序列 $x(n)$变换成输出序列 $y(n)$，从而达到数字信号处理的目的。若这种运算以 $T[\cdot]$来表示，则时域离散系统输出与输入之间的关系可以表示为

$$y(n)=T[x(n)] \tag{1-26}$$

该系统的框图如图 1-18 所示。

在时域离散系统中，最常用的是线性时不变系统。许多物理过程都可用线性时不变系统表征，而且线性时不变系统便于分析。本书所要介绍的是线性时不变的离散时间系统。

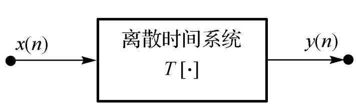


图 1-18　离散时间系统

1.3.1 线性时不变离散系统

1. 线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统。设系统 $T[\cdot]$的输入序列分别为 $x_1(n)$和 $x_2(n)$，系统的输出分别为 $y_1(n)$和 $y_2(n)$，即

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \qquad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

假设 $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$，如果系统的输出 $y(n)$服从

$$y(n) = T[x(n)] = T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1y_1(n)+a_2y_2(n) \tag{1-27}$$

则该系统服从线性叠加原理，或者说该系统是线性系统。式（1-27）中 a_1 和 a_2 是常数。叠加原理包含可加性和齐次性（比例性）两方面性质。

（1）可加性

设

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \qquad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

则有

$$y_1(n)+y_2(n) = T[x_1(n)]+T[x_2(n)] = T[x_1(n)+x_2(n)] \tag{1-28}$$

（2）齐次性

设

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \qquad y_2(n)=T[x_2(n)]$$

则有

$$a_1y_1(n) = a_1T[x_1(n)]= T[a_1x_1(n)] \tag{1-29}$$

$$a_2y_2(n) = a_2T[x_2(n)] = T[a_2x_2(n)] \tag{1-30}$$

a_1 和 a_2 是比例常数。综合上面两点可知，叠加原理可表示为

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]=T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] \tag{1-31}$$

对线性系统若写成 N 个输入的一般表达式，则为

$$\sum_{i=1}^{N} a_i y_i(n) = T\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(n)\right] \tag{1-32}$$

式中，a_i 是比例常数。式（1-32）就是叠加原理的一般表达式。

对线性系统满足叠加原理的一个直接结果就是：在全部时间为零输入时，其输出也恒等于零，也就是说，零输入产生零输出，即若

$$x(n)\rightarrow y(n)$$

根据齐次性，则

$$0\cdot x(n) = 0 \rightarrow 0\cdot y(n) = 0$$

应该注意，要证明一个系统是线性系统时，必须证明此系统同时满足可加性和齐次性，而且信号及任何比例常数都可以是复数。下面用例子来加以说明。

【例 1-10】 已知系统输入 $x(n)$和输出 $y(n)$满足关系 $y(n) = \mathrm{Im}[x(n)]$。试讨论此系统是否是线性系统。

解 先来研究此系统的可加性。令 $x_1(n)$为复数输入，即