第 1 章　质点运动学　质点动力学

物质最普遍、最基本的运动形式包括机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核运动以及其他微观粒子运动等。宏观物体之间（或物体内各部分之间）的相对位置变动，称为机械运动。物理学中研究机械运动的规律及其应用的部分称为力学。通常把力学分为运动学、动力学和静力学。运动学描述物体的位置随时间的变化或运动轨道问题而不涉及引起运动和运动变化的原因；动力学则研究物体的运动与物体间相互作用的内在联系；静力学研究物体在相互作用下的平衡问题。

质点运动学，从最简单的质点模型出发，研究描述质点运动的物理量（位置矢量、位移、速度和加速度、质点运动方程、切向加速度和法向加速度）、运动的叠加性和相对运动及物体位置随时间的变化或运动轨道等问题。引入了数学上的导数运算和积分运算，从而可以对运动的相对性、瞬时性和矢量性等基本性质进行清晰的阐述。

质点动力学，是以牛顿运动定律为基础，研究物体运动状态发生改变时所遵守的规律的科学。宏观物体的运动一定程度上遵循这些规律。物体间的相互作用称为力。某物体受力作用后，其运动状态就会发生相应的变化。在大学物理中可以从两个不同的角度研究力对物体作用的影响：一是力作用的时间累积作用效果，从而引出动量定理、角动量定理；二是研究力的空间累积作用效果，从而引出动能定理。当作用在物体上的力等于零时，反映出动量守恒、角动量守恒定律及能量守恒定律。这些定律是自然界最基本、最普遍的规律，需要认真去理解。

1.1　学习要求

1．质点运动的描述

（1）理解质点模型及参考系的概念。

（2）掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动的物理量；理解平面曲线运动的角位移、角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度等概念。

（3）能在直角坐标系下计算质点空间运动时的速度、加速度；理解自然坐标系，能计算质点圆周运动的角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度。理解伽利略相对性原理，会利用伽利略坐标、速度变换式分析相对运动问题。

2．牛顿运动定律

（1）掌握牛顿三定律及其适用条件，熟练运用隔离法和整体法分析物体受力；会分析三种基本力——万有引力、弹性力和摩擦力。

（2）熟练掌握运用微积分方法求解一维变力作用下的简单质点的动力学问题。

（3）正确理解质量、力等基本概念；理解质心概念和质心运动定律；理解质点系的内力和外力。

（4）了解惯性系与非惯性系的基本概念。

3．运动的守恒定律

（1）掌握功的概念，会计算质点直线运动时变力的功；掌握保守力做功的特点及势能的概念；会计算重力、弹性力、万有引力的势能。理解势能曲线，能从势函数求得保守力。

（2）掌握质点、质点系的动能定理、动量定理和动量守恒定律；掌握质点、质点系的角动量定理和角动量守恒定律，并能分析、解决运动质点的力学问题；掌握机械能守恒定律，并能熟练应用功能关系解决一些简单实际的问题；了解三大守恒定律与时间空间对称性的关系。

（3）了解完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞的特点。

1.2 内容提要

1．基本概念

（1）质点

把物体视为一个具有一定质量而大小可忽略的几何点，这样的几何点称为质点。质点是物体的一种理想模型。例如，导航地图中显示的移动的汽车、雷达屏幕上显示的飞行的飞机等就被看成一个质点。

（2）参考系与坐标系

为了描述物体的运动而被选定的参考物体称为参考系。为了定量描述物体相对参考系的位置与运动情况，在选定的参考系上建立带有标尺的数学坐标，称为坐标系。在科学研究中通常选用的坐标系有直角坐标系、自然坐标系、柱坐标系和球坐标系等。

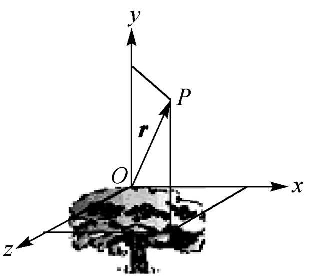

图 1.1 位置矢量

（3）描述质点运动的物理量

① 位置矢量。在坐标系中质点的位置用一个被称为位置矢量（简称位矢）的矢量来描述。在参考系中任意取定一点 O 作为参考点，如图 1.1 所示，从 O 点指向质点在某一时刻所处的位置 P，作一矢量 $\boldsymbol{r}$，称为质点在该时刻的位矢，即

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$$

在直角坐标系中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

其中，P 点的位置坐标 x 、 y 、 z 就是该点位矢 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中沿各轴的分量。直角坐标系 $Oxyz$ 中各轴 Ox、Oy、Oz 的正方向分别用相应的单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示，而 $\boldsymbol{r}_x = x\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{r}_y = y\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}_z = z\boldsymbol{k}$ 是位矢 $\boldsymbol{r}$ 的三个分矢量。

质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 随时间 t 的变化关系及在直角坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

式（1-2）称为质点的运动方程，其中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 是直角坐标系中运动方程的分量式。质点运动时在空间所经历的路径，称为轨迹，轨迹的数学表达式，称为轨迹方程。在直角坐标系中，从运动方程分量式 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 中消去时间 t ，即可得到轨迹方程 $f(x,y,z)=0$ 。

② 位移。位移是指自运动始点指向终点的有向直线线段。它描述质点在某段时间内位置的变化，为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{1-3}$$

位移是位置矢量的增量。

③ 速度。速度是描述质点运动快慢和运动方向的物理量，速度的大小称为速率。

平均速度：
$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-4}$$

瞬时速度：
$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-5}$$

平均速度是位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与时间 Δt 的比值，反映了一段时间内位置变化的平均快慢，方向与 $\Delta\boldsymbol{r}$ 相同。在描述质点运动时，也常采用“速率”这个物理量，把路程 Δs 与时间 Δt 的比值 $\Delta s/\Delta t$ 称为质点在时间 Δt 内的平均速率，用 $\overline{v}=\Delta s/\Delta t$ 表示。平均速度与平均速率都与 Δt 有关系，由于 $|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s$ ，所以，$|\overline{\boldsymbol{v}}| \neq \overline{v}$ 。瞬时速度是位置矢量对时间的一阶导数，是 $\Delta t \to 0$ 时平均速度的极限值，反映了 t 时刻位置变化的快慢和方向，瞬时速度只与 t 有关系。位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 、平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 与瞬时速度 $\boldsymbol{v}$ 的关系如图 1.2 所示。位移沿割线 AB 的方向，当 Δt 趋于零时，B 点逐渐趋近于 A 点，相应的割线 AB 逐渐趋近于 A 点的切线，所以质点的速度方向是沿着轨迹上质点所在点的切线方向并指向前进的一侧，亦即质点位矢对时间的瞬时变化率。

速度在直角坐标中的表示为

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-6}$$

沿坐标轴的分量分别是

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

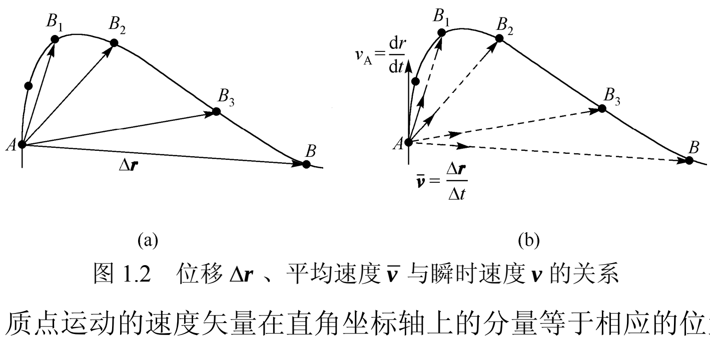

图 1.2　位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 、平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 与瞬时速度 $\boldsymbol{v}$ 的关系

也就是说，质点运动的速度矢量在直角坐标轴上的分量等于相应的位置坐标对时间的一阶导数（标量导数）。所以速度的大小可以用下式计算：

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1-8}$$

速度的方向可用下式计算：

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v}\,，\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v}\,，\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v} \tag{1-9}$$

式中，α，β，γ 分别为速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 x，y，z 轴之间的夹角。

在自然坐标系中，速度矢量可表示为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=v\boldsymbol{e}_\tau=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau \tag{1-10}$$

④ 加速度。加速度是反映质点速度矢量随时间变化的物理量。

平均加速度
$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-11}$$

瞬时加速度
$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-12}$$

平均加速度是速度矢量增量与时间的比值，反映了一段时间内速度变化的平均快慢和总体方向；瞬时加速度是速度矢量对时间的一阶导数，反映了某瞬时速度变化的快慢和方向。

在直角坐标系中，可将加速度用分量式表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}^2t}\boldsymbol{k} \tag{1-13}$$

在自然坐标系中，加速度矢量可表示为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_\mathrm{n}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \tag{1-14}$$

式中，ρ 是质点的运动轨迹上某点的曲率半径，$\boldsymbol{e}_\tau$ 为质点沿切向方向的单位矢量，$\boldsymbol{e}_\mathbf{n}$ 是垂直于 $\boldsymbol{e}_\tau$ 并指向曲率圆心的单位矢量，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 为切向加速度，反映速度大小的变化，$\dfrac{v^2}{\rho}$ 为法向加速度，反映速度方向的变化。质点做圆周运动时曲率半径 $\rho=R$。

2．描述质点运动的角量

角位置（角坐标）是指某时刻质点和坐标原点的连线与参考轴的夹角 θ。质点运动时，角位置随时间的变化表示为 $\theta=\theta(t)$。

角位移是指角位置在 Δt 时间内的变化量，表示为 $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$。

角速度是指角位移对时间的变化率，表示为

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-15}$$

角加速度是指角速度对时间的变化率，表示为

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}^2 \theta(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-16}$$

线量与角量的关系（质点做半径为 R 的圆周运动时）为

$$\begin{aligned} \Delta s &= R\Delta\theta \\ v &= R\omega \\ a_\tau &= R\alpha \\ a_\mathrm{n} &= \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \end{aligned} \tag{1-17}$$

3．相对运动

不同参考系对同一个物体运动的描述是不同的，如图 1.3 所示。$O'x'y'$ 坐标系相对于 Oxy 坐标系沿 Ox 轴以速度 u 运动，那么，一个运动质点在两个相对运动的参考系中的位移及速度关系为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{r}' + \Delta \boldsymbol{r}_0$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \tag{1-18}$$

式中，$\Delta \boldsymbol{r}$ 为运动质点相对于 S 系的位矢变化，$\Delta \boldsymbol{r}'$ 为运动质点相对于 S' 系的位矢变化，$\Delta \boldsymbol{r}_0$ 为 S' 系原点对 S 系原点的位矢变化，$\boldsymbol{v}$ 为质点相对于 S 系的速度，$\boldsymbol{v}'$ 为质点相对于 S' 系的速度，$\boldsymbol{u}$ 为 S' 系相对 S 系的速度，也称为牵连速度。

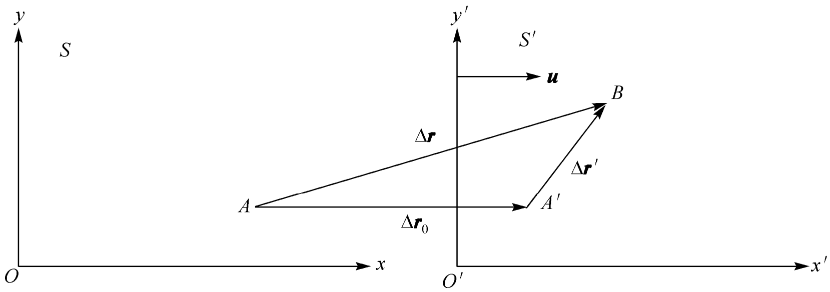

图 1.3　相对运动的描述

4．惯性与惯性系

物体保持静止或匀速直线运动状态的特性，称为惯性。

在研究物体相对运动时，牛顿（I.Newton）第一定律定义了一种参考系，在这种参考系中观察，一个不受力作用的物体将保持静止或匀速直线运动的状态不变。这样的参考系称为惯性参考系，也叫惯性系。也就是说，牛顿第一定律成立的参考系是惯性系。相反，牛顿第一定律不成立的参考系称为非惯性系。

一切相对于惯性系做匀速运动的参考系都是惯性系，在这些惯性系内，所有力学现象都符合牛顿运动定律。

5．力与力矩

（1）力

力是物体与物体之间的相互作用，力是矢量，有大小和方向。它是量度物体间相互作用的物理量。它能使质点运动的状态发生变化或使物体发生形变。牛顿三条定律都涉及力，牛顿第一、第二定律以受力物体为对象来研究力的作用效果，牛顿第三定律则指出物体间的作用是相互的。

日常生活中常见的力有如下几种。

① 重力。重力来源于地球对物体的万有引力。由于地球自转，地球对物体的万有引力中，一部分提供了物体随地球一起绕地轴作圆周运动的向心力；另一部分即为物体所受的重力。在南北两极的地轴上，物体所受重力即为万有引力，而在赤道上物体所受的重力等于万有引力与向心力之差。由于这种差异很小，一般认为重力即为物体所受的万有引力，方向垂直地面指向地心。作用在物体上的重力，在量值上为$W = mg$。式中m为物体的质量，g为重力加速度。

② 弹力。弹力来源于物体之间产生的形变。物体企图恢复原状而彼此相互施加的作用力，称为弹力。弹力的表现形式很多。其中一种为弹簧的弹性力，这种弹力总是使弹簧恢复原状，所以又称为恢复力，实验证明，这种力遵从胡克定律，即$f = -kx$，式中f表示弹力的大小，x表示弹簧的形变量，k为弹簧的劲度系数，它取决于弹簧本身的结构，负号表示弹性力的方向与形变的方向相反。

③ 摩擦力。两个相互接触的物体在沿接触面有相对运动或有相对运动趋势时，在接触面之间产生的一对阻止相对运动的力，称为摩擦力。摩擦力包括静摩擦力$f_{\mathrm{s}} \leqslant \mu_{\mathrm{s}} N$（$\mu_{\mathrm{s}}$为静摩擦系数，取等号时$f_{\mathrm{s}} = f_{\mathrm{s\,max}}$，为最大静摩擦力）和滑动摩擦力$f_{\mathrm{k}} = \mu_{\mathrm{k}} N$（$\mu_{\mathrm{k}}$为动摩擦系数），式中$N$为正压力。

近代物理证明，自然界物体之间的相互作用力可归结为 4 类：①万有引力$\boldsymbol{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$（重力属于此类）；②电磁力（弹力、摩擦力、黏性力等相邻原子或分子之间的作用力）；③强力，属于物质内更深层次的一种作用力；④弱力，属于亚原子之间的一种力。

*另一类是惯性力，即在加速参考系中引入牛顿运动定律的力，如在平动加速参考系中，$\boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{a}$，惯性离心力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} = -m\omega^2 r\boldsymbol{n}$。

（2）力矩

在转动的研究中，力矩是一个重要的概念。通常有力$\boldsymbol{F}$对给定点的力矩和力$\boldsymbol{F}$对定轴转动的力矩两个概念。

力$\boldsymbol{F}$对给定点O的力矩M_o表示为位矢$\boldsymbol{r}$与力$\boldsymbol{F}$的矢量积，即

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1-19}$$

M_o是矢量，对于可以绕O点任意转动的刚体，这个力矩矢量将决定它转动状态的变化。

力$\boldsymbol{F}$对给定轴Oz的力矩M_z。因为力$\boldsymbol{F}$可以分解为平行于转轴的分力$F_{//}$和垂直于转轴的分力$F_{\perp}$，而$F_{//}$对刚体转动没有贡献，只有$F_{\perp}$能使刚体转动，所以力$F_{\perp}$对给定轴Oz的力矩可表示为

$$M_z = F_{\perp} r \sin\varphi = F_{\perp} d \tag{1-20}$$

式中，φ 为转轴到力作用点半径 r 与 $F_{\perp}$ 的夹角。

说明：如果有几个力同时作用，那么上述力 $\boldsymbol{F}$ 可认为是几个力的合力。

6．动量与角动量

（1）动量

与速度类似，动量也是描述物体运动状态的物理量，即 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$。它是矢量，其方向与速度方向一致。在物理学中，用 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ 来表示质点的运动状态比用 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ 来表示更能体现其物理意义。因此，也可以说动量是物体做机械运动的度量。动量的单位是 $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$。

（2）角动量

质点的角动量是对某一定点而言的，其定义为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \tag{1-21}$$

式（1-21）表明角动量 $\boldsymbol{L}$ 的大小为 $L = rp\sin\varphi$，方向垂直于位矢 $\boldsymbol{L}$ 和动量 $\boldsymbol{p}$ 所组成的平面，指向是由 $\boldsymbol{r}$ 经小于 180° 的角转到 $\boldsymbol{p}$ 的右手螺旋前进的方向。

注意：式（1-21）中的 $\boldsymbol{r}$ 是该质点相对给定点 O 的位矢，参考点不同，角动量也不同，因此提到角动量一定要说明是对哪一个参考点而言的。

思考题：质点做圆周运动，以圆心为参考点的角动量是怎样的？

刚体做定轴转动的角动量定义为

$$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega} \tag{1-22}$$

J 与 $\boldsymbol{\omega}$ 分别是刚体绕同一固定轴的转动惯量与角速度。$\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 都是矢量，但在定轴转动情况下，仅有正负之分，用代数量处理即可。

7．冲量与冲量矩

冲量是描述力对时间累积作用的物理量。冲量定义为 $\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$，它是矢量，其方向与力的方向一致（说明：$\boldsymbol{I}$ 的方向和大小要由这段时间内所有微分冲量 $\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$ 的矢量和来决定，而不是由某一瞬时的 $\boldsymbol{F}$ 决定，但在恒力作用时 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 同向）。上述积分中 $\boldsymbol{F}(t)$ 的关系一般比较复杂，无法确切知道其具体形式。当力作用时间很短时，为了计算方便，常用平均冲力 $\bar{\boldsymbol{F}}$ 代替 $\boldsymbol{F}(t)$ 来计算冲量，其关系为

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \bar{\boldsymbol{F}}(t_2 - t_1) \tag{1-23a}$$

恒力作用时，冲量为

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t = \boldsymbol{F}(t_2 - t_1) \tag{1-23b}$$

冲量的单位是 $\mathrm{N \cdot s}$。

冲量矩（力矩的冲量）是力矩的时间积累效应，定义为 $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_z(t)\mathrm{d}t$，冲量矩是矢量。也可理解为 Δt 时间内对轴的力矩的冲量和或冲量矩之和。

8．动量定理和动量守恒定律

（1）动量定理

物体在运动过程中所受合外力的冲量，等于质点（或质点系）动量的增量。其数学形式为

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 \quad 或 \quad \boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1 \tag{1-24a}$$

式（1-24a）是牛顿第二定律的另一种表达形式，阐述力对时间累计效应的物理规律。其微分形式为

$$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}m\boldsymbol{v} \tag{1-24b}$$

理解动量定理时注意以下几点：

① 尽管外力在运动过程中时刻改变，物体的速度方向也可逐点不同，但却总是遵守动量定理。即不管物体运动过程中动量变化的细节如何，冲量的大小和方向总等于物体始末动量的矢量差。

② 动量定理不仅适用于碰撞或打击过程，也适用于其他力学过程。式（1-24a）、式（1-24b）中的力 $\boldsymbol{F}$ 是物体所受的合外力。在处理铅直方向的碰撞类问题时还应考虑重力，当物体相互作用力远大于重力时，重力可忽略。

③ 动量定理是由牛顿第二定律推导出的，而牛顿第二定律只适用于惯性系，所以动量定理也只适用于惯性系。具体应用时，需要选择合适的坐标系，用其在坐标轴上的分量式进行计算。

（2）动量守恒定律

若系统所受合外力为零，即 $\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0$，则系统的总动量不随时间改变，即

$$\sum m_i\boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_\mathrm{c} = 常矢量 \tag{1-25}$$

这一结论称为动量守恒定律。不难看出，系统的动量不变与质心保持匀速直线运动状态是等效的。

动量守恒定律表明，在物体机械运动转移过程中，系统中某一物体获得动量的同时，必然有别的物体失去了一份与之相等的动量。所以，动量守恒定律的深刻含义在于它是物体机械运动的一种量度。物体动量的转移反映了物体机械运动的转移。

9．角动量定理和角动量守恒定律

（1）角动量定理

式（1-21）和式（1-22）分别定义了质点对定点的角动量和刚体做定轴转动的角动量，质点角动量定理和刚体角动量定理可以共同表示为

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1 \tag{1-26}$$

式中，$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}(t)\mathrm{d}t$ 是作用在物体上的冲量矩。式（1-26）的物理意义是，作用于物体的冲量

矩等于角动量的增量。对于质点而言，力矩 $\boldsymbol{M}$ 和角动量 $\boldsymbol{L}$ 必须是对同一个参考点的；对于刚体而言，力矩和角动量必须是对同一转轴的。

定轴转动刚体的角动量定理的微分形式为

$$\boldsymbol{M}_z = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_z}{\mathrm{d}t} \tag{1-27}$$

该式表明刚体所受到的对某给定轴的总外力等于刚体对该轴的角动量的时间变化率。该式既适用于刚体，也适用于非刚体。

（2）角动量守恒定律

若作用于物体的合外力矩 $\boldsymbol{M}=0$，则角动量守恒，即 $\boldsymbol{L}=$恒量。

对于质点，有

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \text{恒量} \tag{1-28a}$$

对于刚体，有

$$L = J\omega = \text{恒量} \tag{1-28b}$$

注意：在有心力作用下，质点对力心的角动量都是守恒的。

10．牛顿定律

牛顿第一定律：任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，直到外力迫使它改变这种状态为止。牛顿第一定律包含两个重要概念：①任何物体都具有一种保持其原有运动状态不变的特性——惯性，故也称为惯性定律；②力是物体之间的一种相互作用，它是改变物体运动状态的原因。

牛顿第一定律只对惯性参考系适用，因而把第一定律成立的参考系称为惯性系。牛顿第一定律不能用实验直接验证，它是在大量观察与经验的基础上，经过抽象思维和逻辑推理得到的结果。

牛顿第二定律通常可表示为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \tag{1-29a}$$

式中，$\boldsymbol{F}$ 为作用在物体上的合外力，$\boldsymbol{p}$ 为物体的动量。牛顿本人对第二定律的表述是：运动的变化与所加的动力成正比，并且发生在该力所沿的直线方向上。当物体运动速度 $\boldsymbol{v}$ 远小于光速时，m 可视为常量，这时牛顿第二定律可写成

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a} \tag{1-29b}$$

式中，$\boldsymbol{F}$ 为作用在物体上的合外力，$\boldsymbol{a}$ 为物体加速度。牛顿第二定律定量地确定了受力物体的加速度与其质量之间的关系。

应用牛顿第二定律时应注意：

① 牛顿第二定律表述的是力的瞬时作用规律，加速度 $\boldsymbol{a}$ 和所受合外力 $\boldsymbol{F}$ 必须是同一时刻的瞬时量，且有矢量关系。

② 牛顿第二定律只适用于质点或可化为质点的物体。

③ 牛顿第二定律只适用于惯性系，在非惯性系中，不能直接运用 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，而该式也是在研究对象运动速度远小于光速时得到的结论。

④ 具体应用 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 时，往往用分量式处理，如在直角坐标系中用

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}\Rightarrow\begin{cases}F_x=ma_x\\F_y=ma_y\\F_z=ma_z\end{cases}\tag{1-30}$$

的形式，而在自然坐标系中的形式为

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}\Rightarrow\begin{cases}F_{\mathrm{n}}=ma_{\mathrm{n}}=m\dfrac{v^2}{r}\\[2ex]F_{\tau}=ma_{\tau}=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{cases}\tag{1-31}$$

式中，F_{n}，a_{n} 和 F_{τ}，a_{τ} 分别表示法向和切向上的力和加速度。

牛顿第三定律：两个物体之间的作用力和反作用力在同一直线上，大小相等而方向相反。其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}'\tag{1-32}$$

学习牛顿第三定律时应注意：

① 指出物体之间的作用力具有相互作用的特性，受力物体同时也是施力物体，反之亦然。作用力和反作用力总是成对出现，它们同时产生，同时存在，同时消失。作用力和反作用力总是属于同种性质的力。

② $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'$ 在同一直线上，但作用在不同物体上。二者同存同失永远不会相互抵消。

11．功和能

（1）功

功是描述力对空间累积作用的物理量。功的大小等于力和位移的标积（即乘积为一标量），即

$$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F\cos\alpha\mathrm{d}r\tag{1-33}$$

式中，α 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的夹角。

若质点在变力作用下，从 a 点沿曲线路径运动到 b 点，则变力在该过程中所做的功为

$$A=\int_a^b\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\tag{1-34}$$

功是标量，它有正负之分。功的单位是 J（焦耳）。讲到功时，必须明确指出是哪个力对哪个物体做功，不能笼统地谈功。

力对定轴转动刚体所做的功表示为

$$A=\int_a^b\mathrm{d}A=\int_a^b\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta\tag{1-35}$$

（2）保守力的功

重力、弹力和万有引力所做的功都与运动路径无关，只与始末位置有关，即上述力做功的共同特点可以用下式表示：

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{1-36}$$

把具有这种特点的一类力称为保守力。因此，式（1-36）的物理意义是：保守力 $\boldsymbol{F}$ 沿任意闭合路径一周所做的功为零。或者说，保守力做功与路径无关，只与始末位置有关。

重力、弹力、万有引力做功的关系式为

$$A = mgh_1 - mgh_2 = -(mgh_2 - mgh_1) = -\Delta E_{\mathrm{P}} \tag{1-37a}$$

$$A = \frac{1}{2}kx_1^{\ 2} - \frac{1}{2}kx_2^{\ 2} \tag{1-37b}$$

$$A = -\left(G\frac{m_1 m_2}{r_1} - G\frac{m_1 m_2}{r_2}\right) \tag{1-37c}$$

（3）动能

质点由于运动而具有的能量称为动能。质量为 m，速度为 $\boldsymbol{v}$ 的质点的动能为 $E_{\mathrm{k}} = \dfrac{1}{2}mv^2$。（狭义相对论中指出：当质点的运动速度接近真空中的光速 c 时，质点的质量将随速度而变化。此时，它的动能由相对论给出，为 $E_{\mathrm{k}} = mc^2 - m_0c^2$，式中，$m_0$ 为质点的静止质量，m 为运动质量。）

刚体定轴转动时具有的动能是指刚体上所有质点的动能之和，称为该刚体的定轴转动动能。质量为 m，定轴转动角速度为 ω 的刚体的动能为

$$E_{\mathrm{k}} = \sum \frac{1}{2}mv_i^{\ 2} = \frac{1}{2}m\omega^2 \tag{1-38}$$

（4）势能

在物体系统中，物体之间或物体内部各部分之间由于相对位置而具有的能量称为势能，用 E_{p} 表示。势能是坐标的函数或称状态函数。

保守力的功 W_{c} 与势能 E_{p} 的关系是

$$W_{\mathrm{c}} = -\Delta E_{\mathrm{p}} = -(E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}}) \tag{1-39}$$

即系统内保守力所做的功等于系统势能增量的负值。式中，E_{p0} 为初态势能，E_{p} 为末态势能。

势能的共有性质有：

① 势能属于系统，不是单个物体所具有。

② 势能具有相对性。式（1-39）仅定义了势能的增量或势能的差值。如果要求某点的势能，就必须选择势能的零点。若在式（1-39）中选择 $E_{\mathrm{p0}} = 0$，则任一点 a 的势能等于把物体从 a 点移到势能零点的过程中保守力所做的功，即

$$E_{\mathrm{pa}} = \int_a^0 \boldsymbol{F}_{\mathrm{c}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1-40}$$

对于重力势能，通常取地面为零势能点；对于弹性势能，取平衡位置处为零弹性势能点；对于万有引力，取无穷远处为引力势能零点。这样，这三种势能分别为

$$E_{\text{p重力}} = mgh \tag{1-41a}$$

$$E_{\text{p弹性}} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1-41b}$$

$$E_{\text{p引力}} = -G\frac{mM}{r} \tag{1-41c}$$

12．质点的动能定理和质点系的动能定理

质点的动能定理：合外力对质点所做的功 A 等于质点动能 E_{k} 的增量。其数学表达式为

$$A = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = E_{\mathrm{k}b} - E_{\mathrm{k}a} = \Delta E_{\mathrm{k}} \tag{1-42}$$

质点系的动能定理：系统的外力做功 A_{e} 和内力做功 A_{i} 的总和等于系统动能 ΔE_{k} 的增量。其数学表达式为

$$A_{\mathrm{e}} + A_{\mathrm{i}} = E_{\mathrm{k}b} - E_{\mathrm{k}a} = \Delta E_{\mathrm{k}} \tag{1-43a}$$

13．功能原理与机械能守恒定律

（1）质点系的功能原理

当系统从状态Ⅰ变化到状态Ⅱ时，它的机械能的增量等于外力做功和非保守内力做功的总和。这个结论称为质点系的功能原理，其数学表达式为

$$A_{\mathrm{e}} + A_{\mathrm{id}} = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = \Delta E \tag{1-43b}$$

式中，A_{e} 为外力做的功，A_{id} 为非保守内力做的功。

（2）机械能守恒定律

在一个孤立系统中，当只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功时，则系统内各物体的动能和势能可以互相转换，但机械能的总值不变。这个结论称为机械能守恒定律。其数学表达式为

$$\sum_i E_{\mathrm{k}i} + \sum_i E_{\mathrm{p}i} = \sum_i E_{\mathrm{k}i0} + \sum_i E_{\mathrm{p}i0} \tag{1-44a}$$

或

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = -\Delta E_{\mathrm{p}} \tag{1-44b}$$

（3）能量守恒定律

一个孤立系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不变的，它只能从一种形式变为另一种形式，或从系统内一个物体转移到另一个物体。能量既不能产生，也不能消失，这就是能量守恒定律。能量守恒定律是自然界中具有最大普适性的定律之一。

1.3　重点难点分析

1．本章重点

运动学部分的重点：①掌握力对时间的累积作用、力对空间的累积作用的概念及物理过程；②掌握质点系的运动、刚体运动的描述；③掌握动量守恒定律、能量守恒定律；④熟练掌握变力做功问题和变力的冲量问题，能熟练应用功能关系解决一些简单的实际问题，会应用动量原理和动量守恒定律。

力学部分的重点包括正确理解力学中建立的物体的理想模型（如质点、刚体），掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述各物理过程的物理量的概念及运动方程，以及相关物理量之间的关系；掌握两类具体问题的处理：①已知速度和加速度及初始条件，求质点的运动方程，②已知质点运动方程，求质点的位移、速度、加速度等物理量；正确理解几种常见力及其应用；熟练掌握牛顿三条定律及其应用。

2．本章难点

本章的难点：①对物理学中质点、质点系、刚体等物理模型的理解，对本章中的物理概念、物理公式、定律的理解，对矢量运算、微分和积分等数学知识的应用；运用导数和积分求解变加速度、变力问题的思路和方法；②运用相关坐标系表示物理矢量和物理矢量方程的思路与方法，以及矢量方程的具体求解；③理解参考系对描述运动的物理量和物理公式的重要性。

1.4　精选例题与习题解答

1．精选例题

例 1-1　一运动质点，在某一时刻其位矢为 $\boldsymbol{r}$，在 Δt 时间内的路程为 Δs，下列各式中，哪个能表示其平均速度、速度？哪个能表示其平均速率、速率？

（A）$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　（B）$\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$　（C）$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$　（D）$\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$　（E）$\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$　（F）$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

分析与解：平均速度是矢量，是在相应的时间 Δt 内位移对时间的比值；速度是矢量，为位置矢量对时间的一阶导数；而速率是速度矢量的大小，即速度的模。所以，（B）是平均速度，（C）是速度，（D）是速率，（F）是平均速率。（A）、（E）无物理意义。

例1-2　质点在平面上运动，已知其位置矢量的表达式为 $\boldsymbol{r} = at^2\boldsymbol{i} + bt^2\boldsymbol{j}$（式中 a、b 为常数），则质点做（　　）。

（A）匀速直线运动　（B）变速直线运动　（C）抛物线运动　（D）一般曲线运动

分析与解：质点运动的速度和加速度表达式分别为 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2at\boldsymbol{i} + 2bt\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 2a\boldsymbol{i} + 2b\boldsymbol{j}$，轨迹上任意一点处的斜率为 $\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2a}{2b} = \dfrac{a}{b}$。斜率为常数，所以轨迹应为直线，加速度大小恒定，方向不变，故质点做匀变速直线运动，故选（B）。

例 1-3 一个质点沿 x 轴做直线运动，其运动方程为 $x=3+6t+8t^2-12t^3$，则

（1）质点在 $t=0$ 时刻的速度 $v_0=$________，加速度 $a_0=$________；

（2）加速度为 0 时，该质点的速度 $v=$________。

分析：因为质点做直线运动，所以可用代数计算来替代矢量运算。将运动方程 $x(t)$ 对时间求一阶导数和二阶导数可得质点的速度 $v(t)$、加速度 $a(t)$ 表达式，由此可以确定任一时刻的位置、速度、加速度。对第二问可由加速度表达式令其为零，解出时间 t，再将 t 代回速度表达式中，求出速度。

解：（1）由速度、加速度的定义有

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6+16t-36t^2,\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=16-72t$$

当 $t=0$ 时，速度 $v_0=6\ \mathrm{m/s}$，加速度 $a_0=16\ \mathrm{m/s^2}$。

（2）由加速度关系：$a=16-72t$，令 $a=0$，则 $t=\dfrac{16}{72}=0.22\ \mathrm{s}$，代入速度关系有

$$v=6+16\times\frac{16}{72}-36\times\left(\frac{16}{72}\right)^2=7.8\ \mathrm{m/s}$$

例 1-4 质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}(t)=8\cos(2t)\boldsymbol{i}+8\sin(2t)\boldsymbol{j}$（SI）单位，求：（1）质点在任一时刻的速度和加速度的大小；（2）质点的切向加速度和运动轨迹。

分析：已知质点运动方程 $\boldsymbol{r}(t)$，对其求一阶导数和二阶导数可得质点的速度 $\boldsymbol{v}(t)$、加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ 表达式，再由速度、加速度的分量关系可求出质点在任一时刻的速度和加速度的大小。由运动方程分量表达式消去时间参数 t 可得质点的运动轨迹方程。

解：（1）根据速度公式，有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-16\sin(2t)\boldsymbol{i}+16\cos(2t)\boldsymbol{j}$$

则速度的大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

根据加速度公式，有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-32\cos(2t)\boldsymbol{i}-32\sin(2t)\boldsymbol{j}$$

则加速度的大小为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=32\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

（2）由运动方程

$$\begin{cases} r_x=x=8\cos(2t) \\ r_y=y=8\sin(2t) \end{cases}$$

消去参数 t 得运动轨迹方程

$$x^2+y^2=64$$

由此可知，质点做半径 $R = 8\ \mathrm{m}$ 的圆周运动，则

$$\begin{cases} a_{\mathrm{n}} = v^2 / R = 32\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \\ a_{\tau} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

例 1-5　路灯距离地面的高度为 h，一个身高为 l 的人在路上做匀速直线运动，速度为 v_0，如图 1.4 所示，求：（1）人影中头顶的移动速度；（2）影子长度增长的速率。

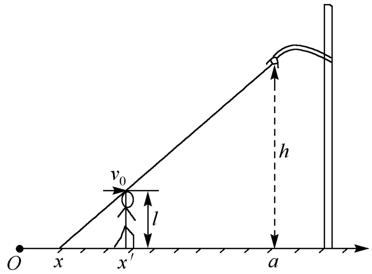

图 1.4　例 1-5 题图

分析：利用相似三角形的几何关系，建立人影中头顶点的运动方程，即可求得人影中头顶的移动和影子长度的变化规律。

解：（1）建立如题图所示坐标系。设 t 时刻人位于 x' 处，人影的头顶点位于 x 处，由几何关系得

$$\frac{a - x}{h} = \frac{x' - x}{l}$$

即有

$$x = \frac{hx' - al}{h - l}$$

人影的头顶点移动的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{h - l}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{h - l}v_0$$

式中，$\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = v_0$ 是人的运动速度。由于 $\dfrac{h}{h - l} > 1$，所以 $v > v_0$，即人影的头顶点移动得比人快。

（2）人影的长度为

$$x' - x = x' - \frac{hx' - al}{h - l} = \frac{al - hx'}{h - l}$$

人影长度的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}(x' - x)}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{h - l}v_0$$

上述变化率为负值，表明随着人接近路灯，人影长度将变短。

例 1-6　一质量为 1 kg 的物体，置于水平地面上，物体与地面之间的静摩擦系数 μ_{s}=0.20，滑动摩擦系数 $\mu_{\mathrm{k}} = 0.16$，现对物体施一水平拉力 $F = t$+0.96（SI），则 2 s 末物体的速度大小为多少？

分析：本题的物理过程涉及力对时间的累积效应，即可由力对时间的积分求出冲量，再求速度。在 0→1 s 内，$F \leqslant \mu_{\mathrm{s}} mg = 1.96\ \mathrm{N}$，未拉动物体，此时物体仍处于静止状态。当 $t > 1\ \mathrm{s}$ 时，拉力大于（克服）最大静摩擦力后，物体开始运动，因而可求时间在 1 s→2 s 内，力对时间积累的效果，即在这段时间内合外力对物体的冲量。

解法 1：在 1 s→2 s 内，力的冲量为

$$I=\int_1^2 (t+0.96)\,\mathrm{d}t-\mu_\mathrm{k} mg(t_2-t_1)=0.89\ \mathrm{N\cdot s}$$

由冲量定理可得（初动量为 0）

$$v=I/m=0.89\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

解法 2：由力 F 与静摩擦力相等时，求出时间 t，即 $F=t+0.96=\mu_\mathrm{s} mg$ 时，有 $t=1$。当 $t\geqslant 1\,\mathrm{s}$ 时物体开始运动，由牛顿第二定律可得

$$F-\mu_\mathrm{k} mg=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量，再积分，可得

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_1^2 (t+0.96-0.16\times 1\times 9.8)\,\mathrm{d}t$$

得

$$v=I/m=0.89\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

例 1-7　如图 1.5 所示，水平地面上有一质量为 M 的物体，静止于地面上。物体与地面间的静摩擦系数为 μ_s，若要拉动物体，问最小的拉力是多少？沿何方向？

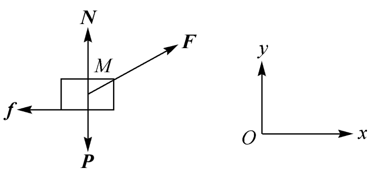

图 1.5　例 1-7 题图

分析：由于与运动有关的力矢量分布在二维空间，所以建立如题图所示的 Oxy 坐标系。确定研究对象为质量为 M 的物体，经受力分析可知，物体受重力 $\boldsymbol{P}$，拉力 $\boldsymbol{F}$，地面的支持力 $\boldsymbol{N}$，地面对它的摩擦力 $\boldsymbol{f}$。再由牛顿第二定律写出动力学方程并求解。

解：由牛顿第二定律，可得动力学方程为

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{f}=M\boldsymbol{a}$$

设 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴的夹角为 θ，则沿直角坐标系的分量方程式为

x 分量：

$$F\cos\theta-f=Ma \tag{①}$$

y 分量：

$$F\sin\theta+N-P=0 \tag{②}$$

物体启动时，有

$$F\cos\theta-f\geqslant 0 \tag{③}$$

物体刚启动时，摩擦力为最大静摩擦力，即 $f=\mu_\mathrm{s} N$，由式②解出 N，求得 f 为

$$f=\mu_\mathrm{s}(P-F\sin\theta) \tag{④}$$

把式④代入式③中，有

$$F\geqslant \mu_\mathrm{s} Mg/(\cos\theta+\mu_\mathrm{s}\sin\theta) \tag{⑤}$$

可见 $F=F(\theta)$。若要 $F=F_\mathrm{min}$，则要求分母 $(\cos\theta+\mu_\mathrm{s}\sin\theta)$ 最大。设 $A(\theta)=\mu_\mathrm{s}\sin\theta+\cos\theta$，求

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}=\mu_s\cos\theta-\sin\theta=0$$

得到

$$\tan\theta=\mu_s$$

而 $\dfrac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}\theta^2}=-\mu_s\sin\theta-\cos\theta<0$，所以 $\tan\theta=\mu_s$ 时，$A=A_{max}$，即 $\theta=\arctan\mu_s$ 时所用拉力最小。代入式⑤中，得

$$F_{\min}=\mu_s Mg\Bigg/\left[\mu_s^2\frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}}\right]=\frac{\mu_s Mg}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$$

故 $\boldsymbol{F}$ 方向与水平方向夹角 $\theta=\arctan\mu_s$ 时，所用拉力最小。

注意：解该题时注意受力分析，力学矢量（在直角坐标系中）分量式的表示，数学分析中导数的应用。

例 1-8　有一保守力 $\boldsymbol{F}=(-Ax+Bx^2)\boldsymbol{i}$，沿 x 轴作用于质点上，式中 A、B 为常量，x、F 的单位分别是 m、N。求：

（1）当 $x=0$ 时，$E_p=0$，试计算与此力相应的势能。

（2）求质点从 $x=2\,\text{m}$ 运动到 $x=3\,\text{m}$ 时势能的变化。

分析：在保守力场中任意一点 a 的势能等于把物体从 a 点移到势能零点的过程中保守力所做的功，即 $E_{pa}=\int_a^0\boldsymbol{F}_c\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

解：（1）已知势能零点位于坐标原点，则 x 处的势能为

$$E_{px}=A_{x0}=\int_x^0\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}x\boldsymbol{i}=\int_x^0(-Ax+Bx^2)\,\mathrm{d}x=\frac{A}{2}x^2-\frac{B}{3}x^3$$

（2）质点由 $x=2\,\text{m}$ 运动到 $x=3\,\text{m}$ 时势能的增量为

$$\Delta E_p=E_p\big|_{x=3}-E_p\big|_{x=2}=\frac{5}{2}A-\frac{19}{3}B$$

保守力做的功为

$$A=\int_2^3F\mathrm{d}x=-\left(\frac{5}{2}A-\frac{19}{3}B\right)$$

可见，保守力做的功等于势能增量的负值，即 $A=-\Delta E_p$。

例 1-9　在水平冰面上以一定速度向东行驶的炮车，朝斜向上方向发射一枚炮弹，对于炮车和炮弹这一系统，在此过程中（忽略冰面摩擦力及空气阻力）（　　）。

（A）总动量守恒

（B）总动量在炮身前进的方向上的分量守恒，其他方向的动量不守恒

（C）总动量在水平面上任意方向的分量守恒，竖直方向分量不守恒

（D）总动量在任何方向的分量均不守恒

分析：取炮车和炮弹为一系统，在发射炮弹过程中，所受外力为重力和地面支持力，

均是垂直方向，在水平方向不受外力作用，所以总动量在水平面上任意方向的分量守恒，竖直方向分量不守恒，总动量不守恒，故选（C）。

例 1-10 在一半径为 R，质量为 m 的静止水平圆盘的边上，站着一个质量为 m' 的人，圆盘可绕通过中心的竖直轴转动，转轴与轴承之间的摩擦阻力可忽略不计。当人沿圆盘边缘走一周回到盘上原始位置时，圆盘将转过多大角度？

分析：取人和圆盘为定轴转动系统，系统的角动量守恒。注意，角动量守恒定律中人和圆盘的角速度都相对于同一惯性参考系，人相对圆盘边缘走一周时，人相对地转过的角度与圆盘转过的角度之和为 2π。

解：人、圆盘系统对竖直轴的角动量守恒，开始时，人和圆盘都静止，设 t 时刻人相对地的角速度为 ω_1，转动惯量为 J_1，圆盘相对于地的角速度为 ω，转动惯量为 J。

由角动量守恒，得

$$0 = J\omega + J_1\omega_1 = \frac{1}{2}mR^2\omega + m'R^2\omega_1$$

得

$$\omega = -\frac{2m'}{m}\omega_1$$

负号表示圆盘和人绕轴转动的角速度方向相反，上式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{2m'}{m}\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}$$

式中，$\mathrm{d}\theta$ 为 $\mathrm{d}t$ 时间内圆盘相对地转过的角度，$\mathrm{d}\theta_1$ 则为人相对地转过的角度，对上式积分，可得

$$\Delta\theta = -\frac{2m'}{m}\Delta\theta_1$$

人沿圆盘走一周时，应有 $\Delta\theta + (-\Delta\theta) = 2\pi$，所以，圆盘相对地转过的角度为

$$\Delta\theta = -\frac{2m'}{m+2m}\times 2\pi$$

例 1-11 如图 1.6 所示，一轻弹簧与一匀质细杆 $l = 1\,\mathrm{m}$ 相连，弹簧劲度系数 $k = 40\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$，细杆质量 $m = 3\,\mathrm{kg}$，杆可绕 C（垂直纸面的）轴无摩擦转动，且当 $\theta = 0$ 时，弹簧为原长。问：细杆在 $\theta = 0$ 的位置时至少应具有多大的角速度才能使其转到水平位置？

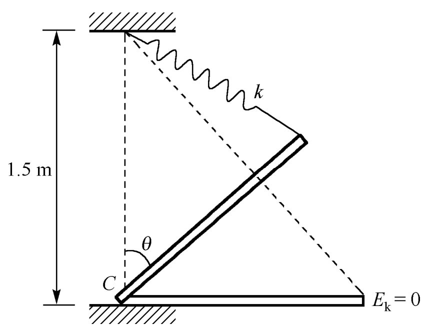

图 1.6 例 1-11 题图

分析：由题可知杆绕 C 轴无摩擦转动，所以轴承摩擦力为零，此时杆在转动过程中只有重力和弹簧弹力做功，因而杆、地球和弹簧系统机械能守恒。

解：取弹簧、杆、地为系统。系统在 $\theta = 0$ 位置的机械能为