第 1 章　实验数据的处理

1.1　测量误差

1.1.1　测量的基本概念

1．测量和测量值单位

测量是物理实验的基本操作，其实质是将待测物体的某物理量与相应的标准做定量比较。测量的结果应包括数值（度量的倍数）、单位（所选定的标准物理量）以及结果的可信赖程度（用误差来表示）。

2．直接测量、间接测量和等精度测量

测量分为直接测量和间接测量。直接测量是指把待测物理量直接与作为标准的物理量相比较，例如用直尺测量长度。间接测量是指按一定的函数关系，由一个或多个直接测量量计算出另一个物理量。例如，直接测量一圆柱体的直径（D）和高度（h），再根据 $V=\pi D^2h/4$ 计算出圆柱体的体积。

仪器的不同、方法的差异、测量条件的改变以及测量者素质的高低都会造成测量结果的变化，这样的测量是不等精度测量。而同一个人，用同样的方法，使用同样的仪器并在相同的环境条件下对同一物理量进行的多次测量，叫做等精度测量。尽管各测量值可能不相等，但没有理由认为哪一次（或几次）的测量值更可靠或更不可靠。

实际上，一切物质都在运动中，没有绝对不变的人和事物。只要其变化对实验的影响很小乃至可以忽略，就可以认为是等精度测量。以上所述各项，如有一项发生变化，导致明显影响实验结果，即为不等精度测量。以后说到对一个量的多次测量，如无另加说明，都是指等精度测量。

3．测量的正确度、精密度和精确度

对同一物理量进行多次等精度测量，其结果也不完全相同。这好比打靶，子弹落点会有一定的弥散性。结果比较接近客观实际的测量正确度高；结果彼此距离相近的测量精密度高；而既精密又正确的测量则精确度高。正确度表示测量结果系统误差的大小，精密度表示测量结果随机误差的大小，精确度则综合反映出测量的系统误差与随机误差的大小。

4．测量的系统误差

测量仪器的零点不准、砝码磨损乃至测量环境和条件的变化都可能造成测量结果的不正确。没被发现或没校正系统误差的测量，其误差最终都应反映在测量结果上。因其对实验结果的影响很大，有时还难以发现，所以有必要予以重视。有些系统误差是遵从一定规律的，譬如卡尺端面缺损，地磁场对磁测量结果的影响，量具长度与温度的关系，单摆运动周期公式中忽略了周期与摆角的关系等，这些理论上的欠缺、公式的近似、仪器零位不准以及环境的影响等，都会使测量值恒偏大（偏小）或遵从一定的规律变化，这样的误差叫做可定系统误差。可定系统误差一般不服从统计规律，通过修订可以恢复为标准值。

有时系统误差在一定条件下表现出随机性，如米尺刻度不均匀。如果每次都用该米尺的同一部分进行测量，则误差恒定，但如用米尺的不同部位多次测量，其结果又具有统计规律，这样的系统误差称作未定系统误差。我们应学会发现系统误差，进而减小、校正乃至消除它的影响。

1.1.2　测量仪器的精度和测量值的有效数字

1．仪器的精确度等级

测量结果的精密度和正确度是与测量仪器的精确度等级密切相关的，我们通常用仪器的精度和仪表的级别来描述仪器的这种性质。

仪器的精度通常指它能分辨的物理量的最小值。仪器的精度越高，即它的分度越细，允许的偏差就越小。由于多种因素，如材质不均匀、加工装配的缺欠以及环境（如温度、湿度、震动、杂散光、电磁场等）的影响，仪器的精度受到一定的限制。

按照标准，在正常使用条件下（如温度、湿度范围、放置方式、额定功率等都符合要求），用某种级别的仪器进行测量时，对最大允许偏差有具体规定，这种最大允许偏差也叫仪器的极限误差或公差，我们用 Δ_e 来表示。Δ_e 可在产品说明书和仪器手册中查到。

仪表的级别和最大允差有关。如模拟式（指针式）电表级别分为 5.0、2.0、1.5、1.0、0.5、0.2、0.1 等，每一量程的最大允差 Δ_e=量程×级别%。它表示在该量程下正确使用仪表进行测量，结果可能出现的最大误差。而数字式电表测量结果的误差较为复杂，通常表示为读数×某百分数＋最末位的几个单位（具体见说明书）。

一般而言，有刻度的仪器、量具的最大允许偏差大约对应于其最小分度值所代表的物理量。对于数字式仪表，测量值的误差往往在于所显示的能稳定不变的数字中最末一位的半个单位所代表的物理量。应当说明，“最大允差”是指所制造的同型号同规格的所有仪器中有可能产生的最大误差，并不表明每一台仪器的每个测量值都有如此之大的误差。它既包括仪器在设计、加工、装配过程中乃至材料选择中的缺欠所造成的系统误差，也包括正常使用过程中测量环境和仪器性能随机涨落的影响。

2．测量值的有效数字

对于标刻度的量具和仪器，如果被测量量很明确，照明好，仪器的刻度清晰，要估读到最小刻度的几分之一（如 1/l0、1/5、1/2)。这最小刻度的几分之一，即为测量值的估计

误差，记作 Δ_a。测量值中能读准的位数加上估读的这一位称为有效数字。如用米尺测量书本上两条平行细线之间的距离，应能估读到最小刻度（1mm）的十分之一。

人们常把能读准的数字叫可靠数字，估读的一位数字叫可疑数字，测量值的误差往往在这最后一位。用数字式仪表测量，凡是能稳定显示的数值都应记录下来，其数值的位数就是该测量值的有效数字。如用某数字万用表测电压，显示值为 217V，位数为 3，它的有效数字位数就是 3 位。如果测量值的末位或末两位数字变化不定，应当记录稳定的数值加下一位正在显示的值，或者根据其变化规律，四舍五入到读数稳定的那一位。如果两位以上的数字都变化不定，应考虑选择更合适的量程或更合适的仪器。如用米尺测量一个边缘磨损的桌子的长度，因被测量自身的不确定性，就只能读到毫米了，表示估计误差在毫米这一位。

1.2　测量结果的有效数字

1.2.1　有效数字的一般概念

任何一个物理量的测量结果总是存在一定的误差，表示测量值的数值时不应随意取位，而是要有一定意义的表示法。

例如，米尺的最小分度值为 1mm，用它测量一个物理量的长度，读数为 l=282.3mm，这 4 个位数中，前 3 位是肯定的，称为可靠数字，最后一位是不确定的，称为可疑数字。我们把测量结果中可靠的几位数字加可疑的一位数字统称为测量结果的有效数字。有效数字的最后一位虽然是可疑的，即是有误差的，但它在一定程度上反映了客观实际（如仪器的精度或仪表的级别），因此它是有效的。

有效数字的位数与十进制单位变换无关，即与小数点的位置无关。因此，用以表示小数点位置的“0”不是有效数字。例如 1.35cm 换成以米为单位时写作 0.013 5m，但仍为 3 位有效数字。可见，“有效数字是小数点后的几位”的说法是错误的。

当“0”不是用作表示小数点位置时，此“0”也是有效数字，如 1.003 5cm，有效数字是 5 位，2.00cm 有效数字是 3 位，显然，数据最后的“0”不能随便添上，也不能随便去掉。

如果一个数值很大而且有效数字位数不多，则数值大小与有效数字位数就发生矛盾，为避免这种矛盾，在物理实验中常用一种被称为标准式的写法，就是任何数值都只写出有效数字，而数量级则用 10 的幂次去表示。例如，3.40×10^4μm 仍为 3 位有效数字。

根据有效数字的定义，对仪器读数时，必须读到估读的一位。例如最小分度是毫米的尺子，测量时一定要估读到 1/10mm 那一位。但有的指针式仪表，它的分度较窄，而指针较宽（大于最小分度的 1/5），这时要估读到最小分度的 1/10 有困难，可以估读到最小分度的 1/5 甚至是 1/2。有效数字的位数与相对误差之间有一定的关系，如果误差数值取一位，最小数字是 1，最大数字是 9；三位有效数字最小是 100，最大是 999（这里假定从个位数算起），则与三位有效数字相对应的相对误差是 10^{-1}~10^{-3}，这是一个范围；与此类似，四位

有效数字的相对误差是 10^{-2}~10^{-4}，等等。因此在进行误差分析时，有时讲误差有多大，有时只讲有几位有效数字。

1.2.2 有效数字的运算规则

正确运用有效数字的运算规则，既可以解决在数值计算中因各量取值位数的多少不同而影响实验结果原有的精确度，又可避免进行本来不必要的取位过多运算。

用误差决定有效数字的位数是处理有效数字运算的基本依据，这里所讲的误差是指扣除了可定系统误差以后的合成误差。

因此，不管是什么运算，如果给出了各个量的误差，就一律先根据误差传递公式计算最终的合成误差，然后用误差来决定有效数字的位数。由于误差是在一定置信概率下得出的，所以在一般情况下，误差的有效数字只取一位，在特殊情况下，不超过两位，再多就没有意义了。在本书中，我们一律取误差的有效数字为一位。

将有效数字的定义与误差只取一位结合起来，即任何测量结果，其数值的最后一位要与误差所在的这一位取齐。例如，单摆测量重力加速度实验中 g=981.2±0.8cm/s^2，误差只取一位，测量结果的有效数字的末位是和误差在同一位的数字 2。一次直接测量结果的有效数字由估计的最大允差决定；多次直接测量结果的有效数字由其合成展伸误差的末位确定；间接测量结果的有效数字也是先根据误差传递公式求出结果的合成展伸误差，再根据末位取齐原则确定有效数字。

单次测量后不计算误差时，测量结果的有效数字位数只能按以下的规律初步确定。

1．加减法的运算

根据误差传递公式，加减运算结果的误差大于参与运算的各分量中任一个的误差，所以加减运算后的有效数字位数则以参与运算的各分量的有效数字的最后一位数上最大的为准，其他各分量在运算过程中保留到它的下一位，最后还与它取齐。

［例 1-1］ $N=A-B+C+D$，A=71.3cm，B=0.753cm，C=6.262cm，D=271cm，求 N。

A、B、C、D 中的 D 的最后一位是个位，即误差发生在个位上，于是其他各量（包括常数）保留到小数点后的一位，即

$$N=71.3-0.8+6.3+271=347.8\text{cm}$$

最后与 D 取齐，即取 N=348cm。道理很简单，即最后运算结果的误差不会小于个位数（271cm 的误差是个位数），这样取值已经很“保险”了。

2．乘除法的运算

已知乘除运算结果的相对误差应大于参与运算的各分量中任何一个量的相对误差，而一般来说有效数字位数越少，其相对误差则越大，这个规律只是大致上是这样的，所以乘除运算的有效数字运算规则也是近似的。

乘除法的有效数字运算规则规定，以参加运算的几个量中有效数字位数最少的分量为准，其他的分量（包括常数），保留到此上述分量的有效数字多一位来进行运算。最后的结果在一般情况下可以取到与该最少位数分量的位数相同，特殊情况下应多取一位。

［例 1-2］ $N=\dfrac{ABC}{D}$，A=39.5，B=4.084 37，C=0.001 3，D=867.8，求 N。

A、B、C、D 中的 C 的有效数字位数最少，是两位，则其余各量运算时有效数字取 3 位，有

$$N=\frac{39.5\times 4.08\times 0.001\ 3}{868}=2.4\times 10^{-4}$$

这里 N 的结果取两位。因为根据误差理论，合成误差总是大于或至少等于任一项分量的误差（乘除法是相对误差），所以，以有效数字位数最少的，即相对误差最大的分量 C 为准，相对误差至少为 1/13≈2/24，亦即结果 2.4×10^{-4} 的误差至少为 0.2×10^{-4}。故保留两位也就够了。

如果在此例中，C=0.006 5，则

$$N=\frac{39.5\times 4.08\times 0.006\ 5}{868}=1.21\times 10^{-3}$$

这时要将 N 的结果多保留一位，因为分量 C 的相对误差至少为 1/65，如果 N 的相对误差仅由它决定，则约为 1/121，亦即 N 的误差至少是 0.02×10^{-3}，所以 N 保留 3 位有效数字。

可见，为了稳妥起见，乘除法运算结果取位办法应该是：若结果的第一位数的数值大于位数最少的分量的数值，运算结果的位数只需取与这个分量的位数相同即可；如果结果的第一位数的数值小于位数最少的分量的第一位数数值，运算结果的位数就需比这个分量的有效数字位数多一位；如果二者的第一位数数值相同，则根据第二位酌情处理。

在混合四则运算中要按部就班地运用有效数字的四则运算法则。

［例 1-3］ $L=L_1(a+b)$，已知 L_1=3.187 95cm，a=1 为常数，$b=2.0\times10^{-3}$，求 L。

$$\begin{aligned}L&=L_1(a+b)=3.187\ 95\times(1+0.002\ 0)\\&=3.187\ 95\times 1.002\ 0=3.194\ 3\text{cm}\end{aligned}$$

这里 b 虽然只有两位有效数字，但由于 1 是常数，即 1=1.000 0……，于是 $a+b=1+b=$ 1.002 0 为 5 位。

结果取 5 位即可，因为 1.002 0 的相对误差至少为万分之一，所以，3.194 3 保留 5 位就足够了（1/10 000≈3/31 943）。

［例 1-4］ $y=\dfrac{8.042}{6.038-6.034}+30.96$，求 y。

$$y=\frac{8.042}{6.038-6.034}+30.96=\frac{8.0}{0.004}+30.96=2.0\times 10^{3}$$

这里，因为 6.038−6.034 结果为一位有效数字，于是将 8.042 取两位有效数字，得 $8.0/0.004=2.0\times10^3$，结果 2.0×10^3 取两位有效数字，意味着误差在百位上，因而，将 30.96 抹掉就可以了，即最后一步加法相当于加上 0。

3．函数运算

在进行函数运算时，有效数字的取位不能用有效数字的四则运算法则。根据误差理论，对某些简单的函数运算可以总结出一般规律来确定计算结果的有效数字取位。在一般情况下，可以用微分方程式求得误差，再根据末位对齐原则确定结果有效数字的位数，为了“保

险”起见，都以测量值的最后一位误差取 1 考虑，这里仅举一例简要说明。

例如：x=56.7，三位有效数字，$\ln x$=4.038，小数三位，有效数字四位。

这是因为 $\mathrm{d}(\ln x)=\mathrm{d}x/x$，在“保险”的情况下取 $\mathrm{d}x$ 为 x 的最后一位上的 1。x 如果有三位有效数字，则不管 x 本身有多大，$\mathrm{d}x/x\approx10^{-3}$，即总是千分之几，于是 $\ln x$ 则保留到小数点后 3 位。

4．尾数的舍入

通常所用的位数舍入法则是四舍五入。对于大量位数分布概率相同的数据来说，这样的舍入是非常合理的，因为总是入的概率大于舍的概率。现在通用的是：尾数“小于五则舍，大于五则入，等于五则把尾数凑成偶数”的法则。这种舍入法则的依据是这样做以后使位数的舍入概率相等。

例如，1.535 取三位有效数字为 1.54，12.405 取四位有效数字为 12.40。

1.3　常用的数据处理方法

我们经常通过实验探索两种物理量之间的关系，即把一种物理量当成自变量 x，测量不同的自变量 x_i 所对应的另一种物理量 y_i 的值。这样便得到了两列测量值：x_1，x_2，…，x_n 和 y_1，y_2，…，y_n，n 是测量次数。

也可以说得到了 n 组测量值：$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，…，$(x_n，y_n)$。如何处理这些数据，以便找出 x、y 之间的关系呢？这一节就来讨论常用的数据处理的方法。

1.3.1　列表法

在记录实验数据时，最好“横平竖直”地列成表，清晰明了，容易反映出规律性的东西，也容易发现问题。列表法应注意以下几点：

① 忠于实验结果，记录原始数据；

② 表中应标明物理量及其单位；

③ 如果多次等精度测量，应标出测量序号，表后留出平均值、标准差和 A 类标准误差的空位，以便进一步做数据处理；

④ 如果记录两组相关物理量，一般把作为自变量的数据列在上方，把作为因变量的数据对应列在下方，便于反映出物理量之间的内在关联；

⑤ 可把每次测量的估读误差一并写在数据后（也可另加注明）；

⑥ 如果在一个实验中有两个以上的数据表，最好在每个表上方标记名称。

列表法也是其他数据处理方法的基础。

［例 1-5］ 在求圆柱体体积的实验中，将 6 次测量的数据列表。

在 D、h 数据表 1-1 中，n 为序号；在物理量名称后的斜线后注明单位；$\overline{x}$、σ 分别为测量列平均值、标准差。

表 1-1　D、h 数据表

n	1	2	3	4	5	6	$\bar{x}$	σ
D/mm	0.832	0.829	0.830	0.835	0.828	0.828	0.830 3	0.002 7
h/mm	3.24	3.26	3.22	3.20	3.24	3.23	3.238	0.015

注意，多次等精度测量的平均值 $\bar{x}$ 的有效数字可能与一次测量时按仪器读数规则得到的有效数字不同。

1.3.2　作图法

1．图示法

选取合适的坐标纸，把两组互相关联的物理量的每一对测量值标记成坐标纸上的一个点，用符号“＋”表示，叫做数据点。然后根据实验的性质，把这些点连成折线，或拟合成直线或曲线，这就是图示法。对于仪器校准曲线，即用高等级仪器校准低等级仪器，可将直角坐标的横轴作为低级表读数，纵轴作为高级表读数与低级表读数之差。把各校准点连成折线，如图 1-1 所示。

在多数情况下，两个相关物理量之间的关系在一定范围内应是渐变的。因此，应该把各数据点拟合成一条光滑连续的曲线或直线。拟合的原则是使各数据点（沿纵轴方向）到所拟合的曲线的距离之和为最小，在数学上这叫最小二乘法，下文还会进一步介绍。根据这个原则，各数据点要均匀分布在曲线的两侧，这是用几何的方法对诸多数据所反映的物理过程的一种“平均化”、“光滑化”操作。

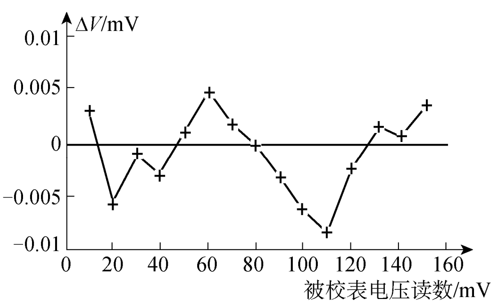

图 1-1　电压表的校准曲线

图示法的最大特点是直观。理想气体 p–V 图上用双曲线描述等温过程是大家最熟悉的图示法。作图要使用细铅笔，数据点应标成一个小“＋”叉，若要在同一张纸上画几条曲线，各线相应的数据点所使用的符号应不同，如“＋”、“×”、“□”、“⊙”等。

图示法要注意以下几点：

① 要根据需要选用直角坐标纸、对数坐标纸、半对数坐标纸和极坐标纸。在直角坐标纸上描述 $V = V_0 e^{-ad}$ 的 V–d 图是一个指数衰减曲线，而在半对数坐标纸上，在对数轴上标记 V，V–d 图就成了一条直线。

② 坐标纸面积为 25cm×20cm，一般应用整张纸作图，至少用半张纸。如果实验数据

很精确，而坐标纸很小，作图的误差就远远超过了实验误差。

③ 用数据点拟合非线性关系的曲线时，最好借助云形规（也称曲线板），以使拟合的曲线光滑。

④ 每个图都要在底部或顶部空白处标出图的名称，如“电压表校准曲线”、“p−V图”等。

⑤ 要画坐标轴，轴上应有标度值，标度值不一定从零开始。习惯上，横轴代表自变量，纵轴代表因变量。坐标轴端可画箭头，在箭头外标明该轴所代表的物理量名称及单位（最好都用符号表示，如 t/℃）。如果不画箭头，则在轴中部、轴的外侧标记。在纵轴上标记时，应将纸旋转 90°，即沿着轴的方向书写。

⑥ 各数据点到所拟合的曲线（沿纵轴方向）的距离之和应为最小。测量值都有误差，把纵轴所代表的物理量的测量值及其误差用一定长的直线段标在图上是有好处的。这个小线段叫做误差杆，杆的中心点对应于测量值。误差杆用“Ī”、“Φ”或“Ī”等表示，其长度代表该测量值的误差范围±Δy_i。

［例 1-6］ 在验证 $V = V_0\mathrm{e}^{-ad}$ 关系并求 a 值的实验中，得到表 1-2 的数据。V 为直流电压，d 为厚度，ΔV 为测量值的误差。按数字万用表说明书，ΔV=读数＋末位的 10 个单位。作 V−d 图（见图 1-2）。

表 1-2　V−d 数据表

d/μm	25	50	75	100	125	150	175
V/V	44.26	37.71	31.19	25.79	20.90	18.36	15.00
ΔV/V	1.9	1.6	1.3	1.1	0.9	0.8	0.6

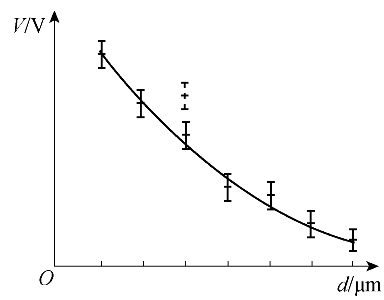

图 1-2　V−d 关系

图 1-2 描述了 V−d 关系，各点误差杆长度±ΔV 不相等。假设测量时误把电压 31.19 记为 37.19，则作图时会发现有 6 个点可以很好地拟合成一条指数衰减曲线，唯有（75，37.19）这个点“脱离群众”。而若“照顾”这个点，就无法很好地拟合其他的点。可不可以舍弃这个点呢？

当然，严格地讲应重做实验，但有时无法或没必要重做，我们可以参照误差理论中剔除坏值的 3σ 原则来处理，如果这个点到按其他点所拟合的曲线（沿纵轴方向）的距离大于 3 倍 ΔV（即 1.5 倍误差杆的长度），就可以舍弃该点。不画误差杆则难以判断。应注意，曲线拟合是对多组数据统计意义下的操作，若一共只有三四个点，就不能草率地舍弃任何一点了。从图中可以看出，各数据点误差杆长度不同。

如果作 $\ln V\text{-}d$ 图，则纵坐标轴误差杆长度为 $\frac{2\Delta V}{V}$，对所有数据点，均近似相等，为 0.08。可见误差杆长度与坐标系选取有关。

2．图解法解实验方程

为简单起见，若数据点拟合成一条直线，则可以进一步求出反映该实验物理规律的解析方程——线性方程。线性方程的一般形式为

$$y=mx+b \tag{1-1}$$

式中，参数 m 为直线的斜率，b 为直线在 y 轴上的截距。

测定某种金属的电阻温度系数实验数据见表 1-3。$R\text{-}t$ 图为一直线，如图 1-3 所示。

表 1-3　$R\text{-}t$ 数据表

t/℃	18.8±0.3	30.4±0.3	38.3±0.3	52.3±0.3	62.2±0.3
R/Ω	32.55±0.10	34.40±0.10	35.25±0.10	37.15±0.10	39.00±0.10

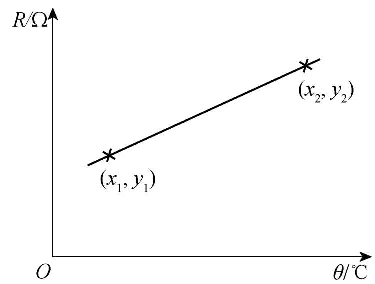

图 1-3　$R\text{-}t$ 关系

在直线上选取两个相距较远的点$(x_1，y_1)$和$(x_2，y_2)$，如（20.0，32.67）和（60.0，38.55）则

$$m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1) \tag{1-2}$$

$$b=(y_1x_2-y_2x_1)/(x_2-x_1)=y_2-mx_2 \tag{1-3}$$

从图中所选的两个点，我们得到

$$m=\frac{38.55-32.67}{60.0-20.0}\ \Omega/℃=0.144\ \Omega/℃$$

$$b=(38.70-0.144\times 63.0)\ \Omega=29.73\ \Omega$$

图解法求解实验方程，其参数的误差与所有测量数据的误差都有关，也与坐标纸的种类、大小以及作图者自身的技能有关。如果坐标纸足够大，并忽略描点和作图的误差，则由仪器允差引起的方程参数的误差可由下列公式求得

$$\frac{\Delta m}{m}=\sqrt{\frac{2\overline{(\Delta X)^2}}{(X_n-X_1)^2}+\frac{2\overline{(\Delta Y)^2}}{(Y_n-Y_1)^2}},\ \Delta b=\Delta m\sqrt{(X_n^2+X_1^2)/2} \tag{1-4}$$

其中，

$\overline{(\Delta X)^2}=\frac{1}{n}\sum(\Delta X_i)^2$，$\overline{(\Delta Y)^2}=\frac{1}{n}\sum(\Delta Y_i)^2$ 。

根据式（1-4），上例中电阻温度系数的相对误差 $\dfrac{\Delta m}{m}=0.024$ ，Δm=0.003 Ω/℃。故 m=(0.144±0.003) Ω/℃，Δb=0.14 Ω。

1.3.3 逐差法

当自变量等间隔变化，而两物理量之间又呈线性关系时，我们除了采用图解法、最小二乘法以外，还可采用逐差法。如弹性模量测量实验中，在金属丝弹性限度内，每次加载质量相等的砝码，测得光杠杆标尺读数 r_i；然后再逐次减砝码，对应地测量标尺读数 r_i'；取 r_i 和 r_i' 的平均值 $\overline{r_i}$ 。若设每加（减）一个砝码引起读数变化的平均值为 $\overline{b}$ ，则有

$$\begin{aligned}\overline{b}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{r}_{i+1}-\overline{r}_i)\\&=\frac{1}{n}[(\overline{r}_2-\overline{r}_1)+(\overline{r}_3-\overline{r}_2)+\cdots+(\overline{r}_n-\overline{r}_{n-1})]=\frac{1}{n}(\overline{r}_n-\overline{r}_1)\end{aligned} \tag{1-5}$$

从上式看到，只有首末两次读数对结果有贡献，中间的测量数据相互抵消未被利用，失去了多次测量的好处。这两次读数误差将对测量结果的准确度有很大影响。

为了避免这种情况，平等地运用各次测量值，可把它们按顺序分成相等数量的两组 r_1，…，r_p 和 r_{p+1}，…，r_{2p}，取两组对应项之差 $\overline{b}_j=(\overline{r}_{p+j}-\overline{r}_j)$，$j=1,2,\cdots,p$ ，再求平均，即

$$\overline{b}=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\overline{b}_j=\frac{1}{p}[(\overline{r}_{p+1}-\overline{r}_1)+\cdots+(\overline{r}_{2p}-\overline{r}_p)] \tag{1-6}$$

相应地，它们对应砝码质量为 $m_{p+j}-m_j$，j=1，2，…，p。这样处理可以使各测量值都能得到应用，保持多次测量的优越性。

注意：逐差法要求自变量等间隔变化而函数关系为线性。

［**例 1-7**］弹性模量实验数据见表 1-4。

已知每次加减砝码质量 Δ_m=(0.500±0.005)kg，标尺刻度误差为 Δ_r=±0.3mm，求标尺读数与砝码质量之间的线性比例系数 α。

表 1-4　弹性模量实验数据表

Δm / kg	0	0.500	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500
r_j / mm	90.0	101.5	112.5	124.5	135.3	146.0	158.0	170.0
r_j' / mm	88.4	100.0	111.0	122.8	134.0	147.6	158.4	170.0
$\overline{r}_j$ / mm	89.2	100.8	111.8	123.4	134.6	146.8	158.2	170.0
$\Delta r=(\overline{r}_{j+4}-\overline{r}_j)$ / mm	45.4		46.0		46.4		46.6	

解：将 8 个数据分成两组，j=0，1，2，3

$$\alpha = \frac{\overline{\Delta r}}{\overline{\Delta m}} = \frac{\sum(\bar{r}_{j+4} - \bar{r}_j)}{\sum(\bar{m}_{j+4} - \bar{m}_j)}$$

由上表数据知

$$\overline{\Delta m} = 2.000\text{kg},\ \overline{\Delta r} = 46.1\text{mm},\ \sigma(\Delta r)\text{=0.53mm}$$

则

$$\bar{\alpha} = \frac{\overline{\Delta r}}{\overline{\Delta m}} = \frac{46.1}{2.000} / \text{mm=23.05kg/mm}$$