

## 第 2 章 连续时间信号的时域分析

信号是传递信息的工具，它的基本形式是随时间变化的电流或电压信号，通常情况下，可以用数学函数公式表示，也可以用它的函数图像即信号波形来表示。为了讨论方便，本书中常常把信号与函数两个术语视为同义词。本章讨论了信号的分类与基本运算，介绍了几种典型连续时间信号和奇异信号，即连续时间信号的时域分析。连续时间信号的变换域分析将在第 5 章详细分析。

### 2.1 信号的分类

信号的形式多种多样，因此其种类也很多，从不同角度可以有不同分类方法。

#### (1) 确定性信号和随机信号

按分布性质不同，信号可以区分为确定性信号 (deterministic signal) 和随机信号 (random signal)。对于给定的某一时刻，有确定的函数值与之对应，这种信号称为确定性信号或规则信号。例如，正弦信号就是确定性信号。然而，实际传输的信号往往具有不可预知的不确定性，这种信号称为随机信号或不确定信号。语音信号就是一种随机信号，空中传来的噪声、电路元件中的热噪声电流等都是随机信号。随机信号在每一确定时刻上的取值难于确定，只能通过大量实验数据，利用概率论和随机过程的数学方法进行研究。本书只讨论确定性信号。

#### (2) 连续时间信号和离散时间信号

按函数自变量取值是否具有连续性，信号可以区分为连续时间信号 (continuous time signal) 和离散时间信号 (discrete time signal)。如果对于所讨论的时间范围内，在任意时刻点上 (除若干不连续点外) 函数都有确定的值与之对应，这种信号就称为连续时间信号。例如，图 2.1-1(a) 所示的正弦信号是典型的连续信号，图 2.1-1(b) 所示的信号在  $t_1$  处的  $f(t)$  值发生跳变，但它仍是连续时间信号。而离散时间信号，在时间上是离散的，它只在某些时间的离散点上给定函数值，在其他时间上都没有定义。图 2.1-2 所示的信号，就是离散时间信号。

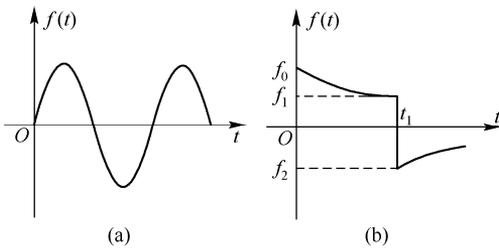


图 2.1-1 连续时间信号

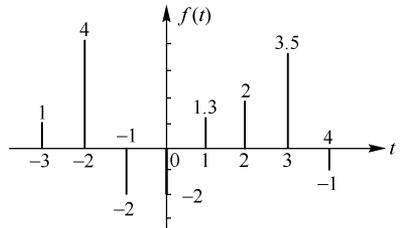


图 2.1-2 离散时间信号

#### (3) 周期信号和非周期信号

按函数是否具有周期性，信号可以区分为周期信号 (periodic signal) 和非周期信号 (nonperiodic (aperiodic) signal)。如果对所有的  $t \in (-\infty, \infty)$ ，存在一个最小的正常数  $T$ ，使得

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1-1)$$

就称  $f(t)$  是以  $T$  为周期的周期信号，否则就称为非周期信号。周期信号就是依一定时间间隔  $T$

周而复始，而且是无始无终的。只要给出此信号在任一周期内的变化过程，便可确知它在任一时刻的数值。非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期信号的周期  $T$  趋于无限大，则成为非周期信号。

#### (4) 因果信号和非因果信号

按函数存在的区域，信号可以分为因果信号 (causal signal) 和非因果信号 (noncausal signal)。将  $t \geq 0$  接入系统的信号 (即在  $t < 0$  时为零的信号)，称为因果信号。反之，若  $t < 0$  时不等于零的信号，则称为非因果信号。

#### (5) 一维信号和多维信号

按函数自变量数目不同，信号可以分为一维信号 (one-dimensional signal) 和多维信号 (multi-dimensional signal)。若信号表示为时间  $t$  的函数，则这种信号是一维信号。一维信号的这种时间函数关系可以用数学表达式、波形图、数据表等方式来表达。 $\sin t, e^{-t}$  等具体函数表达式可以表示信号，亦可用  $f(t), x(t)$  等抽象的函数表达式表示信号。

对于一个函数，它的定义域是很重要的。用时间函数来表示的信号，其定义域就是信号存在的时间范围。例如， $\cos t (-\infty < t < \infty)$  和  $\cos t (t \geq 0)$  就是两个不同的信号，因为它们的时间范围不相同。为方便起见，凡时间范围为  $-\infty < t < \infty$  的，可以省略不写。也就是说，凡没有特别标明时间范围时，都认为  $t \in (-\infty, \infty)$ 。对应一维信号，还有二维信号、三维信号等多维信号。电视图像信号是典型的三维信号  $f(x, y, t)$ ，即它是平面空间  $x, y$  和时间  $t$  的三维函数。多维信号可以采用扫描等措施变换成一维信号。本书只讨论表示为时间函数的一维信号。

## 2.2 常用的连续时间信号

### 1. 实指数信号

在信号与系统分析中，指数信号 (exponential signal) 是重要的基本信号之一，它的表达式为

$$f(t) = Ae^{\alpha t} \quad (2.2-1)$$

式中， $\alpha$  是实数。若  $\alpha > 0$ ，则信号将随时间增大而增长，且  $\alpha$  越大，增长速度越快。若  $\alpha < 0$ ，则信号随时间增大而衰减，且  $|\alpha|$  越大，衰减速度越快。当  $\alpha = 0$  时，信号  $f(t) = A$ ，为一常数，称为直流信号。指数信号的波形如图 2.2-1 所示。

常见的指数信号是单边指数衰减信号，其表达式为

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.2-2)$$

式中， $\alpha > 0$ 。 $\alpha$  的倒数称为指数信号的时间常数 (time constant)，记为  $\tau$ ，其波形如图 2.2-2 所示。

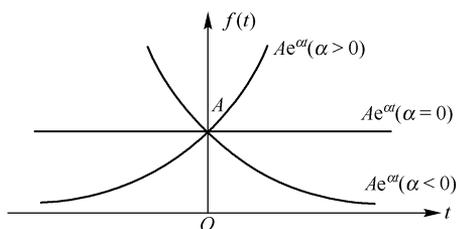


图 2.2-1 指数信号

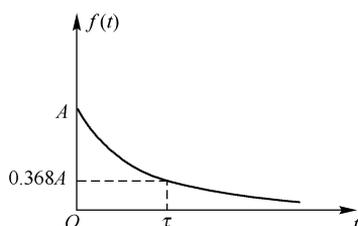


图 2.2-2 单边指数衰减信号

## 2. 正弦信号

正弦信号 (sine signal) 与余弦信号 (cosine signal), 两者只是在相位上相差  $\pi/2$ , 可以统称为正弦信号。其一般形式为

$$f(t) = A \sin(\Omega t + \theta) \quad (2.2-3)$$

式中,  $A$  为振幅 (amplitude),  $\Omega$  是角频率 (angular frequency),  $\theta$  为初相位 (initial phase)。上述三个量是正弦信号的三要素。它的波形如图 2.2-3 所示。

正弦信号是周期信号, 其周期 (period)  $T$  与频率 (frequency)  $f$  及角频率  $\Omega$  之间的关系为  $T = 1/f = 2\pi/\Omega$ 。

在信号与系统分析中, 经常要遇到单边指数衰减的正弦信号, 波形如图 2.2-4 所示。其表达式为

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} \sin \Omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.2-4)$$

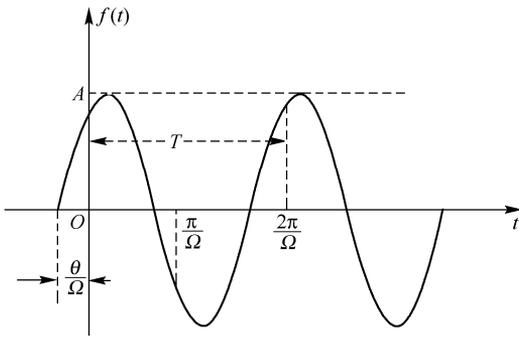


图 2.2-3 正弦信号

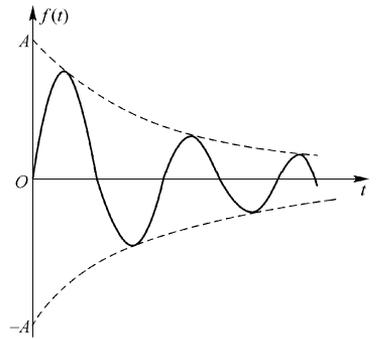


图 2.2-4 指数衰减的正弦信号

## 3. 抽样函数

抽样函数 (sampling function) 定义为  $\sin t$  与  $t$  之比, 表达式为

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (2.2-5)$$

抽样函数的波形如图 2.2-5 所示。由图可知,  $\text{Sa}(t)$  是偶函数 (even function), 在  $t$  的正、负方向振幅都逐渐衰减, 且当  $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$  时, 函数值为零。

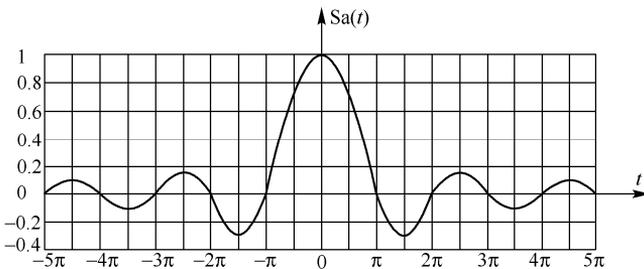


图 2.2-5 抽样函数

$\text{Sa}(t)$  函数具有如下性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi \quad (2.2-6)$$

## 4. 复指数信号

将实指数信号的指数因子换成复数, 则称为复指数信号(complex exponential signal), 其表达式为

$$f(t) = Ae^{st} \quad (2.2-7)$$

式中,  $s$  称为复频率(complex frequency), 它可以表示成  $s = \sigma + j\Omega$ ,  $\sigma$  为复指数  $s$  的实部(real part),  $\Omega$  为虚部(imaginary part)。借助欧拉公式, 可将式(2.2-7)展开成如下形式

$$f(t) = Ae^{st} = Ae^{(\sigma + j\Omega)t} = Ae^{\sigma t} \cos \Omega t + jAe^{\sigma t} \sin \Omega t \quad (2.2-8)$$

上式表明, 一个复指数信号可分解为实部与虚部两部分。其中, 实部为余弦信号, 虚部为正弦信号。指数因子的实部  $\sigma$  表征了正弦与余弦的振幅随时间变化的情况。若  $\sigma > 0$ , 则正弦、余弦信号是增幅振荡; 若  $\sigma < 0$ , 则为衰减振荡。指数因子的虚部  $\Omega$  则表示正弦和余弦信号的角频率。

## 2.3 奇异信号

在信号与系统分析中, 除了上述几种常用基本信号之外, 还经常遇到信号本身具有不连续点(跳变点)或其导数与积分具有不连续点的情况, 这类信号统称为奇异信号(singularity signal)或奇异函数。

### 2.3.1 单位斜变信号

单位斜变信号(unit ramp signal)也称为单位斜坡信号或单位斜升信号。它是从某一时刻随时间正比例增长的信号。如果从  $t=0$  开始按单位斜率增长, 则称为单位斜变信号, 用  $R(t)$  表示, 其数学表达式为

$$R(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.3-1)$$

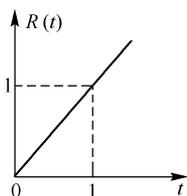


图 2.3-1 单位斜变信号

其波形如图 2.3-1 所示。

如果起始点移至  $t_0$ , 则应写为

$$R(t-t_0) = \begin{cases} t-t_0 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (2.3-2)$$

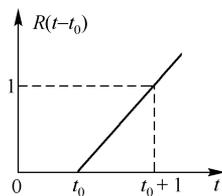


图 2.3-2 延时的单位斜变信号

这是延时的斜变信号, 其波形如图 2.3-2 所示。如果斜率(slope)不是 1, 而是  $A$  ( $A$  为大于零的常数), 则可以写为  $AR(t)$  或  $AR(t-t_0)$ 。

### 2.3.2 单位阶跃信号

单位阶跃信号(unit step signal), 用符号  $u(t)$  表示, 其数学表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.3-3)$$

波形如图 2.3-3 所示。在跳变点  $t=0$  处, 函数值未定义。

单位阶跃信号的物理实现如图 2.3-4 所示的电路, 假设开关  $S$ 、直流电源  $E$  及电容  $C$  均为

理想元件, 无内阻。当  $t = 0$  时, 开关 S 闭合, 由于电路中无损耗电阻存在, 所以电源电压立刻加到电容 C 两端。从而使电容 C 两端的电压从  $t < 0$  时的  $0V$  跳变到  $t > 0$  后的  $E = 1V$ 。这样, 电容 C 两端的电压就是单位阶跃信号。

如果开关 S 在  $t = t_0$  时刻闭合, 则电容 C 两端电压应是延时的单位阶跃信号, 其表达式为

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (2.3-4)$$

波形如图 2.3-5 所示。

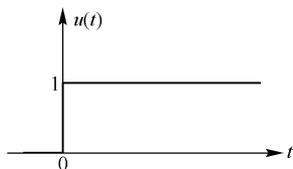


图 2.3-3 单位阶跃信号

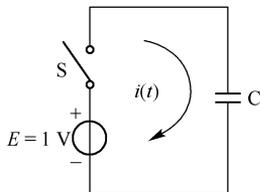


图 2.3-4 电容充电电路

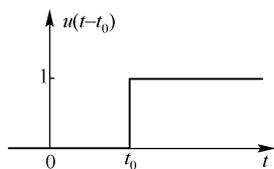


图 2.3-5 延时的单位阶跃信号

如果跳变值不是 1, 而是  $E$ , 则可以写成  $Eu(t)$  或  $Eu(t - t_0)$ 。

容易证明, 单位阶跃信号是单位斜变信号的导数, 即

$$u(t) = \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.3-5)$$

反之, 单位斜变信号是单位阶跃信号的积分, 即

$$R(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (2.3-6)$$

阶跃信号具有单边特性, 当任意信号  $f(t)$  与  $u(t)$  相乘时, 将使信号  $f(t)$  在  $t = 0$  之前的幅度为零。例如, 将余弦信号  $\cos t$  与  $u(t)$  相乘, 使其  $t < 0$  的部分变为零。

常利用阶跃信号与延时阶跃信号之差表示分段信号。例如, 图 2.3-6 所示的矩形脉冲  $G(t)$  可表示为

$$G(t) = u(t) - u(t - t_0) \quad (2.3-7)$$

利用单位阶跃函数还可以表示符号函数 (signum function)。

符号函数定义为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (2.3-8)$$

波形如图 2.3-7 所示。显然

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad (2.3-9)$$

反之, 也可用  $\text{sgn}(t)$  来表示  $u(t)$ , 即

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)] \quad (2.3-10)$$

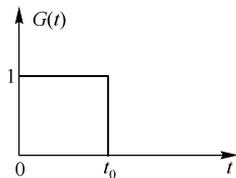


图 2.3-6 矩形脉冲

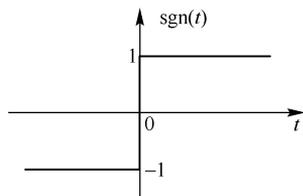


图 2.3-7 符号函数

### 2.3.3 单位冲激信号

某些物理现象, 需要用一个时间极短, 但取值极大的函数模型来描述。例如, 力学中瞬间作用的冲击力, 电学中电容器的瞬间充电电流, 还有自然界中的电闪雷鸣等。单位冲激信号

(unit impulse signal) 就是以这类实际问题为背景而引出的。

我们仍以图 2.3-4 所示的电路为例, 从物理概念上来解释冲激函数的意义。据 2.3.2 节分析已知, 当  $t=0$  时开关 S 闭合, 电容 C 上的电压  $v_C(t)$  是一个单位阶跃电压  $u(t)$ 。现在来计算电容 C 中的充电电流  $i_C(t)$ , 若设  $C = 1\text{F}$ , 显然充电电流  $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}$ , 由于当  $t \neq 0$  时,  $\frac{du(t)}{dt}$  均等于零, 而当  $t=0$  时,  $\frac{du(t)}{dt}$  是一个无限值, 因而充电电流  $i_C(t)$  在  $t=0$  时也是一个无限大值, 而在  $t \neq 0$  时均为零。这是因为在讨论过程中是将图 2.3-4 电路中的电源、开关及电容予以理想化而引起的。实际电路中, 必定存在损耗电阻, 这时电容上的电压  $v_C(t)$  将不会在  $t=0$  瞬间从 0 突变到 1, 而是存在一个过渡过程。假设电容上的电压  $v_C(t)$  在一定时间范围 ( $0 < t < \tau$ ) 之内按线性规律从 0 逐渐增大到稳定值 1。可以理解为,  $v_C(t)$  用图 2.3-8(a) 所示的电压来代替原理想的单位阶跃电压, 则电容 C 在  $0 < t < \tau$  范围内的充电电流  $i_C(t) = 1/\tau$ ; 而在  $t < 0$  与  $t > \tau$  范围内的充电电流  $i_C(t) = 0$ 。此时  $i_C(t)$  是一个幅度为  $1/\tau$ 、宽度为  $\tau$  的矩形脉冲, 该矩形脉冲的面积为 1, 如图 2.3-8(b) 所示。若将  $\tau$  逐渐减小并趋于零, 那么电压  $v_C(t)$  将逐渐趋近于单位阶跃函数, 同时电流  $i_C(t)$  的矩形脉冲宽度  $\tau$  也将趋于零, 而其幅度  $1/\tau$  则趋于无限大。但是, 无论  $\tau$  值如何变小, 脉冲面积却始终保持为 1。由此引出单位冲激函数, 用符号  $\delta(t)$  来表示。

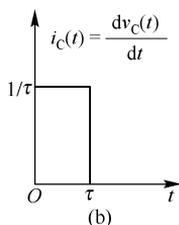
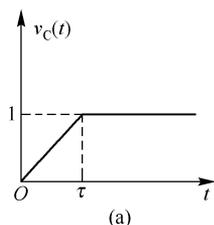


图 2.3-8 非理想情况下电容上的电压与电流

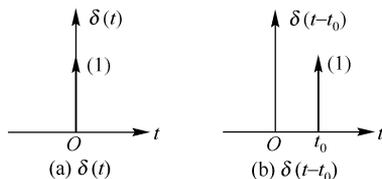


图 2.3-9 单位冲激函数

单位冲激函数  $\delta(t)$  可以定义为, 在  $t \neq 0$  时函数值均为零, 而在  $t=0$  处函数值为无限大, 且函数面积为 1。即可定义为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (2.3-11)$$

函数面积称为冲激强度。冲激强度为  $E$  的冲激函数, 应写为  $E\delta(t)$ 。

上式的定义是狄拉克 (Dirac) 给出的, 因此单位冲激函数  $\delta(t)$  又称为狄拉克函数, 也称为  $\delta$  函数。冲激函数用一带箭头的竖线表示, 它出现的时间表示冲激发生的时刻, 箭头旁边括号内的数字表示冲激强度。图 2.3-9(a) 是表示发生在  $t=0$  时刻的单位冲激函数; 而图 2.3-9(b) 则表示发生在  $t=t_0$  时刻的单位冲激函数, 则具有延时的冲激函数其数学表达式为

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 & t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{cases} \quad (2.3-12)$$

狄拉克用式(2.3-11)和式(2.3-12)给出了单位冲激函数的定义。从上述讨论过程中可以看出, 单位冲激函数  $\delta(t)$  是面积为 1 的单边矩形脉冲系列的极限, 因此单位冲激函数可以定义为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [u(t) - u(t-\tau)] \quad (2.3-13)$$

应指出, 这种极限不同于一般的极限概念, 可称为广义极限。因此, 冲激函数又称为广义函数 (generalized function), 它的定义方法也不是唯一的。其实, 单位冲激函数  $\delta(t)$  也可以利用其他

形式的规则函数系列的极限来定义，在求极限的过程中只要函数面积保持为 1。这些规则函数可以是对称矩形脉冲、对称三角形脉冲、双边指数函数和抽样函数等，如图 2.3-10 所示。利用这些规则函数系列极限给出单位冲激函数的表达式如下：

● 对称矩形脉冲 
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[ u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (2.3-14)$$

● 对称三角形脉冲 
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{|t|}{\tau} \right) [u(t + \tau) - u(t - \tau)] \quad (2.3-15)$$

● 双边指数函数 
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2\tau} e^{-|t|/\tau} \right] \quad (2.3-16)$$

● 抽样函数 
$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt) \right] \quad (2.3-17)$$

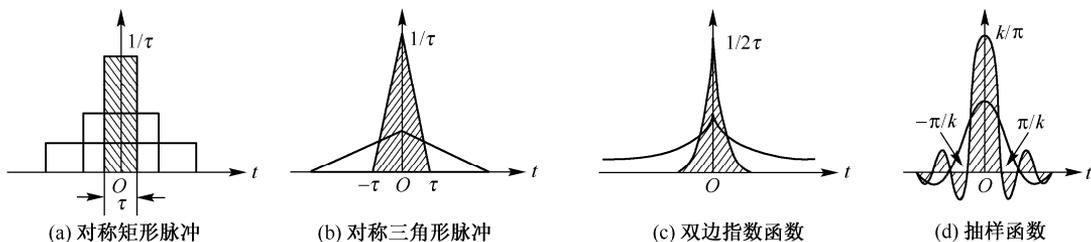


图 2.3-10 规则函数演变为冲激函数

冲激函数具有如下重要性质。

(1) 取样特性 (sampling property)。一个在  $t = 0$  处连续 (且处处有界) 的信号与单位冲激信号  $\delta(t)$  相乘，则其乘积仅在  $t = 0$  处得到  $f(0)\delta(t)$ ，而其余  $t$  处乘积均为零，即

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (2.3-18)$$

于是有 
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \quad (2.3-19)$$

类似地，对延时的单位冲激信号有

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (2.3-20)$$

和 
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad (2.3-21)$$

这里要求信号  $f(t)$  在  $t = t_0$  处连续且处处有界。

式(2.3-19)和式(2.3-21)表明了冲激信号的取样特性，也称为“筛选”特性。连续时间信号  $f(t)$  与单位冲激信号  $\delta(t)$  或  $\delta(t - t_0)$  相乘，并在  $-\infty$  到  $\infty$  时间内取积分，可以将冲激所在位置处的函数值  $f(0)$  或  $f(t_0)$  抽取 (筛选) 出来。这样可以用式(2.3-19)和式(2.3-21)来定义冲激函数  $\delta(t)$  或  $\delta(t - t_0)$ 。

(2) 冲激函数  $\delta(t)$  是偶函数，即

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (2.3-22)$$

(3) 冲激函数的积分等于阶跃函数。由式(2.3-11)可知，冲激函数的积分为

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)dt = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

将上式与  $u(t)$  的定义式(2.3-3)比较，就可得到如下重要关系：单位冲激函数的积分等于单位阶

跃函数，即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) dt = u(t) \quad (2.3-23)$$

反之，单位阶跃函数的导数等于单位冲激函数，即

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (2.3-24)$$

上式解释如下：阶跃函数在除  $t=0$  以外的各点都取固定值，其变化率都等于零，即导数为零。而在  $t=0$  处有不连续点，此跳变点的微分就产生冲激函数  $\delta(t)$ 。也就是说，对于函数的跳变点处的微分，就在跳变处出现一冲激函数。

### 2.3.4 冲激偶信号

冲激信号的微分称为冲激偶信号 (impulse doublet signal)，以  $\delta'(t)$  表示。同样可以利用规则函数系列取极限的概念引出  $\delta'(t)$ 。这里以三角形脉冲为例来说明其演变过程。如图 2.3-11 所示的三角形脉冲  $s(t)$ ，其底宽为  $2\tau$ 、幅度为  $1/\tau$ ，当  $\tau \rightarrow 0$  时， $s(t)$  成为单位冲激函数  $\delta(t)$ 。

首先对  $s(t)$  求一阶导数，其导数  $\frac{ds(t)}{dt}$  的波形如图 2.3-11(c) 所示，它是正、负极性的两个矩形脉冲，称为脉冲偶对，其宽度都是  $\tau$ ，幅度分别为  $\pm 1/\tau^2$ ，而面积分别为  $\pm 1/\tau$ 。随着  $\tau$  值逐渐减小，脉冲偶对宽度也逐渐变窄，幅度逐渐增大。当  $\tau \rightarrow 0$

时， $\frac{ds(t)}{dt}$  变成正、负极性的两个冲激函数，其冲激强度均为无限大，这就形成了冲激偶信号  $\delta'(t)$ ，如图 2.3-11(d) 所示。

冲激偶信号具有如下特性：

$$(1) \quad f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \quad (2.3-25)$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt = -f'(0) \quad (2.3-26)$$

这里， $f'(t)$  在  $t=0$  点连续， $f'(0)$  为  $f(t)$  的导数在零点的取值。

$$(3) \quad \delta'(t) = -\delta'(-t) \quad (2.3-27)$$

即冲激偶是奇函数 (odd function)。

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0 \quad (2.3-28)$$

至此，我们介绍了斜变信号、阶跃信号、冲激信号及冲激偶信号，可由依次求导的方法将它们引出。除了以上四种奇异信号之外，冲激信号的高阶导数，以及  $t$  的多项式表示的信号，如  $t^2u(t)$  等也都属于奇异信号，因以后较少涉及，故不再一一讨论。

#### 练习题

2.3-1 画出下列各函数的波形图。

$$(1) \quad u(t) + u(t-1) + u(t-2) - u(t-3) - 2u(t-4)$$

$$(2) \quad t[u(t) - u(t-2)]$$

$$(3) \quad tu(t-1)$$

$$(4) \quad (t-1)[u(t-1) - u(t-2)]$$

2.3-2 写出图题 2.3-2 所示各波形的函数式 (用阶跃信号表示)。

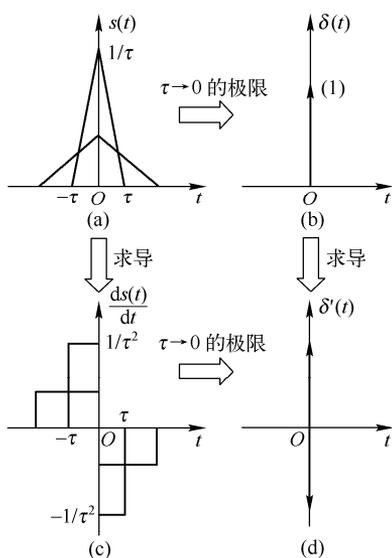


图 2.3-11 冲激偶的形成

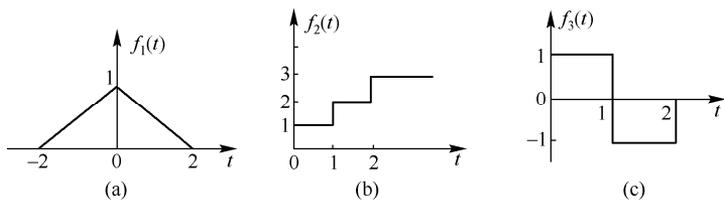


图 题 2.3-2

2.3-3 绘出下列各时间函数的波形图，注意时间段。

(1)  $f_1(t) = \cos 3\pi t [u(t) - u(t-2)]$

(2)  $f_2(t) = (1 + \sin \pi t)[u(t+1) - u(t-1)]$

(3)  $f_3(t) = e^{-t} \cos 6\pi t [u(t-1) - u(t-2)]$

(4)  $f_4(t) = \frac{\sin 2(t-\pi)}{2(t-\pi)}$

(5)  $f_5(t) = \text{sgn}[\sin(\pi t)]$

2.3-4 计算下列各式。

(1)  $(t^2 + 3t - 4)\delta(t)$

(2)  $\cos 2t\delta(t)$

(3)  $\cos 2t\delta(t-1)$

(4)  $\int_{-4}^2 \cos 2t \cdot \delta(t+3) dt$

(5)  $\int_0^{\infty} e^{-2t} \cos t \delta(t+1) dt$

(6)  $\int_{-\infty}^{\infty} (t + \sin t) \cdot \delta(t - \pi/6) dt$

(7)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} [\delta(t) - \delta(t-t_0)] dt$

(8)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} [\delta(t) + \delta'(t)] dt$

(9)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) u(t-2t_0) dt$

## 2.4 信号的运算

在信号与系统分析中经常要遇到信号的各种运算。本节将介绍连续时间信号的各种运算，而离散时间信号的运算将放在第 4 章中介绍。

### 2.4.1 信号的基本运算

#### 1. 信号的加减

两个信号的和（或差）信号在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之和（或差），即

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (2.4-1)$$

或

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) \quad (2.4-2)$$

#### 2. 信号的乘法与数乘

两信号的积在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之积，即

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \quad (2.4-3)$$

信号的数乘运算是指某信号乘以一实常数  $K$ ，它是将原信号每一时刻的值都乘以  $K$ 。

#### 3. 信号的反褶、时移与尺度变换

信号  $f(t)$  的反褶就是用  $-t$  替换  $f(t)$  表达式中的所有独立变量  $t$ ，成为  $f(-t)$ 。反褶反映在波形上是将原信号  $f(t)$  的波形以纵轴为轴反转  $180^\circ$ 。

信号  $f(t)$  的时移就是用  $t-t_0$  替换  $f(t)$  表达式中所有的独立变量  $t$ 。当  $t_0 > 0$  时，波形向右移，这种情况也称为延时；当  $t_0 < 0$  时，波形向左移，这种情况也称为超前。

信号  $f(t)$  的尺度变换就是将  $f(t)$  的时间变量  $t$  以常数  $a$  展缩，也就是在  $f(t)$  的表达式中，以  $at$  代替独立变量  $t$ 。如果  $a < 0$  信号的波形还会发生反褶。当  $|a| > 1$  时， $f(at)$  表示将原信号  $f(t)$  在时间轴上压缩；当  $|a| < 1$  时， $f(at)$  则表示将原信号  $f(t)$  在时间轴上扩展。

例 2.4-1 已知信号  $f(t)$  如图 2.4-1(a)所示，求以下信号的表达式，并画出其波形。

(1)  $f(-t)$       (2)  $f(t+1), f(t-1)$       (3)  $f(2t), f(t/2)$       (4)  $f(-2t+3)$

解: 由图 2.4-1(a)得

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t < -1 \text{ 及 } t > 1 \end{cases}$$

$$(1) \quad f(-t) = \begin{cases} -t+1, & -1 \leq -t \leq 0 \\ 1, & 0 < -t < 1 \\ 0, & -t < -1 \text{ 及 } -t > 1 \end{cases} = \begin{cases} -t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & -1 < t < 0 \\ 0, & t < -1 \text{ 及 } t > 1 \end{cases}$$

其波形如图 2.4-1(b)所示。

$$(2) \quad f(t+1) = \begin{cases} t+2, & -1 \leq t+1 \leq 0 \\ 1, & 0 < t+1 < 1 \\ 0, & t+1 < -1 \text{ 及 } t+1 > 1 \end{cases} = \begin{cases} t+2, & -2 \leq t \leq -1 \\ 1, & -1 < t < 0 \\ 0, & t < -2 \text{ 及 } t > 0 \end{cases}$$

$$\square \quad f(t-1) = \begin{cases} t, & -1 \leq t-1 \leq 0 \\ 1, & 0 < t-1 < 1 \\ 0, & t-1 < -1 \text{ 及 } t-1 > 1 \end{cases} = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 0, & t < 0 \text{ 及 } t > 2 \end{cases}$$

$f(t+1)$  与  $f(t-1)$  的波形分别如图 2.4-1(c)和(d)所示。

$$(3) \quad f(2t) = \begin{cases} 2t+1, & -1 \leq 2t \leq 0 \\ 1, & 0 < 2t < 1 \\ 0, & 2t < -1 \text{ 及 } 2t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2t+1, & -1/2 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t < 1/2 \\ 0, & t < -1/2 \text{ 及 } t > 1/2 \end{cases}$$

$$f(t/2) = \begin{cases} t/2+1, & -1 \leq t/2 \leq 0 \\ 1, & 0 < t/2 < 1 \\ 0, & t/2 < -1 \text{ 及 } t/2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} t/2+1, & -2 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t < 2 \\ 0, & t < -2 \text{ 及 } t > 2 \end{cases}$$

$f(2t)$  与  $f(t/2)$  的波形分别如图 2.4-1(e)和(f)所示。

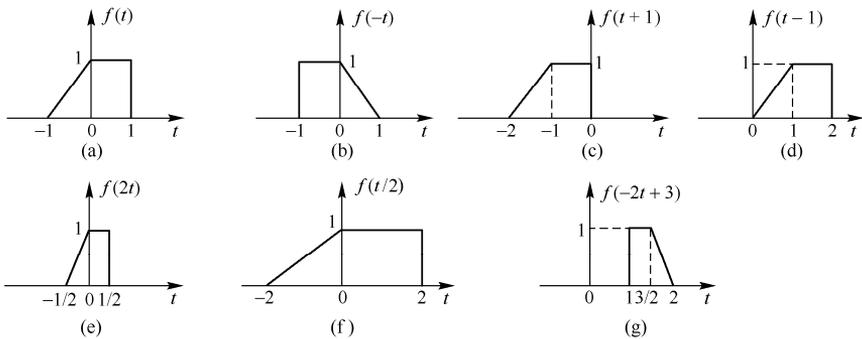


图 2.4-1 例 2.4-1 的图

(4) 在信号与系统分析中, 经常遇到信号既反褶, 又时移, 又有尺度变换的情况, 此时是用  $-at+b(a>0)$  替换  $f(t)$  中的  $t$ 。于是可得

$$f(-2t+3) = \begin{cases} -2t+4, & -1 \leq -2t+3 \leq 0 \\ 1, & 0 < -2t+3 < 1 \\ 0, & -2t+3 < -1 \text{ 及 } -2t+3 > 1 \end{cases} = \begin{cases} -2t+4, & 3/2 \leq t \leq 2 \\ 1, & 1 < t < 3/2 \\ 0, & t < 1 \text{ 及 } t > 2 \end{cases}$$

其波形如图 2.4-1(g)所示。

以上求解过程都是先计算表达式然后画波形。实际上，也可以按照先画波形再写表达式的次序求解。例如，在例 2.4-1(4)中，可以先按照如下次序画波形

$$f(t) \xrightarrow{\text{反褶}} f(-t) \xrightarrow{\text{尺度变换}} f(-2t) \xrightarrow{\text{时移}} f(-2t+3) = f\left[-2\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]$$

$f(-t)$ 、 $f(-2t)$  及  $f(-2t+3)$  的波形分别如图 2.4-2(a)~(c)所示。这样由图 2.4-2(c)可直接写出  $f(-2t+3)$  的表达式。例 2.4-1(4)的另一种具体解法请扫描二维码。

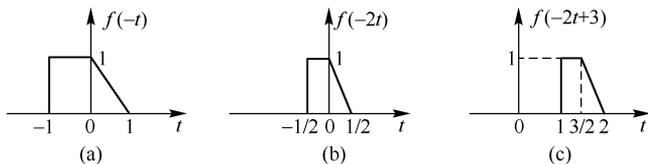


图 2.4-2 例 2.4-1(4)的波形



## 4. 信号的微分与积分

### (1) 微分运算

信号  $f(t)$  的微分  $\frac{df(t)}{dt}$  (也可写为  $f'(t)$ ) 表示信号随时间变化的变化率。

由于引入了冲激函数的概念，不仅连续函数可以微分，而且具有跳变点的函数也存在微分，它们在跳变点处的导数是一个冲激函数，其冲激强度为原函数在该处的跳变量，而它们在连续区间的导数即为常规意义上的导数。

**例 2.4-2** 已知  $f(t)$  的波形如图 2.4-3(a)所示，试求  $f'(t)$ ，并画出其波形。

**解：**由图 2.4-3(a)可得  $f(t) = t[u(t) - u(t-1)]$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f'(t) &= [u(t) - u(t-1)] + t[\delta(t) - \delta(t-1)] \\ &= [u(t) - u(t-1)] - \delta(t-1) \end{aligned}$$

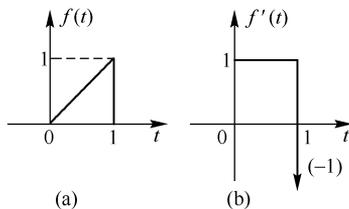


图 2.4-3 信号的微分运算

由于  $f(t)$  在  $t=1$  处有一跳变点，跳变量为  $-1$  (从  $1 \rightarrow 0$ )，则在  $t=1$  处出现一冲激函数，其冲激强度为  $-1$ 。 $f'(t)$  的波形如图 2.4-3(b)所示。

### (2) 积分运算

信号  $f(t)$  的积分运算  $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$  (也可写为  $f^{(-1)}(t)$ ) 在  $t$  时刻的值等于从  $-\infty$  到  $t$  区间内  $f(t)$  与时间轴所包围的面积。

**例 2.4-3** 已知  $f(t)$  的波形如图 2.4-4(a)所示，求  $f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$ ，并画出其波形。

**解：**由于积分上限  $t$  是变量，它可以从  $-\infty$  变化到  $\infty$ ，并且当  $t$  取不同的值时，积分值也将不同，因此，可分如下区间求解。

- ① 当  $t < 0$  时， $f^{(-1)}(t) = 0$ 。
- ② 当  $0 \leq t \leq 1$  时， $f^{(-1)}(t) = \int_0^t 2d\tau = 2t$ 。
- ③ 当  $t > 1$  时， $f^{(-1)}(t) = \int_0^1 2d\tau = 2$ 。

$$\text{所以 } f^{(-1)}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

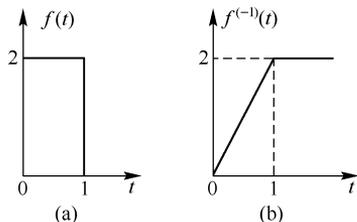


图 2.4-4 信号的积分运算

$$= 2t[u(t) - u(t-1)] + 2u(t-1) = 2tu(t) - 2(t-1)u(t-1)$$

$f^{(-1)}(t)$  的波形如图 2.4-4(b) 所示。由图可知,  $f^{(-1)}(t)$  在  $t < 0$  时为零; 在  $0 \leq t \leq 1$  时,  $f(t)$  与时间轴所包围的面积随着  $t$  的增加而增大; 当  $t=1$  时, 所包围的面积达到最大值 2; 当  $t > 1$  时, 所包围的面积不再增大, 仍保持为 2。

## 2.4.2 信号的卷积运算

在信号与系统分析中经常要用到两函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的卷积积分运算 (简称为卷积), 卷积常用符号 “\*” 表示, 其定义为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (2.4-4)$$

一般情况下, 卷积积分的上下限并不都取  $-\infty$  到  $\infty$ , 而是要根据被积函数的具体波形, 采用图解法来确定。

### 1. 卷积积分的图解法

卷积积分的图解法求解可以帮助我们理解卷积的概念, 把一些抽象的关系形象化。

如果给定  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ , 求这两个函数的卷积积分  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 首先要改变自变量, 即将  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  变为  $f_1(\tau)$  和  $f_2(\tau)$ , 这时函数图形与原来一样, 只是将横坐标  $t$  变为  $\tau$ 。然后再经过如下四个步骤 (称为四步曲):

① 反褶, 即将  $f_2(\tau)$  以纵坐标为轴线进行反褶, 变为  $f_2(-\tau)$ ;

② 时移, 即将  $f_2(-\tau)$  时移  $t$ , 变为  $f_2(t-\tau) = f_2[-(\tau-t)]$ , 当  $t > 0$  时, 将  $f_2(-\tau)$  右移  $t$ , 而当  $t < 0$  时, 将  $f_2(-\tau)$  左移  $|t|$ ;

③ 相乘, 即将  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  相乘得到  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$ ;

④ 积分, 即对乘积  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$  进行积分, 积分的关键是确定积分限。一般是将  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$  不等于零的区间作为积分的上、下限, 而且当  $t$  取不同的值时, 不为零的区间有所变化, 因此要将  $t$  分成不同的区间来求卷积积分。下面举例说明卷积积分的图解法过程。

**例 2.4-4** 已知  $f_1(t) = u(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 并画出  $s(t)$  的波形。

**解:**  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的波形如图 2.4-5 所示 (图中同时标注了  $f_1(\tau)$  与  $f_2(\tau)$ )。因为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

所以需要将  $f_2(\tau)$  反褶成  $f_2(-\tau)$ , 如图 2.4-6 所示, 然后进行时移, 当时移量  $t$  为不同的值时, 积分结果是不同的, 为此要分不同的区间进行分析。

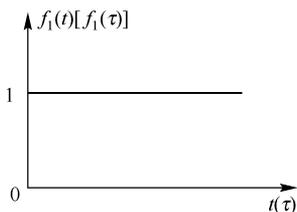


图 2.4-5 例 2.4-4 的信号

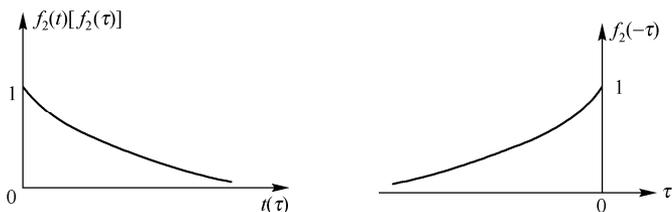


图 2.4-6  $f_2(-\tau)$  的波形

(1) 当  $t \leq 0$  时,  $f_2(t-\tau)$  的波形如图 2.4-7(a) 所示 (图中同时画出了  $f_1(\tau)$  的波形), 这时  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  无重叠部分, 因此  $f_1(\tau)f_2(t-\tau) = 0$ , 从而  $s(t) = f_1(t) * f_2(t) = 0$ 。

(2) 当  $t \geq 0$  时,  $f_2(t-\tau)$  与  $f_1(\tau)$  的波形如图 2.4-7(b) 所示, 这时  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  的重叠区

域为 $[0, t]$ ，因此

$$s(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}$$

归纳以上结果得

$$s(t) = f_1(t) * f_2(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

$s(t)$  的波形如图 2.4-8 所示。

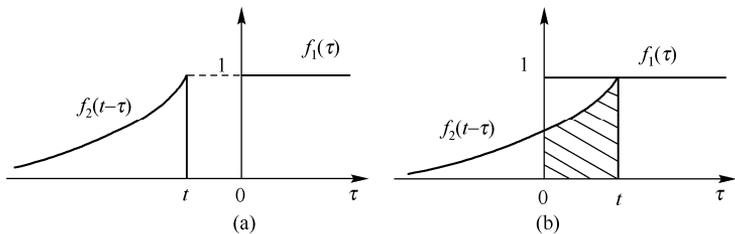


图 2.4-7 卷积积分的图解法过程

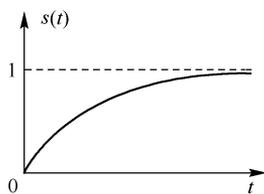


图 2.4-8  $s(t)$  的波形

**例 2.4-5** 已知  $f_1(t) = u(t) - u(t-T)$ ， $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ ，求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，并画出  $s(t)$  的波形。

**解：**图 2.4-9(a), (b)和(c)分别画出了  $f_1(t)$  [ $f_1(\tau)$ ]， $f_2(t)$  [ $f_2(\tau)$ ]和  $f_2(-\tau)$  的波形。按  $t$  的不同取值可按如下区间进行分析。

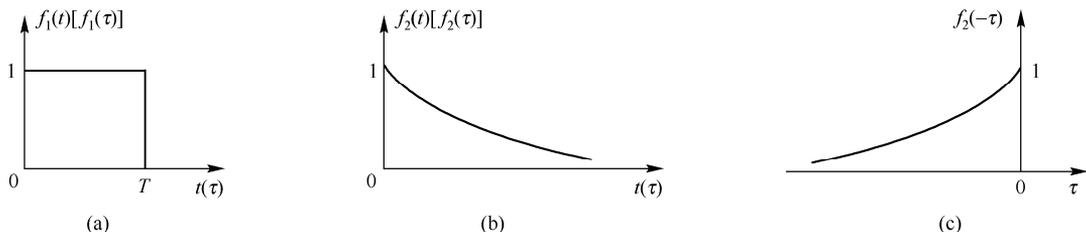


图 2.4-9 例 2.4-5 的信号波形

(1) 当  $t \leq 0$  时， $f_2(t-\tau)$  及  $f_1(\tau)$  的波形如图 2.4-10(a)所示，由图可知，此时  $f_2(t-\tau)$  与  $f_1(\tau)$  没有重叠部分，所以  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)=0$ ，即  $s(t)=0$ 。

(2) 当  $0 \leq t \leq T$  时， $f_2(t-\tau)$  及  $f_1(\tau)$  的波形如图 2.4-10(b)所示，此时  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  的重叠区域为  $[0, t]$ ，所以

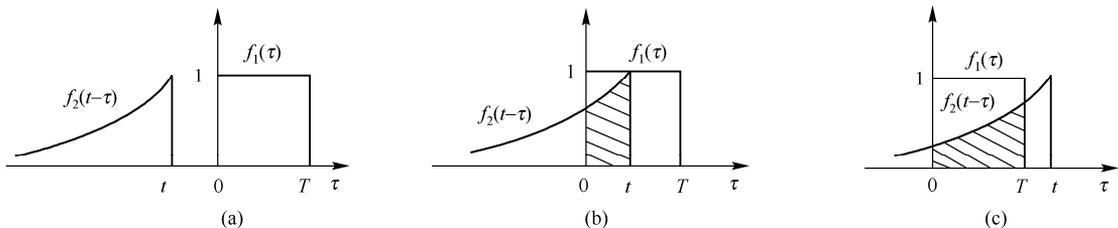


图 2.4-10 卷积积分的图解法过程

$$s(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}$$

(3) 当  $t \geq T$  时， $f_2(t-\tau)$  与  $f_1(\tau)$  的波形如图 2.4-10(c)所示，此时  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  的重叠区域为  $[0, T]$ ，所以

$$s(t) = \int_0^T 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t-T)} - e^{-t}$$

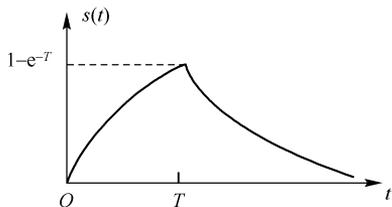


图 2.4-11  $s(t)$  的波形

归纳以上结果得

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 \leq t \leq T \\ e^{-(t-T)} - e^{-t} & t \geq T \end{cases}$$

$$= (1 - e^{-t})[u(t) - u(t-T)] + [e^{-(t-T)} - e^{-t}]u(t-T)$$

$$= (1 - e^{-t})u(t) - [1 - e^{-(t-T)}]u(t-T)$$

$s(t)$  的波形如图 2.4-11 所示。

**例 2.4-6** 已知  $f_1(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u(t - 2)$ ,  $f_2(t) = 2t[u(t) - u(t - 1)]$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

**解:** 图 2.4-12 给出了  $f_1(t)$  [ $f_1(\tau)$ ],  $f_2(t)$  [ $f_2(\tau)$ ],  $f_2(-\tau)$  和  $f_2(t-\tau)$  的波形。然后将  $t$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  变化, 求  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  相乘后不为零的区间, 并求二信号相乘后的函数  $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$  的线下面积, 注意在不同  $t$  值时不为零的区间的变化。卷积积分的结果如下:

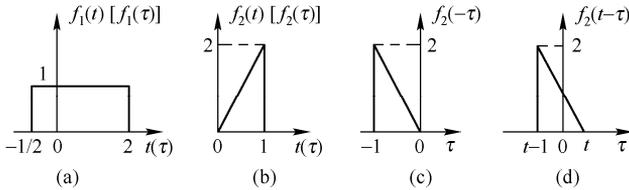


图 2.4-12 例 2.4-6 的信号及反褶、时移信号的波形

(1) 当  $t < -1/2$  时, 如图 2.4-13 (a) 所示。由于  $f_1(\tau)f_2(t-\tau) = 0$ , 所以,  $s(t) = 0$ 。

(2) 当  $t \geq -1/2$  和  $t-1 \leq -1/2$ , 即  $-1/2 \leq t \leq 1/2$  时, 如图 2.4-13 (b) 所示。  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$  不为零的区间为  $-1/2 \leq \tau \leq t$ , 有

$$s(t) = \int_{-1/2}^t 2(t-\tau) d\tau = (2t\tau - \tau^2) \Big|_{-1/2}^t = t^2 + t + \frac{1}{4}$$

(3) 当  $t \leq 2$  和  $t-1 \geq -1/2$ , 即  $1/2 \leq t \leq 2$  时, 如图 2.4-13 (c) 所示。  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$  不为零的区间为  $t-1 \leq \tau \leq t$ , 有

$$s(t) = \int_{t-1}^t 2(t-\tau) d\tau = (2t\tau - \tau^2) \Big|_{t-1}^t = 1$$

(4) 当  $t \geq 2$  和  $t-1 \leq 2$ , 即  $2 \leq t \leq 3$  时, 如图 2.4-13 (d) 所示。  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$  不为零的区间为  $t-1 \leq \tau \leq 2$ , 有

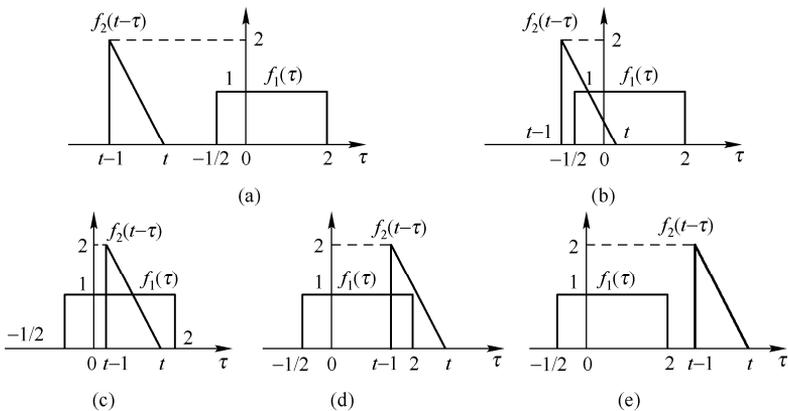


图 2.4-13 卷积积分的图解法求解过程

$$s(t) = \int_{t-1}^2 2(t-\tau) d\tau = (2t\tau - \tau^2) \Big|_{t-1}^2 = -t^2 + 4t - 3$$

(5) 当  $t-1 > 2$ , 即  $t > 3$  时, 如图 2.4-13(e) 所示。有

$$f_1(\tau)f_2(t-\tau) = 0, \quad s(t) = 0$$

$$\text{所以 } s(t) = \begin{cases} t^2 + t + 1/4, & -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq t \leq 2 \\ -t^2 + 4t - 3, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

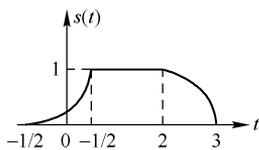


图 2.4-14  $s(t)$  的波形

$s(t)$  的波形如图 2.4-14 所示。

**例 2.4-7** 已知  $f_1(t) = e^{2t}u(-t)$ ,  $f_2(t) = u(t-3)$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

**解:** 图 2.4-15(a), (b) 和 (c) 分别画出了  $f_1(t)$  [ $f_1(\tau)$ ],  $f_2(t)$  [ $f_2(\tau)$ ] 及  $f_2(-\tau)$  的波形。注意  $f_2(-\tau)$  时移的起始点是  $-3$ , 这不同于前几例的情况。按  $t$  的不同取值可按如下区间进行分析。

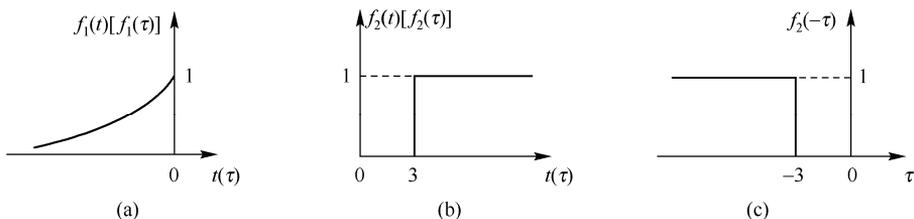


图 2.4-15 例 2.4-7 的信号及反褶信号的波形

(1) 当  $t-3 \leq 0$ , 即  $t \leq 3$  时, 如图 2.4-16(a) 所示。

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}$$

(2) 当  $t-3 \geq 0$ , 即  $t \geq 3$  时, 如图 2.4-16(b) 所示。

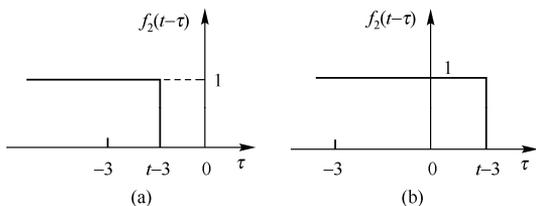


图 2.4-16 卷积积分的图解求解过程

$$s(t) = \int_{-\infty}^0 e^{2\tau} d\tau = 1/2$$

$$\text{所以 } s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{2(t-3)}, & t \leq 3 \\ 1/2, & t \geq 3 \end{cases}$$

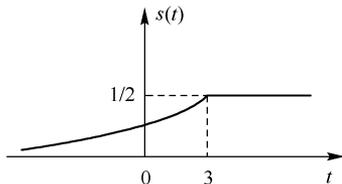


图 2.4-17  $s(t)$  的波形

## 2. 卷积积分的性质

卷积积分有许多重要性质, 利用这些性质可以使某些运算简化。

(1) 代数性质

● 交换律 (commutative law)

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2.4-5)$$

此性质采用积分变量代换即可方便证明。该性质说明, 函数在卷积积分中的次序是可以任意交换的。即保持  $f_1(\tau)$  不变, 而将  $f_2(\tau)$  进行反褶并时移, 这样  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  相乘以后所得函数的线下面积, 与保持  $f_2(\tau)$  不变、而将  $f_1(\tau)$  进行反褶并时移再相乘以后所得函数

$f_2(\tau) f_1(t-\tau)$  的线下面积相同, 即卷积积分相等。

● 分配律 (distributive law)

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (2.4-6)$$

● 结合律 (associative law)

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \quad (2.4-7)$$

根据卷积的定义很容易证明分配律和结合律。

(2) 微分与积分

两函数卷积后的微分等于其中一个函数的微分与另一个函数的卷积, 其表达式为

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} \quad (2.4-8)$$

证明: 
$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \frac{df_2(t-\tau)}{dt} d\tau = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt}$$

利用交换律同样可以证明另一式。

两函数卷积后的积分等于其中一个函数的积分与另一函数的卷积, 即

$$\int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda = f_1(t) * \left[ \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \right] = \left[ \int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right] * f_2(t) \quad (2.4-9)$$

证明: 
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda &= \int_{-\infty}^t \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\lambda-\tau) d\tau \right] d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^t f_2(\lambda-\tau) d\lambda \right] d\tau \\ &= f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

利用交换律同样可证另一式。

经过类似的推导, 可以导出卷积积分的高阶导数或多重积分之运算规律。

设  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 则

$$s^{(i)}(t) = f_1^{(i)}(t) * f_2^{(i-j)}(t) \quad (2.4-10)$$

这里,  $i, j$  取正整数时为导数的阶次, 取负整数时为重积分的次数。一个常用的例子是

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{df_1(t)}{dt} * \left[ \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \right] = \left[ \int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right] * \frac{df_2(t)}{dt} \quad (2.4-11)$$

(3) 与冲激函数或阶跃函数的卷积

函数  $f(t)$  与冲激信号  $\delta(t)$  的卷积仍为  $f(t)$  本身, 即

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (2.4-12)$$

类似地还有

$$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0) \quad (2.4-13)$$

即信号  $f(t)$  与  $\delta(t-t_0)$  的卷积相当于把信号  $f(t)$  延迟  $t_0$ 。利用卷积定义和冲激信号的取样特性很容易证明以上两式。

此外, 利用卷积的微分、积分特性可得到以下结论:

与单位阶跃函数  $u(t)$  的卷积 
$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (2.4-14)$$

推广到一般情况可得 
$$f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) \quad (2.4-15)$$

$$f(t) * \delta^{(k)}(t-t_0) = f^{(k)}(t-t_0) \quad (2.4-16)$$

式中,  $k$  表示求导或求重积分的次数, 当  $k$  取正整数时表示导数阶次,  $k$  取负整数为重积分的次数。

利用信号  $f(t)$  与冲激函数的卷积的特性[式(2.4-12)及式(2.4-13)], 以及微积分特性[式(2.4-11)], 可以使卷积积分的计算变得比较简单。下面举例说明。

**例 2.4-8** 已知  $f_1(t) = u(t) - u(t-2)$ ,  $f_2(t) = 2[u(t) - u(t-3)]$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

**解:**  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的波形如图 2.4-18 所示。

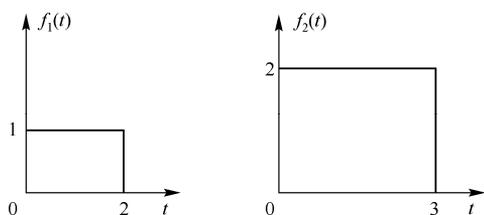


图 2.4-18 例 2.4-8 的信号波形

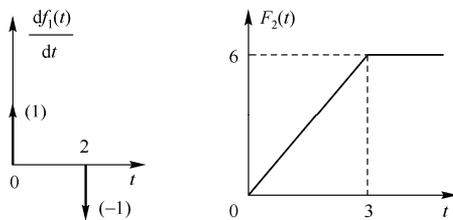


图 2.4-19 二信号微分和积分的波形

对  $f_1(t)$  进行微分, 而对  $f_2(t)$  进行积分, 得

$$\frac{df_1(t)}{dt} = \delta(t) - \delta(t-2)$$

$$F_2(t) = \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = 2t[u(t) - u(t-3)] + 6u(t-3)$$

$\frac{df_1(t)}{dt}$  及  $F_2(t)$  的波形如图 2.4-19 所示, 则

$$\begin{aligned} s(t) &= f_1(t) * f_2(t) = \frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau \\ &= [\delta(t) - \delta(t-2)] * F_2(t) = F_2(t) - F_2(t-2) \end{aligned}$$

则合成波形如图 2.4-20 所示。

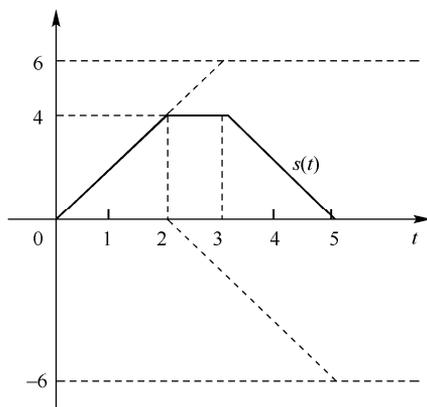


图 2.4-20 波形的合成

从例 2.4-8 可以看出, 利用式(2.4-11)来间接计算两函数的卷积比较简单。但要注意, 式(2.4-11)并不适合于任何函数。只有当需要求导数的函数(例如  $f_1(t)$ )经求导为  $\frac{df_1(t)}{dt}$ , 再经积分  $\int_{-\infty}^t \frac{df_1(\tau)}{d\tau} d\tau$  后, 能够得到原函数  $f_1(t)$  的情况下, 才能使用式(2.4-11)来求两函数的卷积, 否则就不能直接使用该式。

**例 2.4-8** 图解法计算卷积求解过程请扫描二维码。



#### (4) 时移特性

若  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 则

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f_1(t-t_2) * f_2(t-t_1) = f(t-t_1-t_2) \quad (2.4-17)$$

**例 2.4-9** 已知  $f_1(t) = u(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-(t-1)}u(t-1)$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 并画出  $s(t)$  的波形。

**解:** 该例与例 2.4-4 做比较可知, 本例中的  $f_1(t)$  与例 2.4-4 中的  $f_1(t)$  相同, 而本例中的  $f_2(t)$  是将例 2.4-4 中的  $f_2(t)$  右移 1 得到的, 所以根据卷积的时移特性及例 2.4-4 的结果, 可以直接写出  $s(t)$  的表达式

$$s(t) = [1 - e^{-(t-1)}]u(t-1)$$

$s(t)$  的波形如图 2.4-21 所示。

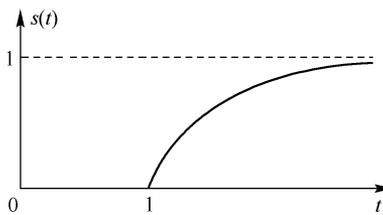


图 2.4-21  $s(t)$  的波形

## 练习题

2.4-1 已知  $f(t)$  波形如图题 2.4-1 所示, 画出下列信号的波形图。

(1)  $f_1(t) = f(3t - 6)$       (2)  $f_2(t) = f(-3t + 6)$

(3)  $f_3(t) = f(3t + 6)$       (4)  $f_4(t) = f\left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{6}\right)$

(5)  $f_5(t) = f\left(-\frac{1}{3}t - \frac{1}{6}\right)$       (6)  $f_6(t) = f\left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{6}\right)$

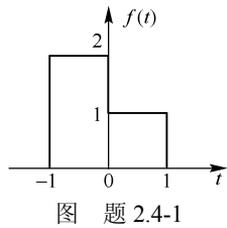


图 题 2.4-1

2.4-2 已知  $f(2-t/2)$  的波形如图题 2.4-2 所示, 画出  $f(t)$  的波形图。

2.4-3 已知  $f(t) = e^{-t}u(t)$ , 求  $f'(t)$  的表达式, 并画出  $f'(t)$  的波形图。

2.4-4 对下列函数进行积分运算:  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ , 并画出积分后的波形图。

(1)  $f_1(t) = u(t-1) - u(t-3)$       (2)  $f_2(t) = \delta(t+1)$       (3)  $f_3(t) = \sin \pi t u(t)$

2.4-5 已知  $f_1(t) = u(t) - u(t-1)$ ,  $f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$ , 分别求  $s_1(t) = f_1(t) * f_1(t)$  和  $s_2(t) = f_2(t) * f_2(t)$ , 并画出  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  的波形。

2.4-6 已知  $f_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$ ,  $f_2(t) = \delta(t+4) + \delta(t-4)$ ,  $f_3(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$ , 画出下列各卷积积分后的波形。

(1)  $s_1(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ; (2)  $s_2(t) = f_1(t) * f_3(t)$ ; (3)  $s_3(t) = f_1(t) * f_2(t) * f_3(t)$

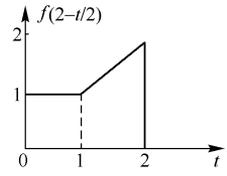


图 题 2.4-2

## 2.5 连续信号的分解

在进行信号分析与处理的过程中, 可以将一些比较复杂的信号分解为简单信号之和, 从而便于信号的分析与处理。就像在力学中, 根据需要可将任一方向的力分解为几个分力一样。

### 1. 偶分量与奇分量

偶分量 (even component) 的定义为

$$f_e(t) = f_e(-t) \quad (2.5-1)$$

奇分量 (odd component) 的定义为

$$f_o(t) = -f_o(-t) \quad (2.5-2)$$

任何信号都可分解为偶分量与奇分量两部分之和, 即

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \quad (2.5-3)$$

为了求出偶分量与奇分量的表达式, 为此, 将式(2.5-3)

中的  $t$  用  $-t$  代替, 则

$$f(-t) = f_e(-t) + f_o(-t) = f_e(t) - f_o(t) \quad (2.5-4)$$

由式(2.5-3)与式(2.5-4)可求得

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \quad (2.5-5)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \quad (2.5-6)$$

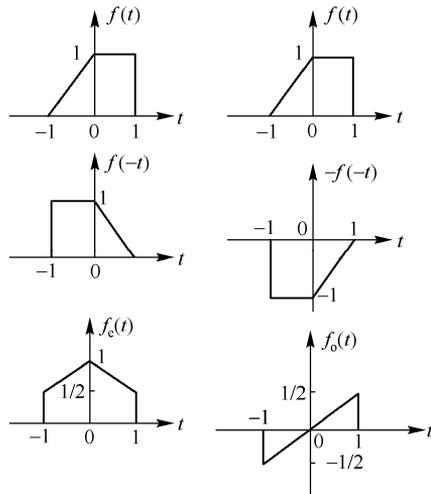


图 2.5-1 示出了信号分解为偶分量与奇分量的实例。

图 2.5-1 信号的偶分量与奇分量

### 2. 脉冲分量

图 2.5-2(a)所示的光滑曲线为任意信号  $f(t)$ , 可以用一系列窄脉冲相叠加的阶梯信号来近似表示。这种分割方法称为纵向分割。将时间轴等分为小区间  $\Delta t$  作为各矩形脉冲的宽度, 各脉冲的高度分别等于它左侧边界对应的函数值。这种分割法所产生的误差完全取决于时间间隔