第 3 章　集合论基础

集合论是现代数学的基础，其概念出现在所有的数学分支中。集合论的开创性工作来自十九世纪末的德国数学家康托尔（Georg Cantor）。康托尔对任意元素的集合进行了深入研究，提出了关于基数、序数和良序集等理论，奠定了集合论的深厚基础。随着 1900 年前后出现的各种悖论，使人们意识到集合论中存在着漏洞，并促使集合论向公理化发展。1904～1908 年，策墨罗（Zermelo）提出了第一个集合论的公理系统，使集合论的矛盾得以解决，并逐步形成了公理化集合论与抽象集合论，集合理论得以完善。相对地，康托尔的集合论被称为朴素集合论，也是我们今天广泛使用的集合论。

在计算机领域中，集合几乎无处不在，尤其在数据结构、数据库、人工智能领域及程序设计语言等课程中，集合论有着重要的直接应用。

3.1　集合的概念与表示方法

3.1.1　集合描述

集合（set）是一个不能精确定义的概念，一些可区分的事物（对象）组成的整体就是**集合**。若 a 是组成集合 A 的事物，则 a 是集合 A 的元素，称作 a **属于** A，记作

$$a \in A \text{。}$$

否则，a 不是集合 A 的元素，称作 a **不属于** A，记作

$$a \notin A \text{。}$$

[辨析] $a \in A$ 和 $a \notin A$ 都是命题，即命题 $a \in A$ 为真，则 a 是集合 A 的元素；$a \notin A$ 为真，则 a 不是集合 A 的元素。$a \notin A \Leftrightarrow \neg(a \in A)$，或者说，$a \notin A$ 是 $\neg(a \in A)$ 的简单表示。

如果组成一个集合的元素个数是有限的，则称其为**有限（穷）集合**，否则称为**无限（穷）集合**。有限集合 A 的元素个数用 $|A|$ 表示。

集合有 2 种表示法。

1．枚举元素法

枚举元素法也称为“外延法”或“列举法”，是指直接列出集合的所有元素，如：

$$X = \{1, 2, 3\}，$$

$$M = \{\text{花，水，空气}\}\text{。}$$

这种方法只能表示那些包含有限个元素的有限集。集合中可以包含任何对象，且集合的元素是无序的。

[延伸] 在程序设计语言中一般也采用这样的表示法。例如，C 语言中定义一个一维数组就构成了一个集合:

```
int    a[3] = {3, 2, 5};
```

与数学中的概念不同，集合 a 仅能包含类型相同（int 类型）的 3 个元素，且元素是有序的[1]。

2．描述法

描述法也称为“内涵法”或“叙述法”。如果集合中的元素性质相同或相近，可以用谓词 $p(x)$ 来刻画其性质，如令 $p(x)$：x 是奇数，则奇数集合可表示为：

$$A=\{x \mid p(x)\},$$

或者，

$$A=\{x \mid x\text{是奇数}\}。$$

上述表示法的含义是：对于任何一个个体 x_0，若谓词填式 $p(x_0)$为真，则 x_0 是 A 的元素，否则 x_0 不是 A 的元素。

集合的元素仍可以是集合，如 $A=\{a,\{a,b\}, b\}$，此集合有 3 个元素，a、b 和集合$\{a,b\}$。

无论怎样表示，集合只注重其组成成分，元素既不重复，也无次序。

[外延性公理] 两个集合相等当且仅当它们有相同的元素。

外延性公理说明，只要两个集合的元素一样就是一个集合，只是外观不同。例如，下述三个集合是相同的：

$$\{1, 2, 3\},$$

$$\{2, 3, 1\},$$

$$\{x \mid x\text{是方程}(x-1)(x-2)(x-3)=0\text{的根}\}。$$

[辨析] 练习用谓词逻辑的观点看待集合，进而去严格推理，逐步将朴素的思维提升到严密的逻辑思维。

一些常用集合用固定字母表示，包括：自然数集 $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots\}$，整数集 $\mathbf{Z}=\mathbf{I}=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$，正整数集 $\mathbf{Z}^+=\mathbf{I}^+=\{1, 2, \cdots\}$，有理数集 $\mathbf{Q}=\{p/q|p\in\mathbf{Z}，q\in\mathbf{Z}\text{ 且 }q\neq 0\}$，实数集 $\mathbf{R}$，正实数集 $\mathbf{R}^+$，复数集 $\mathbf{C}$ 等。

3.1.2　集合的包含与相等

1．子集与集合包含

[定义 3-1] 如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，称集合 A 是集合 B 的**子集**（subset），或集合 A **包含于**集合 B，记作 $A\subseteq B$。用谓词符号表示为：

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \to x\in B)。$$

由定义，对任意的集合 A，显然有 $A\subseteq A$。

这是一个至关重要的核心定义，用自然语言应描述为：对每个 x，只要 $x \in A$，则 $x \in B$。

[辨析]“包含于”不是“包含”，二者恰好相反。它们都可以被理解成关系运算。

[辨析] 概念成立的要求是“对每个元素”或“对所有的元素”而不是“存在一个或一些”，即定义要用全称量词而不是存在量词来刻画。这种对全部数量的要求体现在绝大多数定义中。

[定理 3-1] 对任意的集合 A、B、C，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。

证明　对 $\forall x \in A$，由 $A \subseteq B$，有 $x \in B$。又因为 $B \subseteq C$，有 $x \in C$，故 $A \subseteq C$。

[辨析] 上述性质与“$a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$，则 $a \leqslant c$”一致，称为包含于关系 $\subseteq$ 具有“传递性”。

[定理 3-2] 两集合相等的充分必要条件是它们互为子集，即互相包含，符号表示为：

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)。$$

证明　若集合 A=B，则二者有相同的元素，故 $\forall x(x \in A \to x \in B)$ 与 $\forall x(x \in B \to x \in A)$ 均为真，有 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

若集合 A 与 B 互为子集，如果 $A \neq B$，则 $\exists x(x \in A \wedge x \notin B)$ 为真，或 $\exists x(x \in B \wedge x \notin A)$ 为真。因为

$$\exists x(x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \exists x \neg(\neg\, x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \neg\, \forall x(x \in A \to x \in B)，$$

$$\exists x(x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow \exists x \neg(\neg\, x \in B \vee x \in A) \Leftrightarrow \neg\, \forall x(x \in B \to x \in A)。$$

故 $A \subseteq B$ 为假或 $B \subseteq A$ 为假，与假定矛盾，结论成立。

这是集合论中最核心的定理，是证明集合相等的根本方法。

[辨析] 两数 a 和 b 相等描述为 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$，两集合 A 和 B 相等描述为 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，可见运算 $\subseteq$ 与 $\leqslant$ 有类似的含义。

2．真子集

[定义 3-2] 如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，但集合 B 中至少有一个元素不属于 A，称集合 A 是集合 B 的**真子集**（proper subset），或集合 A **严格包含于**（**真包含于**）集合 B，记作 $A \subset B$。符号表示为：

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B。$$

例如，集合 $\{a,b\}$ 是 $\{a,b,c\}$ 的子集，也是真子集。

[辨析] 定义中的“集合 B 中至少有一个元素不属于 A”也可说成“A 不等于 B”。

3.1.3　空集与全集

1．空集

[定义 3-3] 不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 Ø。符号表示为：

$$\varnothing = \{x \mid p(x) \wedge \neg\, p(x)\}，p(x)\text{是任意谓词。}$$

[辨析] 对任意的个体 x，命题 $x \in \varnothing$ 恒为 0，即该命题为永假式。

[辨析] $\varnothing \neq \{0\}$，$\varnothing \neq \{\varnothing\}$。Ø 表示没有任何对象。如果把集合看作一个文件夹，Ø 就是不包含任何文件的空文件夹。

显然，若 $A \neq \varnothing$，则命题 $\exists x(x \in A)$ 为真。

[定理 3-3] 对任意的集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$，即空集是所有集合的子集。

证明 由于空集没有任何元素，通常用反证法证明。

若 $\varnothing \subseteq A$ 为假，则 $\neg \forall x(x \in \varnothing \to x \in A)$ 为真。因为，

$$\neg \forall x(x \in \varnothing \to x \in A) \Leftrightarrow \exists x \neg(\neg x \in \varnothing \vee x \in A) \Leftrightarrow \exists x(x \in \varnothing \wedge x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in \varnothing) \wedge \exists x(x \notin A) \Rightarrow \exists x(x \in \varnothing)。$$

说明 $\exists x(x \in \varnothing)$ 为真。这与空集的定义矛盾。

在集合论中，大量的问题仅是对一个概念是否成立的判定，而这又取决于判定描述此概念的条件命题是否为真。这是学习时需要掌握的核心技术。对于定理 3-3，要证明 $\varnothing \subseteq A$ 成立，只要说明 $\forall x(x \in \varnothing \to x \in A)$ 为真。于是，也可以不采用反证法证明：

对 $\forall x$，由于 $x \in \varnothing$ 为永假式，故

$$\forall x(x \in \varnothing \to x \in A) \Leftrightarrow \forall x(0 \to x \in A) \Leftrightarrow \forall x(1) \Leftrightarrow 1。$$

于是，$\varnothing \subseteq A$ 成立。

可见，任意集合 $A \neq \varnothing$ 均有两个子集，分别是 $\varnothing$ 和 A。

2．全集

[定义 3-4] 在一定范围内，包含所有元素的集合称为**全集**，记作 U（universal set，或 E）。符号表示为：

$$U = \{x \mid p(x) \vee \neg p(x)\}，p(x)\text{是任意谓词。}$$

对任意的对象 x，命题 $x \in U$ 恒为 1，即该命题为永真式。

对任意的集合 A，有 $A \subseteq U$。

[辨析] 空集是绝对的概念，全集则是相对的概念，即只要涵盖所讨论对象的集合就可以作为全集，而并非需要包括世间万物。

[延伸] 悖论体现了逻辑上的不一致性，可以由集合反映出来。例如，把所有集合分为 2 类，第一类中的集合以其自身为元素，第二类中的集合不以自身为元素。令第二类集合所组成的集合为 Q，有：

$$Q = \{A | A \notin A\}。$$

那么，无论说 $Q \in Q$ 还是 $Q \notin Q$ 都会产生矛盾，即不能说明 $Q \in Q$ 的真假。这就是集合论悖论（罗素悖论）。

在信息领域处理的实际问题中，都有一个明确甚至有限的全集，不会产生悖论[19]。因此，本课程仍然介绍朴素集合论而非公理集合论。

利用下述示例可以帮助我们正确理解属于 $\in$ 和包含于 $\subseteq$ 的含义。

例 3-1 构造集合 A、B 和 C，使 $A \in B$，$B \in C$，且 $A \notin C$。

解 令 $A = \{a\}$，$B = \{\{a\}, b\}$，$C = \{\{\{a\}, b\}, c\}$ 则满足要求。

为了消除括号带来的混乱，可写成：

$A=\{a\}$， $B=\{A,b\}$， $C=\{B,c\}$ 。

这更能体会出构造者的想法。

例 3-2　对任意集合 A、B 和 C，确定下述命题是否为真。

(a) 如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$，则 $A\in C$。

(b) 如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

(c) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\in C$。

(d) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\subseteq C$。

(e) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\nsubseteq C$，则 $A\notin C$。

(f) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\notin C$。

(g) 如果 $A\subseteq B$ 则 $A\notin B$。

解 (a) 真。因为 B 是 C 的子集，故 B 的元素 A 也是 C 的元素。

(b) 假。如 $A=\{a\}$， $B=\{A\}$， $C=\{A,c\}$ 。

(c) 假。如 $A=\{a\}$， $B=\{a,b\}$， $C=\{B,c\}$ 。

(d) 假。反例同(c)。

(e) 假。如 $A=\{a\}$， $B=\{a,b\}$， $C=\{A,c\}$ 。

(f) 假。如 $A=\{a\}$， $B=\{a,b\}$， $C=\{A,B\}$ 。

(g) 假：如 $A=\{a\}$， $B=\{a,A\}$ 。

3.1.4　集合的幂集

[定义 3-5]　集合 A 的所有子集构成的集合称为 A 的**幂集**（power set），记作

$$\mathscr{P}(A)=\{x\mid x\subseteq A\}。$$

例如，$\mathscr{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$。若 $A=\{a,b,c\}$，则

$$\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}。$$

不同子集含有的元素个数不同，在计算机内表示起来困难，也难以存储和运算。一个更有效的方法是将其表示为定长的串。若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ ，其所有子集可表示为：

$$A_{x_1x_2\cdots x_n}。$$

其中，

$$x_i=\begin{cases}1\ ,a_i\in A\\0\ ,a_i\notin A\end{cases},\quad 1\leqslant i\leqslant n。$$

例如，前述的幂集可写成

$$\mathscr{P}(A)=\{A_{000},A_{100},A_{010},A_{001},A_{110},A_{101},A_{011},A_{111}\}。$$

如果用十进制表示，其子集为 A_0～A_7。

这种对子集的编码表示方法十分有效。例如，若$|A|$不超过 8，可以用一个字节的量存储 A 的子集，每个二进制位标志着对应的元素是否属于此子集。

[延伸] 利用程序设计语言中的位运算即可完成对编码子集的运算。例如，要计算子集 $A_{10010010}$ 和 $A_{01000010}$ 的交集，只需要对两个单字节的整数（机器内部为二进制串）10010010 和 01000010

做按位与运算&，得到子集 $A_{00000010}$。类似地，两个子集的并、对称差可分别由按位或运算|和按位异或运算^直接计算出来[1]。

通过子集的编码表示还可以很容易得到全部子集的数量，即幂集的元素个数。

[定理 3-4] 若$|A|=n$，则$|\mathscr{P}(A)|=2^n$。

因为任何一个码字 x_i 只有 1 或 0 两种取值，故 n 个码字的总取值数量为：

$$\underbrace{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\cdots\binom{2}{1}}_{n个}=2^n。$$

还存在另一种计算幂集元素个数的方法。因为 n 个元素中取 k 个元素有$\binom{n}{k}$种取法，$\mathscr{P}(A)$的元素个数为$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$。由二项式展开式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n y^{n-k}。$$

令 x 和 y 为 1 即知结论成立。

[辨析] 空集的幂集只有一个元素，其他集合的幂集有偶数个元素。

由于一个集合 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$有 $2^{|X|}$ 个元素，故也用 2^X 表示集合 X 的幂集。

例 3-3 求出集合 A 的幂集。

(1) $A=\{a,\{a\}\}$。 (2) $A=\{\{1,\{2,3\}\}\}$。

(3) $A=\{\varnothing,a,\{b\}\}$。 (4) $A=\mathscr{P}(\varnothing)$。

解 (1) 集合 A 有 2 个元素，$\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{\{a,\{a\}\}\}=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},A\}$。

(2) 集合 A 有 1 个元素，$\mathscr{P}(A)=\{\varnothing, \{\{1, \{2,3\}\}\}\}=\{\varnothing, A\}$。

(3) 集合 A 有 3 个元素，$\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{b\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{b\}\},\{a,\{b\}\},A\}$。

(4) $\mathscr{P}(A)=\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))=\mathscr{P}(\{\varnothing\})=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$。

思考与练习 3.1

3-1 准确说明并用符号描述 $A\subseteq B$、$A\subset B$、$A=B$ 的含义。

3-2 利用基本定义推出 $A\nsubseteq B$、$A\not\subset B$、$A\neq B$ 定义的符号描述。

3-3 何谓集合 A 的幂集？对于有限集，其幂集的元素个数是多少？

3-4 举出使下述命题成立的例子。

(a) $A\in B$，$B\in C$，但 $A\notin C$。 (b) $A\in B$ 且 $A\subseteq B$。

3-5 确定下述命题的真伪。

(a) $\varnothing\subseteq\varnothing$。 (b) $\varnothing\in\varnothing$。

(c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$。　　(d) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$。

(e) $\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$。

3-6　对任意的集合 A、B、C，证明或否定下述推断。

(a) 若 $A \in B$ 且 $B \in C$，则 $A \in C$。　　(b) 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \in C$。

(c) 若 $A \in B$ 且 $B \not\subseteq C$，则 $A \notin C$。　　(d) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \not\subseteq C$，则 $A \notin C$。

3-7　求下列集合的幂集。

(a) $\{a, \{a\}\}$。　　(b) $\{\{a, \{b, c\}\}\}$。

(c) $\{\varnothing, 1, \{2\}\}$。　　(d) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$。

3-8　记 $T=\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$，判别是否有：$\varnothing \in T$、$\varnothing \subseteq T$、$\{\varnothing\} \in T$、$\{\varnothing\} \subseteq T$、$\{\{\varnothing\}\} \in T$ 和 $\{\{\varnothing\}\} \subseteq T$？

3-9　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_8\}$，问 A_{17} 和 A_{33} 表示的子集是什么？子集 $\{a_2,a_3,a_7\}$ 和 $\{a_5,a_8\}$ 又是如何编码的？

3-10　设 A、B 为任意集合，证明：$A=B$ 当且仅当 $\mathscr{P}(A)=\mathscr{P}(B)$。

3.2　集 合 运 算

3.2.1　基本运算

集合运算是由已知集合得到新集合的手段。

1．集合的交（intersection）

[定义 3-6] 集合 A 和 B 的所有共同元素组成的集合称为 A 与 B 的**交**，记作 $A \cap B$。符号表示为：

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}。$$

例如，$\{1,2,3\} \cap \{2,1,-1\} = \{1,2\}$，$\{1,3\} \cap \varnothing = \varnothing$，$\{1,3\} \cap U = \{1,3\}$。

[理解] (1) 只要 $x \in A$ 且 $x \in B$，必有结论 $x \in A \cap B$；(2) 只要 $x \in A \cap B$，必有结论 $x \in A$ 且 $x \in B$，即 $x \in A \wedge x \in B$ 为真。也可换个说法：若 $x \in A_1 \cap A_2$，则 $\forall i(1 \leqslant i \leqslant 2 \wedge i \in \mathbf{Z} \to x \in A_i)$ 为真，或者说，$\forall i((i=1 \vee i=2) \to x \in A_i)$ 为真。

若 $A \cap B = \varnothing$，称集合 A 与 B 是**不相交**的。

2．集合的并（union）

[定义 3-7] 属于集合 A 或者属于集合 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**并**，记作 $A \cup B$。符号表示为：

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}。$$

例如，$\{1,2,3\} \cup \{2,1,-1\} = \{1,2,3,-1\}$，$\{1,3\} \cup \varnothing = \{1,3\}$，$\{1,3\} \cup U = U$。

[理解] (1) 只要 $x\in A$ 或者 $x\in B$，必有结论 $x\in A\bigcup B$；(2) 只要 $x\in A\bigcup B$，必有结论 $x\in A$ 或者 $x\in B$，即 $x\in A\vee x\in B$ 为真。也可换个说法：若 $x\in A_1\bigcup A_2$，则 $\exists i(1\leqslant i\leqslant 2\wedge i\in \mathbf{Z}\wedge x\in A_i)$ 为真，或者说，$\exists i((i=1\vee i=2)\wedge x\in A_i)$ 为真。

3．集合的差（difference，subtraction）

[定义 3-8] 属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**差**，记作 $A-B$。符号表示为：

$$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}=\{x|x\in A\wedge \neg\, x\in B\}。$$

[理解] (1) 只要 $x\in A$ 且 $x\notin B$，必有结论 $x\in A-B$；(2) 只要 $x\in A-B$，必有结论 $x\in A$ 且 $x\notin B$；(3) 只要 $x\in A$ 且 $x\in B$，必有结论 $x\notin A-B$。

对于一般集合，$A-B$ 也称为 B 对于 A 的**补**或**相对补**，$U-B$ 称为 B 的**绝对补**或 B 的**余集**，简记为 $\sim B$ 或 $\overline{B}$。

[辨析] 依定义，$\sim B=U-B=\{x\mid x\in U\wedge x\notin B\}=\{x\mid 1\wedge\neg\, x\in B\}=\{x\mid\neg\, x\in B\}$，即 $\sim B$ 是由所有不属于 B 的元素组成的集合。于是，有

$$A-B=\{x|x\in A\wedge\neg\, x\in B\}=A\bigcap\sim B。$$

例 3-4 若 A 为素数集合，B 为奇数集合，求 $A-B$。

解 $A-B=\{2\}$。

4．集合的对称差（symmetric difference）

[定义 3-9] 属于集合 A 或者属于集合 B，但不同时属于 A 和 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**对称差**，记作 $A\oplus B$。符号表示为：

$$\begin{aligned}A\oplus B&=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=\{x\mid x\in A\bigcup B\wedge x\notin A\bigcap B\}\\&=(A-B)\bigcup(B-A)\\&=\{x|x\in A\,\overline{\vee}\,x\in B\}。\end{aligned}$$

[理解] (1) 只要 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\notin A\bigcap B$，必有结论 $x\in A\oplus B$；(2) 只要 $x\in A\oplus B$，必有结论 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\notin A\bigcap B$；(3) 只要 $x\in A\wedge x\in B$，必须 $x\notin A\oplus B$。

例 3-5 确定以下各式的值：

$\varnothing\bigcap\{\varnothing\}$，$\{\varnothing\}\bigcap\{\varnothing\}$，$\varnothing\bigcup\{\varnothing\}\bigcup\{\{\varnothing\}\}$，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\varnothing$，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\varnothing\}$，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\{\varnothing\}\}$，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\oplus\{\{\varnothing\}\}$。

解 $\varnothing\bigcap\{\varnothing\}=\varnothing$，$\{\varnothing\}\bigcap\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$，$\varnothing\bigcup\{\varnothing\}\bigcup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\varnothing=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\varnothing\}=\{\{\varnothing\}\}$，

$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing\}$，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\oplus\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing\}$。

[辨析] 直观理解基本运算的有效技术是英国数学家 John Venn 在 1881 年给出的文氏图（维恩图）。用一个矩形表示全集 U，内部用圆表示集合，用点表示集合的元素，如图 3-1 所示，其中，阴影部分显示了集合运算的结果。

考虑到运算的封闭性，通常将集合运算放在一个幂集上来考虑。例如，对于任意的集合 S，可以在其幂集 $\mathscr{P}(S)$ 上讨论集合的运算。这样一来，S 就是全集，对任意的 $x\in\mathscr{P}(S)$，$y\in\mathscr{P}(S)$，集合 x 与 y 的运算结果 z 仍是 S 的子集，即 $z\in\mathscr{P}(S)$。

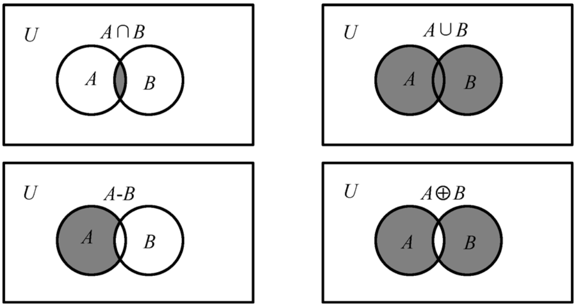


图 3-1

3.2.2　多集合的交与并

1．多个集合的交

[定义 3-10] 所有集合 $A_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$的共同元素组成的集合称为 A_i 的**交**，记作 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$。符号表示为：

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid\forall i(1\leqslant i\leqslant n\rightarrow x\in A_i)\}。$$

尽管定义中没有体现，容易理解，i 应为整数。当然，也可以在定义中明确指出。

[理解] 若有 $x\in\bigcap_{i=1}^{n}A_i$，则对$\forall i$，只要 $1\leqslant i\leqslant n$，则 $x\in A_i$。

2．多个集合的并

[定义 3-11] 至少属于某个集合 A_i（$1\leqslant i\leqslant n$）的元素组成的集合称为 A_i 的**并**，记作$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$。符号表示为：

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid\exists i(1\leqslant i\leqslant n\wedge x\in A_i)\}。$$

[理解] 若有 $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，则$\exists i$，$1\leqslant i\leqslant n$，使 $x\in A_i$。

如果将定义中的 n 改为 $+\infty$，就是无穷个集合的交与并。

例如，记 $A_i=\{1,1/2,1/3,\cdots,1/i\}$，则$\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i=\{1\}$，$\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\{1/i\mid i\geqslant 1\wedge i\in\mathbf{Z}\}$。

3．集合的广义交与并

[定义 3-12] 设集合$\mathcal{A}$的元素为集合，所有$\mathcal{A}$的元素的共同元素组成的集合称为$\mathcal{A}$的“**广义交**”，记作$\bigcap\mathcal{A}$。符号表示为：

$$\bigcap\mathcal{A}=\{x\mid\forall z(z\in\mathcal{A}\rightarrow x\in z)\}。$$

很明显，若有 $x\in\bigcap\mathcal{A}$，则对 $\forall z\in\mathcal{A}$，必有 $x\in z$。

[定义 3-13] 设集合$\mathcal{A}$的元素为集合，属于$\mathcal{A}$的某个元素的元素组成的集合称为$\mathcal{A}$的“**广义并**”，记作$\bigcup\mathcal{A}$。符号表示为：

$$\bigcup\mathcal{A}=\{x\mid\exists z(z\in\mathcal{A}\wedge x\in z)\}。$$

很明显，若有 $x\in\bigcup\mathcal{A}$，则$\exists z\in\mathcal{A}$，且 $x\in z$ 。

通俗地讲，集合$\mathcal{A}$的广义交和广义并就是$\mathcal{A}$的所有元素（集合）的交和并。

例 3-6 若$\mathcal{A}=\{\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{a,c\}\}$，求$\bigcap\mathcal{A}$和$\bigcup\mathcal{A}$。

解

$$\bigcap\mathcal{A}=\{a,b,c\}\bigcap\{b,c,d\}\bigcap\{a,c\}=\{c\}，$$

$$\bigcup\mathcal{A}=\{a,b,c\}\bigcup\{b,c,d\}\bigcup\{a,c\}=\{a,b,c,d\}。$$

在一般科技文献中，多集合的交与并可以有各种灵活的记法。例如，$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 和$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 可以表示为：

$$\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}A_i，或\bigcap_{i\in\{1,2,\cdots,n\}}A_i，或\bigcap_{i\in X}A_i，\quad X=\{1,2,\cdots,n\}。$$

$$\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}A_i，或\bigcup_{i\in\{1,2,\cdots,n\}}A_i，或\bigcup_{i\in X}A_i，\quad X=\{1,2,\cdots,n\}。$$

又如，记 H、G 为集合，$aH=\{a\times h\mid h\in H\}$，则$\bigcup_{a\in G}aH=\bigcup\{aH\mid a\in G\}$代表了一种集合的广义并。若 H=$\{0,1,2\}$，G=$\{1,2,3\}$，则

$$\bigcup_{a\in G}aH=\bigcup_{a=1}^{3}aH=1H\bigcup 2H\bigcup 3H=\{0,1,2\}\bigcup\{0,2,4\}\bigcup\{0,3,6\}=\{0,1,2,3,4,6\}。$$

熟悉多集合运算的表示方法有利于对实际问题进行更准确的数学描述。

[延伸] 一种直接利用集合基本运算所产生的应用技术称为“数学形态学”，它在图像处理领域的图像分割、特征抽取、边缘检测、图像滤波、图像增强和恢复等方面都有广泛的用途[20-22]。例如，对于一幅二值（黑白）图像，其数据可描述成一个 0（黑）、1（白）组成的集合，记作 A。令 B 是一个小的图像集合，称为“结构元素”或“探针”。于是，可以定义如下的形态学运算:

$$A\ominus B=\{x|B+x\subset A\}，A\oplus B=\bigcup\{A+b\mid b\in B\}。$$

它们分别称为“腐蚀”和“膨胀”。$A\ominus B$ 是将 B 平移 x 后仍包含于 A 的所有 x 组成的集合，$A\oplus B$ 的定义采用了集合的广义并，含义是将 A 依据 B 的全部元素平移后产生的所有元素集合。这些运算作用到集合后就会产生如其名字所体现的作用。例如，图 3-2 是利用一个圆形的小结构元素 B 腐蚀一个矩形图像 A 的结果。

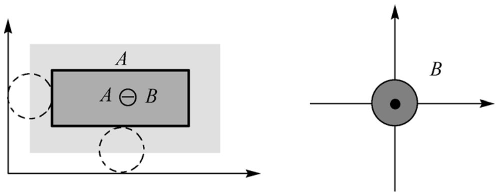


图 3-2

显然，原始图像 A 被腐蚀掉了边界。通过这种运算可以消除图像中的杂点、毛刺等噪声。类似地，通过膨胀可以添补图像中的小孔洞等成分。在此基础上，可以进一步定义开、闭、击中、击不中等运算。本质上，数学形态学是一种对信号的滤波。

思考与练习 3.2

3-11　说明并用符号描述 $A\cap B$、$A\cup B$、$A-B$、$\sim A$ 和 $A\oplus B$ 的含义。

3-12　设 $A=\{x|x$ 是 book 中的字母$\}$，$B=\{x|x$ 是 blood 中的字母$\}$，求 $A\cap B$、$A\cup B$、$A-B$ 和 $A\oplus B$。

3-13　设有自然数集 **N** 的子集 $A=\{i|i$ 可被 3 整除$\}$，$B=\{i|i$ 可被 5 整除$\}$，求 $A\cap B$、$A\cup B$、$\sim A$、$\sim(A\cap B)$。

3-14　若 $x\in A\cup B\cup C$，可以得到什么结论？若 $x\in A\cap B\cap C$，可以得到什么结论？用符号形式描述。

3-15　由 $x\in\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i$ 和 $x\in\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i$ 分别能得到什么结论？用符号形式描述。

3-16　对任意的正整数 i 和下述集合，求 $\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i$。

(a)　$A_i=\{i,i+1,i+2,\cdots\}$。　　(b)　$A_i=\{0,i\}$。

(c)　$A_i=\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge 0<x<i\}$。　　(d)　$A_i=\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x>i\}$。

3-17　有集合 $\varnothing\cup\{\varnothing\}$、$\{\varnothing\}\cap\{\varnothing\}$、$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\varnothing\}$ 和 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\{\varnothing\}\}$，哪个集合的值不等于 $\{\varnothing\}$？

3-18　根据定义总结 $\cap$、$\cup$ 运算满足的算律。

3-19　$\oplus$ 运算满足哪些算律？ $A\oplus A=$？ $A\oplus\varnothing=$？ $A\oplus U=$？

3-20　设 A、B 为集合，若 $A-B=B$，A 与 B 有何关系？若 $A-B=A$，A 与 B 有何关系？

3-21　设 A、B、C 为集合，判断下列命题的真假。若为真予以证明，否则给出反例。

(a)　$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cup B=B$。　　(b)　$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cup(B-A)=B$。

(c)　$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cap B=A$。　　(d)　$B\subseteq A$ 当且仅当 $(A-B)\cap B=A$。

3-22　对任意集合 A、B、C，下述命题是否成立？为什么？

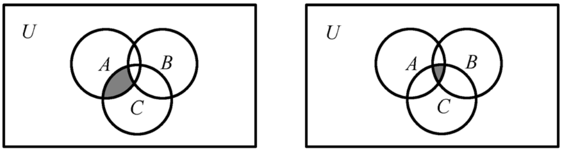
(a)　$A\cup B=A\cup C$ 则 $B=C$。　　(b)　$A\cap B=A\cap C$ 则 $B=C$。

3-23　画出下述集合的文氏图。

(a)　$\sim A\cap\sim B$。　　(b)　$A-\overline{(B\cup C)}$。

(c)　$A\cap(\sim B\cup C)$。

3-24　用集合运算公式表示出图 3-3 中的阴影部分。



(a)　　(b)

图 3-3

3-25　设集合 $\mathcal{A}=\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\},\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}\}$，求 $\bigcap\mathcal{A}$ 和 $\bigcup\mathcal{A}$。

3.3 集合运算的性质与证明方法

集合运算满足很多与命题演算一致的性质。除了简单的集合元素计算（包括幂集）之外，集合的基本运算中几乎仅需要证明一个问题：集合包含。一个问题可能要求直接说明集合包含，也可能要求说明集合相等，但本质上都是集合包含，只是相等时要证明互相包含。

集合包含或相等有两种主要证明方法，其一是集合的恒等变换，其二是基于定义的推理。应深入理解第二种方法。

3.3.1 集合运算的性质与演算证明

可以通过化简、变形等运算证明集合包含或相等关系，从而得到一些基本算律。这些算律可视为集合运算的基本性质。

由于集合运算的定义来自于命题逻辑和谓词逻辑，基本算律和性质都与命题逻辑的算律完全相同，如交换律、结合律和分配律等。因此，可以从命题逻辑的基本等价式直接推断出集合运算的对应性质，参见表 3-1。

表 3-1

集合运算律	对应的命题等价关系	含　义
$A\cup\varnothing=A$ $A\cap E=A$	$a\vee 0\Leftrightarrow a$ $a\wedge 1\Leftrightarrow a$	同一律
$A\cup U=U$ $A\cap\varnothing=\varnothing$	$a\vee 1\Leftrightarrow 1$ $a\wedge 0\Leftrightarrow 0$	零律
$A\cup A=A$ $A\cap A=A$	$a\vee a\Leftrightarrow a$ $a\wedge a\Leftrightarrow a$	等幂律
$\sim(\sim A)=A$	$\neg(\neg a)\Leftrightarrow a$	对合律（补集律）
$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$	$a\vee b\Leftrightarrow b\vee a$ $a\wedge b\Leftrightarrow b\wedge a$	交换律
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	$a\vee(b\vee c)\Leftrightarrow(a\vee b)\vee c$ $a\wedge(b\wedge c)\Leftrightarrow(a\wedge b)\wedge c$	结合律
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$a\wedge(b\vee c)\Leftrightarrow(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ $a\vee(b\wedge c)\Leftrightarrow(a\vee b)\wedge(a\vee c)$	分配律
$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$	$\neg(a\vee b)\Leftrightarrow\neg a\wedge\neg b$ $\neg(a\wedge b)\Leftrightarrow\neg a\vee\neg b$	德• 摩根律
$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	$a\vee(a\wedge b)\Leftrightarrow a$ $a\wedge(a\vee b)\Leftrightarrow a$	吸收律
$A\cup\sim A=U$ $A\cap\sim A=\varnothing$	$a\vee\neg a\Leftrightarrow 1$ $a\wedge\neg a\Leftrightarrow 0$	否定律

利用各运算的定义能够直接验证上述算律中的等式，还可以依据这些基本算律经过恒等变形证明其他集合等式或包含关系。

例 3-7 利用集合演算证明下述等式。

(1) $A\bigcup(A\bigcap B)=A$。 (2) $A\bigcap(B-C)=(A\bigcap B)-(A\bigcap C)$。

(3) $(B-A)\bigcup A=B\bigcup A$。　　　　(4) $\sim(A\bigcup(B\bigcap C))=(\sim B\bigcup\sim C)\bigcap\sim A$。

证明　(1) $A\bigcup(A\bigcap B)=(A\bigcap U)\bigcup(A\bigcap B)=A\bigcap(U\bigcup B)=A$。此为吸收律。

(2) $$(A\bigcap B)-(A\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap\sim(A\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap(\sim A\bigcup\sim C)$$
$$=(A\bigcap B\bigcap\sim A)\bigcup(A\bigcap B\bigcap\sim C)=\varnothing\bigcup(A\bigcap(B\bigcap\sim C))$$
$$=A\bigcap(B-C)\text{。}$$

(3) $(B-A)\bigcup A=(B\bigcap\sim A)\bigcup A=(B\bigcup A)\bigcap(\sim A\bigcup A)=(B\bigcup A)\bigcap U=B\bigcup A$。

(4) $\sim(A\bigcup(B\bigcap C))=\sim A\bigcap\sim(B\bigcap C)=\sim(B\bigcap C)\bigcap\sim A=(\sim B\bigcup\sim C)\bigcap\sim A$。

用恒等变形演算证明集合相等经常采取的方法是将复杂的表达式进行化简，但需要一定的技巧，应用范围也有限。

3.3.2　基于定义的集合运算证明方法

集合运算证明的核心问题是集合包含，即$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$，基于定义的证明方法就是：由$\forall x\in\mathcal{A}$的假定出发，推证出$x\in\mathcal{B}$的结论。

集合的名字可以变化，集合的元素可以变化，但由这种假定（前提）到结论的推证过程是确定的。

例 3-8　设$A\subseteq B$，求证$A\bigcap C\subseteq B\bigcap C$。

证明　这里的$\mathcal{A}=A\bigcap C$，$\mathcal{B}=B\bigcap C$。

对$\forall x$，若$x\in\mathcal{A}$，由集合交的定义，有

$$x\in A\wedge x\in C\text{。}$$

因为$A\subseteq B$，有

$$x\in B\wedge x\in C\text{。}$$

故$x\in\mathcal{B}$。结论成立。

[辨析] 观察要证明的结论，而不是条件！做出正确的假设“$\forall x\in\mathcal{A}$”并明确要推证的结论“$x\in\mathcal{B}$”之后，再细致研究题目给定的其他条件。

观察证明过程可知，集合的包含证明就是将结论中的集合“替代”定义中的集合，再逐个翻译、组合定义的过程。

$$\forall x,\quad x\in\mathcal{A}\Leftrightarrow_{(A\bigcap C\text{定义})}x\in A\wedge x\in C\Rightarrow_{(A\subseteq B\text{定义})}x\in B\wedge x\in C\Leftrightarrow_{(B\bigcap C\text{定义})}x\in\mathcal{B}$$

$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$定义

例 3-9　证明$\sim(A\bigcup B)=\sim A\bigcap\sim B$。

证明　先推证$\sim(A\bigcup B)\subseteq\sim A\bigcap\sim B$。

对$\forall x$，有

$$x\in\sim(A\bigcup B)\Rightarrow\neg\, x\in(A\bigcup B)\Rightarrow\neg(x\in A\vee x\in B)$$
$$\Rightarrow\neg\, x\in A\wedge\neg\, x\in B\Rightarrow x\in\sim A\wedge x\in\sim B$$
$$\Rightarrow x\in\sim A\bigcap\sim B\text{。}$$

由于上述过程都是可逆的，有$\sim A\bigcap\sim B\subseteq\sim(A\bigcup B)$，结论成立。

例 3-10 证明 $A-B=A-(A\cap B)$。

证明 先推证 $A-B\subseteq A-(A\cap B)$。

对 $\forall x$，有

$$x\in A-B\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B\Rightarrow x\in A\wedge x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A-(A\cap B)\text{。}$$

再推证 $A-(A\cap B)\subseteq A-B$。

对 $\forall x$，有

$$\begin{aligned}x\in A-(A\cap B)&\Rightarrow x\in A\wedge\neg\, x\in A\cap B\Rightarrow x\in A\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)\\&\Rightarrow x\in A\wedge(\neg\, x\in A\vee\neg\, x\in B)\\&\Rightarrow(x\in A\wedge\neg\, x\in A)\vee(x\in A\wedge\neg\, x\in B)\\&\Rightarrow x\in A\wedge\neg\, x\in B\Rightarrow x\in A-B\text{。结论成立。}\end{aligned}$$

例 3-11 证明 $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$，即对称差运算⊕满足结合律。

证明 对 $\forall x$，有

$$\begin{aligned}x\in A\oplus(B\oplus C)&\Rightarrow x\in A\,\overline{\vee}\,(x\in B\,\overline{\vee}\,x\in C)\\&\Rightarrow(x\in A\,\overline{\vee}\,x\in B)\,\overline{\vee}\,x\in C\Rightarrow x\in(A\oplus B)\oplus C\text{。}\end{aligned}$$

故 $A\oplus(B\oplus C)\subseteq(A\oplus B)\oplus C$。

因为上述蕴含关系都是可逆的，故 $(A\oplus B)\oplus C\subseteq A\oplus(B\oplus C)$。结论成立。

此例证明依赖于命题联结词 $\overline{\vee}$ 满足结合律的事实。

例 3-12 已知 $A\oplus B=A\oplus C$，问是否必有 $B=C$？

解 必有 $B=C$，这只要证明集合 B 和 C 相互包含，先推证 $B\subseteq C$。

对 $\forall x$，若 $x\in B$。分两种情况讨论：

(a) 若 $x\in A$，则 $x\notin A\oplus B$。因 $A\oplus B=A\oplus C$，有 $x\notin A\oplus C$。又因为 $x\in A$，必有 $x\in C$。

(b) 若 $x\notin A$，则 $x\in A\oplus B$。因 $A\oplus B=A\oplus C$，有 $x\in A\oplus C$。又因为 $x\notin A$，必有 $x\in C$。

总之，有 $x\in C$，即 $B\subseteq C$。

同理可证 $C\subseteq B$。结论成立。

此题目也可以采用集合算律来证明：

因 $A\oplus B=A\oplus C$，有

$$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)\text{。}$$

由对称差运算⊕满足结合律，有

$$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C\text{。}$$

因 $A\oplus A=\varnothing$，得 $\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$，知 $B=C$。

[辨析] 给出一定的条件，要求说明某论断是否成立是常见的问题形式。若给出肯定回答，一般需要完成一次证明，而否定回答时可举出一个说明论断不真的例子（常称为“反例”）。

例 3-13 对于集合 A、B、C，问在什么条件下，下列命题为真？

(1) $(A-B)\cup(A-C)=A$。 (2) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$。

(3) $(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$。　　　　(4) $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$。

解　此类问题应尽量化简等式左边的表达式，以得到能够容易说明其实质的简单关系。

(1) 因为

$$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C)$$
$$=A\cap(\sim B\cup\sim C)=A\cap\sim(B\cap C)=A-(B\cap C)\text{。}$$

因此，结论成立的条件是 A 与 $B\cap C$ 不相交，即 $A\cap B\cap C=\varnothing$。

(2) 题目等同于 $A-(B\cap C)=\varnothing$，故结论成立的条件是 $A\subseteq B\cap C$ 。

(3) 因为

$$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$$
$$=A\cap(\sim B\cap\sim C)=A\cap\sim(B\cup C)=A-(B\cup C)\text{。}$$

因此，结论成立的条件是 $A\subseteq B\cup C$ 。

(4) 因为对于任何集合 X，只有 $X\oplus X=\varnothing$。因此，结论成立的条件是 $A-B=A-C$ 。

[延伸] 利用集合的基本运算可以衍生出两个著名的原理，即“容斥原理”（或称“包含排斥原理”，inclusion-exclusion principle）和“鸽巢原理”（pigeonhole principle），它们是被广泛应用的计数技术[2,3]。

容斥原理可描述为“合并后集合的元素个数等于各集合的元素个数之和除去其共同元素的个数”，而鸽巢原理可描述为“若 n 个集合中所包含元素个数的总和大于 n，则至少有一个集合包含 2 个或更多个元素”。

例如，若 A_1 和 A_2 为有限集合，我们不能直接用 $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|$ 来计算 $A_1\cup A_2$ 的元素个数，除非 $A_1\cap A_2=\varnothing$。否则，$A_1\cap A_2$ 部分被重复地累加了一次。正确的做法是将重复累加的元素个数去除:

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|\text{。}$$

这就是容斥原理，其含义是包含整体 $|A_1|+|A_2|$ 并排斥掉共同的部分 $|A_1\cap A_2|$ 。

在实际使用时，容斥原理有两种主要应用形式。若 A_1 和 A_2 为有限集合，则

(1) $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$ 。

(2) $|\sim(A_1\cup A_2)|=|\sim A_1\cap\sim A_2|=|U|-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|$ 。

式(2)不过是计算式(1)中 $A_1\cup A_2$ 的余集的元素个数。

例如，计算以 1 开始或者以 00 结束的 8 位二进制符号串的个数。可记 A、B 分别是以 1 开始和以 00 结束的 8 位二进制符号串集合。注意到二进制串中的字符只有 0 和 1 两种状态，则 $|A|=2^7$，$|B|=2^6$ 。因为 $|A\cap B|=2^5$ ，故 $|A\cup B|=2^7+2^6-2^5=160$ 。

对含有 n 个有限集合 A_i 的一般情况，容斥原理的基本形式为:

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\text{。}$$

思考与练习 3.3

3-26 对任意集合 A、B、C，用运算定义验证下述性质。

(a) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。 (b) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

(c) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。 (d) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

3-27 将 $?\cap(A\cup B)=A$ 和 $A\cup(A\cap B)=?$ 中的“？”换成适当的集合使等式成立。它们是什么算律？

3-28 给出集合表达式 $(A-C)\cup B=A\cup B$ 成立的充分必要条件。

3-29 设 A、B 为集合，证明：

(a) $A\oplus B=B\oplus A$。 (b) $(A\oplus B)\oplus B=A$。

3-30 设 A、B 为集合，并分别满足下述条件，问集合 A 与 B 各是什么关系？

(a) $A-B=B$。 (b) $A-B=B-A$。

(c) $A\cap B=A\cup B$。 (d) $A\oplus B=A$。

3-31 设 A、B 为集合，证明 $A\subseteq B$ 当且仅当 $\sim B\subseteq\sim A$。

3-32 设 A、B、C 为集合，证明：

(a) $(A-B)-C=(A-C)-B$。 (b) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$。

(c) $(A-C)-(B-C)=(A-B)-C$。

3-33 对于集合 A、B、C，判断下列命题是否为真并予以说明。

(a) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$。 (b) $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$。

3-34 说明下列命题是否正确并说明理由。

(a) $A-(B\cup C)=(A-B)\cup C$。 (b) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$。

(c) $(A\cap B)\cup(B-A)=B$。

3-35 设 A、B 为集合，下述各式中哪个命题与 $A\subseteq B$ 不等价？

(a) $A\oplus B\subseteq B$。 (b) $A\cup B=B$。

(c) $A\cap B=B$。 (d) $\mathscr{P}(A)\subseteq\mathscr{P}(B)$。

3-36 在 10 名学生中选修 Android 编程的有 5 人，选修 IOS 编程的有 7 人，同时选修 Android 编程和 IOS 编程的有 3 人。问 Android 编程和 IOS 编程都没选修的学生有几人？

3-37 求由 a、b、c、d 四个字母构成的 n 位符号串中，a、b 和 c 至少出现一次的符号串数目。

3.4 序偶与笛卡儿积

集合既可以由简单元素构成，也可由复杂元素如集合构成。特别地，当集合元素是一类特殊的集合——序偶时有着特殊的作用，这样的集合是构成关系和函数的基础。

3.4.1　序偶与元组

[定义 3-14] 序偶（ordered pairs）是两个元素组成的有序集合，记作 $<x,y>$，也称为**有序对**或**二元组**。x、y 分别称为序偶的第一、第二个元素。

序偶一词本身的含义就是“有序的对”。

生活中的许多事物之间有一定关系，且成对出现，如平面上点的 2 个坐标、飞机票与座位、上与下、左与右及计算机上的网线接头与插口等。计算机内可以用<地址码，操作码>来构成单地址指令，手机电话簿中常用<拼音，人名>方式作为索引。

[辨析] 因为强调次序的原因，若 $x \neq y$，则 $<x,y> \neq <y,x>$。注意序偶的限界符既不是“{ }”，也不是“( )”，而是“< >”。通常$\{x, y\}$表示一般集合，(x, y)表示 2 个元素组成的无序集合。

[定义 3-15]　两个序偶相等，即 $<x,y> = <a,b>$ 当且仅当 $x = a$ 且 $y = b$。

例 3-14　若已知 $<2x+2, y> = <2y, x-y>$，求 x 和 y。

解　由定义，可构成一个二元一次方程组

$$2x+2=2y，\quad y=x-y。$$

解之得 $x=-2$， $y=-1$。

上述定义可推广到 ***n* 元组**，如三元组、四元组等，形式为$<x_1,x_2,\ldots,x_n>$，其含义是：

$$<x_1,x_2,\ldots,x_n> = <<x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}>,x_n>。$$

一般情况下，$<x_1,x_2,\cdots,x_n> \neq <x_1,<x_2,\cdots,x_n>>$。

[辨析] 严格讲，$<x_1,<x_2,\cdots,x_n>>$不是一个 n 元组，而是二元组。该二元组由一个简单元素 x_1 和一个 $n-1$ 元组$<x_2,\cdots,x_n>$组成。

在最初的计算机设计中，一个字节并不是固定的 8 个二进制位。因此，早期的国际标准中为了防止歧义，常称一个 8 位二进制串为八元组而不是字节。一个关系数据库是由若干张二维表组成的，每个表又由若干记录组成，而每个记录都是一个 n 元组。

[延伸] 实际上，程序设计中的所有运算和含有参数的函数在本质上都是以一个多元组为参数的。例如，对于如下的 C 语言函数 f：

```
void  f(int  x, double  y, char  z);
```

它的调用形式为 f(2, 3.5, ‘a’)，这里的参数数量、类型和次序都是不可改变的，故是一个三元组，只是没有（也不需要）写成<2,3.5, ‘a’>的形式而已[1]。

3.4.2　笛卡儿积

由于序偶的两个元素各来自于一个集合，因此，任给两个集合 A 和 B，都可以构造一种序偶的集合。

[定义 3-16]　若 A、B 是集合，它们构成的**笛卡儿积**是一个序偶集合，序偶的第一元素取自于 A，而第二个元素取自于 B，记作 $A \times B$，即

$$A \times B = \{<x, y> | x \in A \wedge y \in B\}。$$

笛卡儿积也称为集合的**直**（**接**）**积**，或者**叉乘**。这是一个核心性的定义。

[理解] 若 $<x,y>\in A\times B$，必有结论 $x\in A$ 且 $y\in B$。反之，对$\forall x\in A$，$\forall y\in B$，必有结论 $<x,y>\in A\times B$。由于集合 A 和 B 可以相同，因此，$\forall x\in A$，必有结论$<x,x>\in A\times A$。

例 3-15 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，求 $A\times B$ 和 $B\times A$。

解

$$A\times B=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<b,1>,<b,2>,<b,3>\},$$
$$B\times A=\{<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>,<3,a>,<3,b>\}。$$

在组成笛卡儿积时，要求来自 A、B 的元素是全部的，因此，集合中不能缺少任何一个序偶。同时，对于有限的笛卡儿积，显然有$|A\times B|=|A|\times|B|$。

事实上，如果 $A=B=\mathbf{R}$，笛卡儿积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 就是平面直角坐标系。可见，一般的笛卡儿积等同于“离散的直角坐标系”。

与简单集合类似，笛卡儿积部分的主要问题还是证明集合包含。不过，笛卡儿积的元素是序偶，因此，证明 $A\times B\subseteq C\times D$ 仍是从定义出发，形式为：

$\forall<x,y>\in A\times B\Rightarrow x\in A\wedge y\in B\Rightarrow$其他定义和条件的应用$\Rightarrow<x,y>\in C\times D$。

很容易得出以下结论，这是笛卡儿积的常用性质。

[定理 3-5] 对于任意集合 A、B 和 C，有

(1) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$。

(2) 通常，笛卡儿积不满足交换律，即

$$A\times B\neq B\times A。$$

(3) 笛卡儿积不满足结合律，即

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)。$$

其实，前者是三元组集合，而后者仅是二元组集合。

为了与 n 元组的含义一致，约定：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=(A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n。$$

特别地，$A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个}$，$n\geqslant1$。

(4) 笛卡儿积对交和并运算满足分配律，即

① $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$； ② $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$；

③ $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$； ④ $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$。

证明 这里仅证明①，其余性质的证明方法类似。

对$\forall<x,y>$，有

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$ 注：来自集合包含的假定

$\Leftrightarrow_{(笛卡儿积定义)}x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow_{(集合并定义)}x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$