

第1章 概述

我们生活在一个模拟的世界中，但是却希望用数字计算机与这个模拟的世界进行交互。事实上，数字信号处理(DSP)技术已经非常普及了，并且是大多数现代电子消费产品、医疗影像设备、手机、网络电话、多媒体标准设备、语音处理和大量其他电子产品的技术基础。相比模拟电路的实现方法，利用微处理器实现的数字化算法具有成本更低、容易控制、更可靠和更灵活等优点，所以模拟电路经常被数字芯片所代替。数字数据与模拟数据相比更容易被存储、传输和处理。因此，在现代应用中，越来越多的功能都可以用复杂的软件算法来实现，仅为模拟电路留下一些精细的微调任务。目前，用一个多媒体播放器播放我们喜欢的电影或是用综合环绕声系统播放古典音乐，就好像管弦乐队就在身边，而不是我们坐在卧室里。数字世界在日常生活中扮演着非常重要的角色，这使得我们几乎忘了我们并不能听见或是看见在这些场景背后运转着的“比特流”。围绕我们的世界是模拟的，然而绝大多数交换的信息却是数字的。朱迪·戈尔曼在1998年的歌曲《一个天空》中唱到，“我是数字世界里的一个模拟女孩”，这揭示了数字革命的本质。

无论是记录声音、捕获图像，或是处理一段电磁波，很多信息源都是一个模拟或者是一个连续时间的信号。因此，数字信号处理本身就依赖于连续信号到离散数字序列的转换采样机制，同时要将信息保留在这些信号中。这种转换是用一个称为模拟-数字转换器(ADC)的装置完成的。ADC装置将物理信息转换成数字流，以便利用复杂的软件算法来处理这些数字信号。处理之后，信号采样值再通过数字-模拟转换器(DAC)转换回到模拟域中。因此，采样理论是数字信号处理的核心，同时在推动数字革命的过程中扮演了一个重要的角色。

ADC原理在本质上是复杂的，它的硬件必须能够抓住一个快速变化的输入信号，在测量时要捕获到稳定的瞬时值。由于测量是划分时间间隔的，因此间隔的瞬时值之间的信号值就会有丢失。一般来说，是没有办法完全恢复输入的模拟信号的，除非是能够准确地了解信号结构上的一些先验信息。

1.1 标准采样

记录一个模拟信号 $x(t)$ 最简单的方法是按照时间间隔 T 进行采样，采样值为 $x(nT)$ ，如图 1.1(a) 所示。这种采样方法称为逐点采样(point-wise sampling)，图 1.1(b) 说明了逐点采样的工作原理。

给定采样值后，信号 $x(t)$ 的近似值可以用一个适当的插值函数 $w(t)$ 来表示。图 1.2 给出了图 1.1 的信号采样值用不同的插值函数 $w(t)$ 表示的几种可能的插值方法：零阶保持法、线性插值法、三次样条插值法(三阶多项式)和正弦插值法。每种方法的信号恢复都是通过函数 $w(t)$ 调制采样值 $d[n]$ 获得的

$$\hat{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d[n] w(t - nT) \quad (1.1)$$

设 $d[n] = x(nT)$ 是给定的采样值，其中 T 是采样周期。通常，用 $d[n]$ 作为表示采样值

$x(nT)$ 的函数。如果选取的采样值可以得到一个优化的信号恢复过程，这时称 $d[n]$ 为正确采样值。

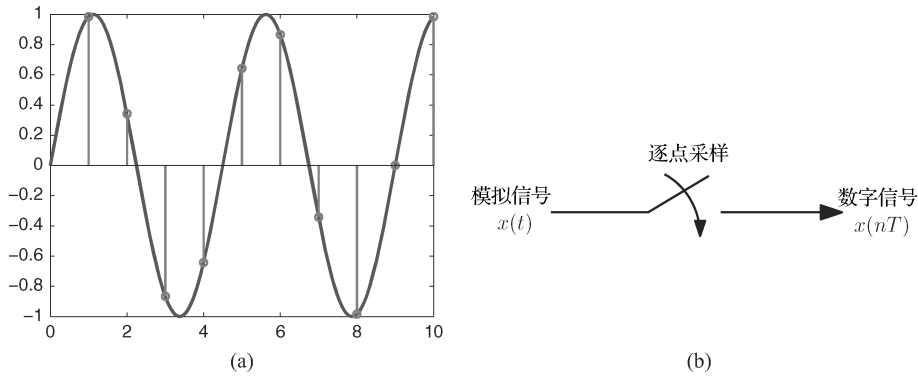


图 1.1 逐点采样过程。(a)连续时间信号 $x(t) = \sin(4t \pi/9)$ 及 $T=1$ 的逐点采样；(b)逐点采样器方框图

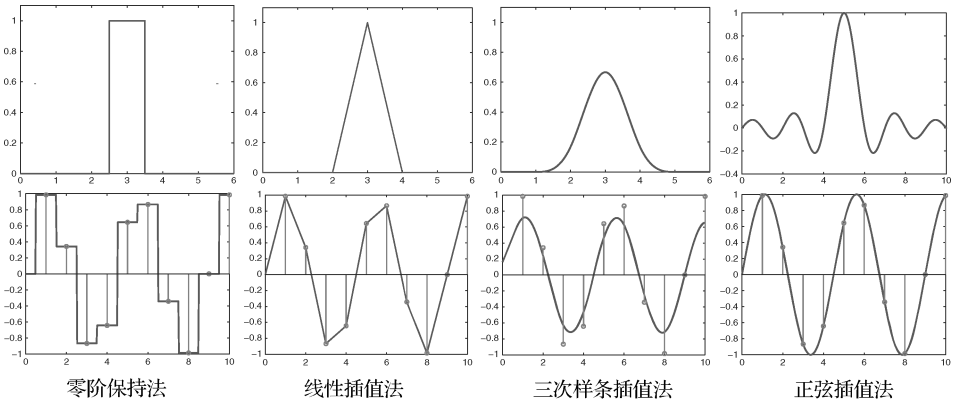


图 1.2 用几种不同插值函数进行的信号重构，上面为插值函数 $w(t)$ ，下面为恢复信号 $\hat{x}(t)$

显然，这里信号近似的质量取决于对采样值插值器的选择以及插值器与原始输入信号特性的匹配程度。因此，对于任何一种采样理论，一个关键问题就是我们对原始信号的先验信息有多少了解。没有充分的先验知识，采样值恢复的问题就比较困难。如图 1.2 所描述的，对于同样一组采样值点会有多种可能的曲线用来做信号插值函数。在实践中的一个难点就是找到在某种意义上与先验信息相一致的“最优”曲线。所以，采样理论的很大一部分内容都是在讨论根据输入信号特性来优化 $d[n]$ 和选择 $w(t)$ 。另外一个重要的设计考虑就是确定多小的采样周期 T 才能保证某类特定的信号能够被完美恢复。

这里已经简单描述了信号的逐点采样，实际上还有其他一些更复杂的采样方法，我们将在本书中进一步讨论。逐点采样简单地概括起来就如图 1.3 所描绘的，输入信号 $x(t)$ 首先通过一个采样滤波器 $s(-t)$ 进行滤波，这个滤波器可以克服理想采样器中的缺陷。然后它的输出经过均匀的间隔进行逐点采样得到所需的全局化采样值 (generalized sample)，表示为 $c(n)$ 。在本书中，我们都是按照这样一种采样机理来讨论问题，特别是将讨论基于输入信号特性的采样滤波器 $s(t)$ 的优化方法。

毫无疑问，在信号处理理论中影响最大的是著名的奈奎斯特采样定理。这个定理是香农在信息论中正式定义的^[1]，但是，是奈奎斯特最先提出的这个定理并引起了文献[2]中通信工

工程师们的关注。Kotelnikov 也独立地在苏联的文献中表述过这个定理^[3]。在数学领域, 这个定理也作为 E. M. Whittaker 和他的儿子 J. M. Whittaker 关于基本级数 (cardinal series) 研究工作的一部分得到发展^[4, 5]。带限采样理论的基本思想还要归功于 Cauchy^[6], 他阐述了这个未经证明的基本结论。围绕这个理论的历史和数学上的基本综述还可以进一步参见文献[7]。

香农-奈奎斯特采样定理已经成为数学上和工程技术上的一个里程碑, 并且在数字信号处理的发展中产生了意义深远的影响。它提供了一个方法, 只要信号足够平滑, 就能够用逐点采样法精确计算信号 $x(t)$ 。严格来说, 为了用式 (1.1) 使信号完全恢复, 设定的采样频率 $1/T$, 必须至少是给定信号 $x(t)$ 最高频率的两倍。这个最小速率被称为奈奎斯特速率。其中, 信号可以用一个正弦函数 $w(t) = \text{sinc}(t/T)$ 对其采样值进行插值处理, 这里函数 $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$, 称为 sinc 函数。这个理论假设这类输入信号对于一个适当频率来说是一个带限 (bandlimited) 信号, 式 (1.1) 中的插值函数 $w(t)$ 也是一个带限函数。也可以这样说, 大多数信号处理过程就是将信号从模拟域转换到数字域的过程, 就像是允许一个时间连续的带限函数在没有任何信息丢失的情况下, 被一个信号采样值离散集所代替。

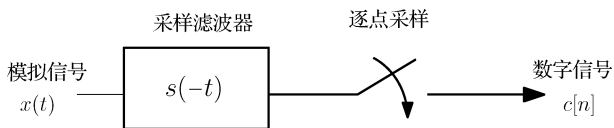


图 1.3 通用采样过程, 首先用一个采样滤波器 $s(-t)$ 对信号 $x(t)$ 进行采样, 然后利用一个逐点采样器进行采样

为了在提高运行速度的同时获得低运算成本, 必须开发高效的 ADC 电路。虽然香农-奈奎斯特定理非常有效, 并且已经对数字信号处理产生重大影响, 但它也有一些不足。现实生活中很少有真正的带限信号, 即使是近似带限信号, 也需要用相当高的奈奎斯特速率进行采样, 进而需要相对昂贵的采样硬件和高吞吐量的数字设备。很多自然信号, 即使它们是带限的, 也需要使用不同于傅里叶基的其他基来更好地表示。带限采样还引入了能被视为干扰的吉布斯振荡, 如在图像处理中的图像模糊。实际上, 很多信号都具有某些特殊的结构, 可以被用来降低采样率。但是, 当信号具有较大带宽时, 经典采样理论还是需要使用较高的采样率, 即使在这些信号中只包含很少的信息。例如, 一个分段线性信号是不可微的, 它不是带限的, 其傅里叶变换衰减速度就会很慢。然而, 这样一个信号完全可以根据节点的位置 (线段之间转换) 以及这些位置的信号值来进行描述, 这种方法所需要的参数远远小于香农-奈奎斯特定理所需要的参数。因此, 针对带限信号或分段线性信号等不同的信号模型, 采用不同的采样技术将更有效。这就是近年来压缩采样技术领域的一个基本追求, 即寻找一种新方法, 目的是为了捕获嵌入在信号中的有用信息。

香农-奈奎斯特理论的另外两个难点是假设信号被理想地逐点采样和使用 sinc 函数插值。实际中的 ADC 电路通常不是理想的, 就是在采样位置上不能获得精确的信号值。通常的情况是模数转换器在采样点的小邻域内, 对信号进行了积分。此外, 非线性失真经常在采样过程中出现, 这些失真必须在信号重构过程中加以考虑。另外, 要实现香农-奈奎斯特定理要求的 DAC 电路中的无限 sinc 插值核函数通常也是困难的, 因为函数的衰减比较慢。实际上, 大多数情况下只是使用简单的插值核函数, 如线性插值。在现代图像处理和通信系统的相关应用中, 另一个主要障碍是信号往往都调制在数个 GHz 的频率上, 这使得标准的 ADC 电路在处理这样的宽带信号时非常困难。

因此,为了设计出更好的采样和插值方法,使其适应实际情况,以下问题必须妥善解决:

- (1)考虑信号采样机制的建模;
- (2)考虑有关输入信号类型的先验知识;
- (3)为了确保信号能够可靠而有效地恢复,对信号重构算法要提出一些限制。

在本书中,我们将针对信号采样方法中的这三方面问题,根据信号处理和通信系统中的不同需求来讨论信号采样的建模问题。

1.2 非带限信号采样

随着香农插值带限采样定理^[1]的提出,采样理论成为一个非常活跃的研究领域,并在20世纪80年代就达到了一个相当成熟的状态。那个时期很多研究者发表了一些详尽、完美的综述性文献^[8,9]。但在那个年代,信号采样理论的研究通常只是在数学领域中进行的,在信号处理及通信中的应用或是ADC的实际设计中却几乎没有直接的影响。到了20世纪90年代,由于小波理论及其与信号采样理论联系的强烈兴趣驱动,信号采样理论的研究得到了进一步的推动。进而,基于小波分析的大量理论研究被应用到信号采样理论中。这使得利用新方法进行信号采样和处理的研究成果有了新的有趣的解释,这些新方法摆脱了所谓带限信号的限制,开始考虑更通用的信号模型和采样设备。关于这方面的完整介绍可以在参考文献[10][11]中找到。

在过去几年中,由于对压缩感知(compressed sensing, CS)领域的巨大兴趣^[12,13,14],人们又开始恢复了对信号采样理论的研究。压缩感知实际上给出了一种表征信号的方法,它对于稀疏信号或者有某种特殊结构的信号可以用更少的测量值来表示。这种信号表征架构主要是用于离散时间信号的采样以及根据有限采样值(采样值数)进行的信号重构技术。这个领域的研究结果已经表明,一个只包含很少非零元素的高维向量,可以通过一个适当选择的欠定方程组来进行信号恢复。在一定条件下,这种信号恢复可以利用多种不同的多项式时间算法来获得。这个结论表明,稀疏信号可以在欠奈奎斯特速率下采样,这在现代通信技术领域是非常重要的。

在涉及连续时间信号的采样过程时,压缩感知构架主要还是采用离散的、有限的信号表征集。当然,有很多实际例子本身就是具有有限表征的模拟信号,如三角多项式。然而应该指出,尽管在这个领域内已有广泛的研究,使用现有硬件设备利用压缩感知思想实现一般的连续时间信号的信号采样仍然是一个巨大的挑战。尽管如此,我们将会看到通过模拟采样与压缩感知思想的结合,仍然可以开发出多种不同的欠奈奎斯特速率采样系统,得到多种模拟信号的低速率采样方法。另外,还可以看到,在低速率采样信号处理系统中,信号采集采样值通常可以被直接处理而不必将它们插值回高奈奎斯特速率的体系中。除了介绍基本理论,本书还将讨论各种应用问题,包括介绍低速率采样方法,以及给出欠奈奎斯特速率采样系统的硬件设备原型。

开发低速率模拟信号采样方法的关键主要依赖于输入信号的结构。信号处理算法在根据不同任务开发不同算法结构方面已经经过了很长的历史过程。例如,MUSIC算法^[15]和ESPRIT算法^[16]都是利用信号结构进行谱估计的常用算法。估计中的模型阶数选择(model-order selection)方法^[17]、参数估计和参数特征检测方法^[18]是更加考虑信号结构的另外两个例子。在本书中,我们更加关注的问题是利用信号模型以减小信号采样率。经典的欠奈奎斯特采样方法包括载波解调法^[19]和带通欠采样法^[20],这两个方法假设了线性模型,对应的带限输入信号具有

预定的频率支持和固定的载波频率。然而在压缩感知的概念中,未知的非零位置导致了一个非线性模型,我们需要将上面这些经典的结果拓展到未知频率支持的模拟输入情况,以及涉及非线性输入信号结构的情况。本书所讨论的方法将遵循近年来提出的 Xampling 框架^[21, 22],它将涉及一个子空间并集的非线性模型。在这个信号结构中,输入信号属于多重子空间中的一个信号子空间,甚至是无限多可能子空间中的一个子空间,这个信号属于哪个特定子空间是一个未知的先验。这种模型可以涵盖大量各种结构化的模拟信号,同时为实际的欠奈奎斯特采样系统的实现奠定了基础。

随着更复杂更有效的 DSP 系统的研究与发展,采样理论的重要性还将进一步体现。采样理论与 CS 的结合也将为采样理论提供一个新的发展视角以及一个更好地利用信号自由度的方法。这种结合还表明,该领域的研究不仅需要建立完整的数学框架,而且需要配合具体的硬件实现,使理论研究的效果满足实际应用的需求,并在 ADC 市场产生影响。

1.3 本书概要与展望

在本书中,我们更多地考虑了香农-奈奎斯特定理的扩展问题,涉及了更广泛的输入信号类型,以及非理想采样和非线性失真的情况。我们的阐述是基于采样技术的希尔伯特空间表示的,随着 CS 领域中新技术的出现,我们的目标是在一个统一的构架下发展传统的采样理论。这个构架的根基就是线性代数基础以及滤波器理论和傅里叶分析等基本工具。这种统一的思想对经典插值方法带来了新的理解,并将它引入了新的和令人兴奋的科技前沿。

我们考虑的这个构架的基本思想是将信号采样在一个更宽广的角度上投影到适当的子空间上,然后选择一些子空间以产生新的可利用的机会。例如,研究结果可以被用于非带限信号的均匀采样,或用于非线性效应完美补偿。第2章主要是详细阐述了线性代数基础知识,在扩展采样构架时将需要。在随后的第3章中,给出了关于傅里叶分析的一个简单总结。为了理解最新的欠奈奎斯特采样概念,以及 CS 针对模拟信号的扩展应用,需要了解更多关于 CS 的背景知识,这些将在第11章中介绍。这里我们再次强调所谓的子空间方法,即把信号采样的问题统一到一个利用子空间并集构成的、更完整的系统构架之中。

为了针对某一特殊应用开发 ADC 技术,必须对所关心的信号建立准确的模型。第4章和第5章将给出信号模型的详细讨论,并分析有关信号集的一些基础数学性质,这些信号模型将用于全书各个章节。大多数经典信号处理方法都认为信号可以模型化为相应子空间中的一个向量。第6章将重点介绍存在非理想采样的任意子空间信号采样理论。我们研究的方法也可以用于给定插值核函数的信号重构,通过选择与输入子空间特性相匹配的最优核函数,可以使这种重构在信号质量上具有最小的损失。在第8章中,将进一步扩展这个基本构架,讨论包含非线性失真的信号采样过程。令人惊讶的是,在实际中遇到的很多非线性问题并不会带来任何技术难题,都可以进行有效的补偿,尽管可能对带宽有一定影响,但不需要更高的采样率。

第7章将讨论关于信号采样的一种更通用、更少限制公式化(模型化)的问题,其中关于信号的先验知识是认为信号是相对平滑的。与要求子空间先验知识不同,平滑信号与其采样信号(采样值)之间不存在一一对应的关系,因为相对于确保信号存在于一个子空间中,信号平滑性是一个很低的限制条件。因而,这种情况下完美的信号恢复通常也是不可能的。在某些困难的设计要求情况下,只能尽可能地近似输入信号。这些概念也可以被用来研究在数字格式间进行有效的速率转换技术,如将在第9章讨论的内容。

尽管线性模型在采样理论及 DSP 技术中使用非常广泛,但是这种简单模型在用于捕获常见类型的信号时还是会经常失效。比如说,将信号作为向量来进行建模化是合理的,但在很多情况下并不是这个空间中的所有向量都代表有用信号。为了应对这些挑战,近年来在许多领域开展了相关研究,提出了各种低维信号模型。这些低维信号模型明确了这样一种观点,即高维信号中自由度的数量比起其环绕维度(希尔伯特空间维度)常常要小得多。开发针对这样一类信号采样和处理系统构架的方法是利用子空间并集模型(union of subspaces model),这部分内容将在第 10 章中介绍。关于子空间并集研究最充分的实例是向量 $\mathbf{x}$ ^① 在一个恰当的基上可以是稀疏的,这一模型在 CS 领域得到快速发展,已经在信号处理、统计学和计算机科学等广泛的学科领域引起了极大的关注。第 11 章给出了有关 CS 概念的回顾。从第 12 章至第 15 章,详细讨论了如何将 CS 的基本原理扩展和延伸到更广泛的领域,包括模拟信号和离散时间信号,最终给出应用更广泛的连续时间信号的欠奈奎斯特采样技术。关于本书更详细的概述还可以在前言中看到。

欠奈奎斯特采样技术的需求和重要性是源于 DSP 技术的巨大成功,在很大程度上还要归功于香农-奈奎斯特定理。欠奈奎斯特采样技术促进了数字革命,进而推动了高精度信息感知系统的发展和广泛应用,也使由信息感知产生的数据量不断增加。然而遗憾的是,在很多重要的、新兴的应用中,信息采样率如此之高,以至于传输、存储、处理的采样值数量太大而很难实现。或者说,在某些宽带输入信号的应用中,要想实现有效采样速率的系统成本太高,甚至无法实现。所以说,尽管采样理论以及计算机能力已经有了极大的进展,在信号获取和处理的应用中,仍然不断地面临着巨大的挑战。这些应用覆盖雷达、宽带通信、图像处理、视频、医学影像、远程监控、光谱和基因组数据分析等方面。今天,我们正在见证一个新趋势的开端。在如宽带通信和射频技术等相关领域中的研究进展开创了一个重要途径,以跨越传统的 ADC 技术。具有两倍输入信号最高频率的转换速度已经变得越来越难以实现,因此,关于高速率采样的新技术在学术界和工业中开始得到越来越多的关注。

在过去的几年里,在采样技术领域中,理论和实践是并行同步发展的。很多研究团队的研究成果已经提出了许多非均匀采样获取模拟信号的新方法。数学研究的进展引导着抽象信号空间和信号采样技术的不断进步,使其可以超越香农-奈奎斯特采样定理规定的标准带限信号模型,处理更多类型的输入信号。同时,市场还在依附着奈奎斯特准则,香农-奈奎斯特定理仍然影响着各种 ADC 商业应用。

在本书中,将尽最大努力在介绍理论基础的同时,更加突出强调采样技术的实际应用。我们的目的是理论联系实际,并突出介绍采样理论已经或能够在 ADC 设计和应用上产生影响的那些内容。特别是在本书的后半部分,主要就是以解决某一实际问题为目标,例如,在一些实际应用中为减少成本而降低采样和处理速率的问题。这种阐述方式也是为了说明欠奈奎斯特采样从数学理论到硬件实现的转换过程中所具有的潜力。根据这一思路,我们努力将当前的理论研究结果与实践经验相结合,例如,将子空间并集的信号模型与基本的电路设计特性相结合。我们希望这种理论和实践的结合可以进一步促进采样理论在学术界和工业界的研究进展。

在我们开始进入第 2 章的线性代数理论介绍之前还要最后说明:非常希望能够在全书中尽力收集和展现当前已有的相关理论研究和技術方法的研究成果,也希望读者能够分享我们对于这本书投入的巨大热情。

① 在本书英文原版中,向量、矩阵等符号的表示非常混乱。为不引起二次错误,在翻译版中未进行规范。——编者注