# 第 3 章　系统的数学模型

## 考纲内容

### 学习目的与要求

通过本章的学习，明确为了分析和研究机械工程系统（特别是机、电综合系统）的动态特性，或者对它们进行控制，最重要的一步是建立系统的数学模型；明确数学模型的含义，掌握采用解析法建立一些简单机、电系统的数学模型的方法；掌握传递函数的定义、特点及其 8 个典型环节的表达式；掌握框图的表达特点及其简化原则；理解数学模型、传递函数与框图之间的关系。

### 考核知识点与考核要求

- 系统的数学模型
  - 数学模型的概念
    - 数学模型的含义　识记
    - 线性系统的含义及其最重要的特征，可以运用叠加原理　识记
    - 线性定常系统和线性时变系统的定义　识记
    - 非线性系统的定义及其线性化方法　识记
  - 系统微分方程的建立
    - 对于机械系统，运用达朗贝尔原理建立运动微分方程式　简单应用
    - 对于回转机械系统，理解等效转动惯量、等效阻尼系数以及等效输出力矩等概念　简单应用
    - 对于电气系统运用基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律，建立微分方程式　简单应用
    - 学会在系统建模时选取中间变量　简单应用
  - 传递函数
    - 传递函数的定义　领会
    - 传递函数的主要特点　领会
    - 传递函数的零点和极点的概念　领会
    - 传递函数的8个典型环节的表达式，理解其各自的特点　领会
  - 框图
    - 框图的表示方法　综合应用
    - 系统各环节框图之间的连接形式　综合应用
    - 框图的简化方法及简化原则　综合应用
    - 建立系统框图的步骤和方法以及由框图求传递函数的过程　综合应用
  - 机、电系统的传递函数
    - 会求各种机械系统的传递函数　综合应用
    - 各种电网络系统的传递函数　综合应用
    - 对较复杂的机、电综合系统建立其传递函数的过程和方法　综合应用

## 重点与难点

本章重点：学习如何采用分析法建立机械、电路系统的数学模型（包括微分方程、传递函数、框图），如何对框图进行简化求传递函数。

本章难点：建模时如何选中间变量，对机械系统如何进行受力分析，如何根据微分方程建立系统框图并通过简化框图求传递函数。

## 内容提要

# 3.1 概述

**1．数学模型**

数学模型是系统动态特性的数学表达式。建立数学模型是分析、研究一个动态系统特性的前提，是非常重要同时也是较困难的工作。一个合理的数学模型应以最简化的形式准确地描述系统的动态特性。建立系统的数学模型有两种方法：分析法和实验法。

**2．线性系统与非线性系统**

（1）线性系统：若系统的数学模型表达式是线性的，则这种系统就是线性系统。线性系统根据其微分方程系数的特点又可分为两种。

线性定常系统：用线性常微分方程描述的系统，如 $a\ddot{y}(t)+b\dot{y}(t)+cy(t)=\mathrm{d}x(t)$，式中，$a$，$b$，$c$，$d$ 均为常数。

线性时变系统：描述系统的线性微分方程的系数为时间的函数，如 $a(t)\ddot{y}(t)+b(t)\dot{y}(t)+c(t)y(t)=\mathrm{d}(t)x(t)$

（2）非线性系统：用非线性方程描述的系统称为非线性系统。

# 3.2 系统微分方程的建立

**1．列写微分方程的步骤**

列写系统的微分方程，目的是确定系统输入与输出的函数关系式。列写微分方程的一般步骤：

（1）确定系统的输入和输出。

（2）按照信息的传递顺序，从输入端开始，按物体的运动规律，列写出系统中各环节的微分方程。

（3）消去所列微分方程组中的各个中间变量，获得描述系统输入和输出关系的微分方程。

（4）将所得的微分方程加以整理，把与输入有关的各项放在等号右边，与输出有关的各项放在等号左边，并按降幂排列。

**2．机械等系统**

达朗贝尔原理：作用于每一个质点上的合力，同质点惯性力形成平衡力系，用公式表

达为

$$-m_i\ddot{x}_i(t)+\sum f_i(t)=0$$

式中，$\sum f_i(t)$——作用在第 $i$ 个质点上力的合力；

$-m_i\ddot{x}_i(t)$——质量为 $m_i$ 的质点的惯性力。

类似，还有液压系统、电网络系统等，都可依据相关原理建立系统的表达式。

## 3.3　传递函数

**1．传递函数**

对单输入-单输出线性定常系统，在初始条件为零的条件下，传递函数为系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。$G(s)$ 为系统的传递函数：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

传递函数的特点：

（1）传递函数的概念只适用于线性定常系统，它只反映系统在零初始条件下的动态性能。当初始条件不为零时，可以采用在平衡状态下增量化的求解方法来处理。

（2）系统传递函数反映系统本身的动态特性，只与系统本身的参数有关，与外界输入无关。

（3）对于物理可实现系统，传递函数分母中 $s$ 的阶次 $n$ 必不小于分子中 $s$ 的阶次 $m$。

（4）一个传递函数只能表示一对输入、输出间的关系。

（5）传递函数不说明被描述的系统的物理结构，不同性质的物理系统，只要其动态特性相同，就可以用同一类型的传递函数来描述。

**2．传递函数的典型环节**

比例环节：微分方程，$y(t)=Kx(t)$；传递函数，$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=K$。

积分环节：微分方程，$y(t)=\dfrac{1}{T}\int x(t)\mathrm{d}t$；传递函数，$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{1}{Ts}$。

微分环节：微分方程，$y(t)=T\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$；传递函数，$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=Ts$。

惯性环节：微分方程，$T\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=x(t)$；传递函数，$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{1}{Ts+1}$。

一阶微分环节：微分方程，$y(t)=T\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+x(t)$；传递函数，$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=Ts+1$。

振荡环节：微分方程，$T^2\dfrac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta T\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=x(t)$；传递函数，$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta TS+1}$；标准形式，$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{s^2+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}s+\omega_{\mathrm{n}}^2}$。

二阶微分环节：微分方程，$y(t)=T^2\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta T\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+x(t)$；传递函数，$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=T^2s^2+2\zeta Ts+1$。

延时环节：微分方程，$y(t)=x(t-\tau)$；传递函数，$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\mathrm{e}^{-\tau s}$。

## 3.4 框图

**1．框图**

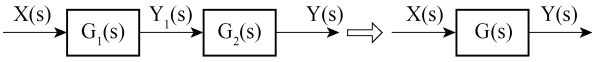
框图是系统中各环节的功能和信号流向的图解表示方法。框图的组成元素有方块、信号线、分支点和相加点。

**2．动态系统的构成**

任何动态系统和过程都是由内部的各个环节构成，为了求出整个系统的传递函数，可以先画出系统的框图，并注明系统各环节之间的联系。系统中各环节之间的联系归纳起来有以下几种。

（1）串联

各环节的传递函数一个个顺序连接，称为串联。串联系统及其等效框图如图 3-1 所示。




（a）两个环节串联　　（b）等效框图

图 3-1

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Y_1(s)}{X(s)}\cdot\frac{Y(s)}{Y_1(s)}=G_1(s)G_2(s)$$

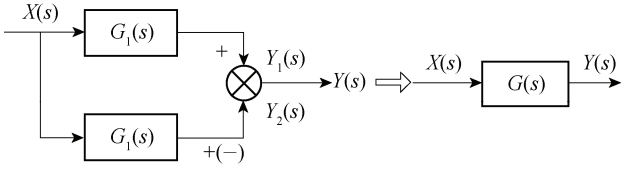
当系统是由 $n$ 个环节串联而成时，总传递函数等于各环节传递函数的乘积，即

$$G(s)=\prod_{i=1}^{n}G_i(s)$$

式中，$G_i(s)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 $i$ 个串联环节的传递函数。

（2）并联

凡是几个环节的输入相同，输出相加或相减的连接形式称为并联。并联系统及其等效框图如图 3-2 所示。




（a）两个环节并联　　（b）等效框图

图 3-2

当系统是由 $n$ 个环节并联，其总的传递函数等于各并联环节传递函数的代数和，即

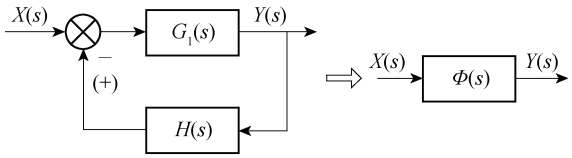
$$G(s)=\sum_{i=1}^{n}G_i(s)$$

式中，$G_i(s)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为第 $i$ 个并联环节的传递函数。

（3）反馈连接

反馈是将系统或某一环节的输出量，全部或部分地通过传递函数回输到输入端，又重新输入到系统中。

由反馈连接构成的基本闭环系统及其等效框图如图 3-3 所示。




（a）反馈连接　　（b）等效框图

图 3-3

反馈联接的传递函数为：

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G(s)}{1\pm G(s)H(s)}$$

**3．框图的等效变换及简化**

框图简化过程中应遵守的两条基本原则：

① 前向通道的传递函数保持不变。

② 各反馈回路的传递函数保持不变。

## 习题与解答

3-1　列出图 3-4 所示各种机械系统的运动微分方程式。图中未注明的 $x(t)$ 为输入位移，$y(t)$ 为输出位移。

解：（a）对 $y(t)$ 点利用牛顿第二定律得

$$-B\dot{y}(t)-k[y(t)-x(t)]=0$$

即，

$$B\dot{y}(t)+ky(t)=kx(t)$$

（b）对 $m$ 利用牛顿第二定律得

$$-B\dot{y}(t)-k[y(t)-x(t)]=m\ddot{y}(t)$$

即，

$$m\ddot{y}(t)+B\dot{y}(t)+ky(t)=kx(t)$$

（c）对 $y(t)$ 点利用牛顿第二定律得

$$-k_2y(t)-B\left[\dot{y}(t)-\dot{x}(t)\right]-k_1\left[y(t)-x(t)\right]=0$$

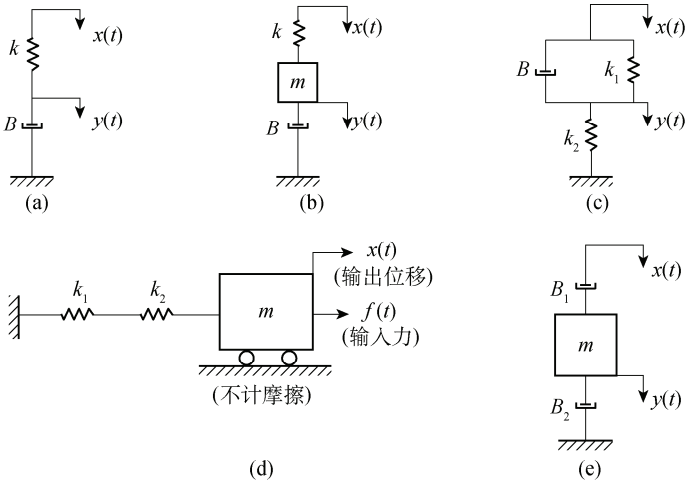



图 3-4

即，

$$B\dot{y}(t)+(k_1+k_2)y(t)=B\dot{x}(t)+k_1x(t)$$

（d）方法一：由牛顿定律有

$$f(t)-k'x(t)=m\ddot{x}(t)$$

其中，$k'=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}}=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

整理得，

$$m\ddot{x}(t)+\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x(t)=f(t)$$

方法二：设中间变量为弹簧 $k_2$ 的位移 $x_1$（$t$），且 $x_1$（$t$）<$x$（$t$），取分离体并进行受力分析，如图 3-5 所示。

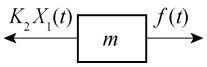



图 3-5

列写平衡方程为

$$k_2x_1(t)+m\ddot{x}(t)=f(t)$$
$$k_1\left(x(t)-x_1(t)\right)=k_2x_1(t)$$

消去中间变量 $x_1$，可得

$$m\ddot{x}(t)+\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x(t)=f(t)$$

（e）对 $m$ 利用牛顿第二定律得

$$-B_2\dot{y}(t)-B_1\left[\dot{y}(t)-\dot{x}(t)\right]=m\ddot{y}(t)$$

即，

$$m\ddot{y}(t)+(B_1+B_2)\dot{y}(t)=B_1\dot{x}(t)$$

3-2　列出图 3-6 所示系统的运动微分方程式，并求输入轴上的等效转动惯量 $J$ 和等效阻尼系数 $B$。图中 $T_1$、$\theta_1$ 为输入转矩及转角，$T_L$ 为输出转矩，$n_1$、$n_2$ 分别为输入和输出轴上齿轮的齿数。

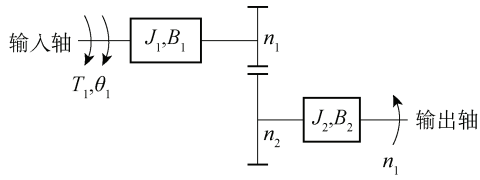



图 3-6

解：设中间变量 $T_1'$，$T_2$，可列动力学方程式

$$T_1 = J_1\ddot{\theta}_1 + B_1\dot{\theta}_1 + T_1'$$

$$T_2 = J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2 + T_L'$$

$$\frac{T_1'}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

综上各式得

$$\left[J_1 + J_2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right]\ddot{\theta}_1 + \left[B_1 + B_2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right]\dot{\theta}_1 + \frac{n_1}{n_2}T_L = T_1$$

故，

$$J_{\mathrm{eq}} = J_1 + J_2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

$$B_{\mathrm{eq}} = B_1 + B_2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

3-3　求图 3-7 所示各电气网络输入量和输出量之间关系的微分方程式。图中 $u_i$ 为输入电压，$u_0$ 为输出电压。

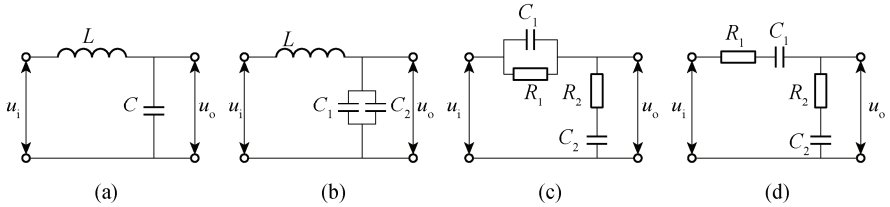



图 3-7

解：（a）$u_i$ 为输入电压，$u_0$ 为输出电压。

列写方程为

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{\mathrm{L}}+u_0-u_{\mathrm{i}}=0$$

整理得

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}t^2}+u_0=u_{\mathrm{i}}$$

（b）$u_{\mathrm{i}}$ 为输入电压，$u_0$ 为输出电压。

列写方程为

$$i_1=C_1\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}$$

$$i_2=C_2\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}$$

$$i_{\mathrm{L}}=i_1+i_2=C_1\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}+C_2\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{\mathrm{L}}=L\frac{Ei_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{\mathrm{L}}+u_0-u_{\mathrm{i}}=0$$

整理得，

$$L\left(C_1+C_2\right)\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}t^2}+u_0=u_{\mathrm{i}}$$

$u_{\mathrm{i}}$ 为输入电压，$u_0$ 为输出电压，列写方程为

$$\begin{cases}\dfrac{u_{\mathrm{i}}-u_0}{R_1}+C_1\dfrac{\mathrm{d}\left(u_{\mathrm{i}}-u_0\right)}{\mathrm{d}t}=i\\ u_0=R_2i+\dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i\mathrm{d}t\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}i_{\mathrm{C}_1}=C_1\dfrac{\mathrm{d}\left(u_{\mathrm{i}}-u_0\right)}{\mathrm{d}t}\\ i_{\mathrm{R}_1}=\dfrac{u_{\mathrm{i}}-u_0}{R_1}\\ i=i_{\mathrm{C}_1}+i_{\mathrm{R}_1}\end{cases}$$

整理得，

$$R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{R_2C_2}{R_1}+C_1+C_2\right)\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}+\frac{u_0}{R_1}=R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{R_2C_2}{R_1}+C_1\right)\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t}+\frac{u_{\mathrm{i}}}{R_1}$$

或

$$R_1R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}t^2}+\left(R_2C_2+R_1C_1+R_1C_2\right)\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}+u_0=R_1R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t^2}+\left(R_1C_1+R_2C_2\right)\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{i}}$$

（d）$u_{\mathrm{i}}$ 为输入电压，$u_0$ 为输出电压。

流过回路的电流为 $i$，列写方程为

$$u_{\mathrm{i}}=R_1i+\frac{1}{C_1}\int i\mathrm{d}t+u_0 \tag{3-1}$$

$$u_0 = R_2 i + \frac{1}{C_2}\int i\mathrm{d}t \tag{3-2}$$

（3-1）×$C_1$−（3-2）×$C_2$得

$$i = \frac{C_1 u_\mathrm{i} - (C_1 + C_2)u_0}{R_1 C_1 - R_2 C_2} \tag{3-3}$$

对式（3-2）求导得

$$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} = R_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_2}i \tag{3-4}$$

式（3-3）代入式（3-4）并整理得

$$(R_1 + R_2)\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)u_0 = R_2\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_2}u_\mathrm{i}$$

或

$$(R_1 + R_2)C_1C_2\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + (C_1 + C_2)u_0 = R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} + C_1u_\mathrm{i}$$

3-4　列出图 3-8 所示机械系统的作用力 $f(t)$ 与位移 $x(t)$ 之间关系的微分方程式。

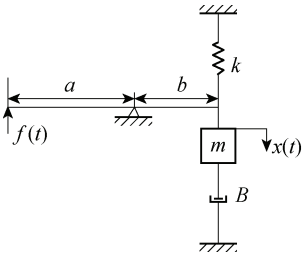



图 3-8

解：输入为机械系统的作用力 $f(t)$，输出为位移 $x(t)$。设杠杆转角为 $\theta$，

$$f(t)a\cos\theta = f'(t)b\cos\theta$$

即，

$$f'(t) = \frac{a}{b}f(t)$$

对 $m$ 使用牛顿第二定律得

$$f'(t) - B\dot{x}(t) - kx(t) = m\ddot{x}(t)$$

整理得

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = \frac{a}{b}f(t)$$

3-5　如图 3-9 所示的系统，当外力作用于系统时，$m_1$ 和 $m_2$ 有不同的位移输出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，试求 $f(t)$ 与 $x_2(t)$ 的关系，列出微分方程式。

解：对 $m_1$ 使用牛顿第二定律得

$$-B_1\left[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right] - kx_1(t) = m_1\ddot{x}_1(t) \tag{3-5}$$

对 $m_2$ 使用牛顿第二定律得

$$f(t) - B_2\dot{x}_2(t) - B_1\left[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\right] = m_2\ddot{x}_2(t) \tag{3-6}$$

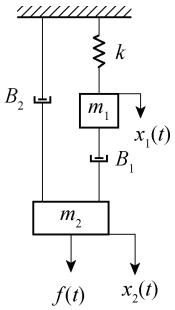



图 3-9

由式（3-6）得

$$\dot{x}_1(t)=\frac{m_2\ddot{x}_2(t)+(B_1+B_2)\dot{x}_2(t)-f(t)}{B_1} \tag{3-7}$$

对式（3-5）等号两边同时求微分得

$$-B_1\left[\ddot{x}_1(t)-\ddot{x}_2(t)\right]-k\dot{x}_1(t)=m_1\dddot{x}_1(t) \tag{3-8}$$

将式（3-7）表示的 $\dot{x}_1(t)$ 及其二、三阶导数代入式（3-8）并整理得

$$m_1m_2\frac{\mathrm{d}^4x_2(t)}{\mathrm{d}t^4}+\left[m_2B_1+m_1(B_1+B_2)\right]\frac{\mathrm{d}^3x_2(t)}{\mathrm{d}t^3}+(m_2k+B_1B_2)\frac{\mathrm{d}^2x_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+k(B_1+B_2)\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$=m_1\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}+B_1\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+kf(t)$$

3-6　求图 3-10 所示各机械系统的传递函数，其中图 3-10（a）和图 3-10（b）中 $f(t)$ 为输入，$x(t)$ 为输出；图 3-10（c）和图 3-10（d）中 $x_1(t)$ 为输入，$x_2(t)$ 为输出。

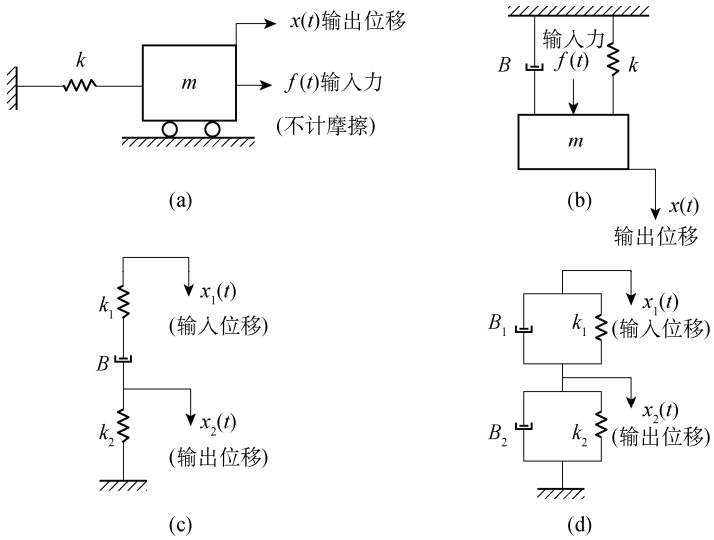



图 3-10

解：（a）对 $m$ 利用牛顿第二定律得

$$f(t)-kx(t)=m\ddot{x}(t)$$

即，

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=f(t)$$

令 $X(s)=L[x(t)],F(s)=L[f(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉氏变换得

$$\left(ms^2+k\right)X(s)=F(s)$$

由此得该系统的传递函数为

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+k}$$

（b）对 $m$ 利用牛顿第二定律得

$$f(t)-B\dot{x}(t)-kx(t)=m\ddot{x}(t)$$

即，

$$m\ddot{x}(t)+B\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$$

令 $X(s)=L[x(t)],F(s)=L[f(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉氏变换得

$$\left(ms^2+Bs+k\right)X(s)=F(s)$$

由此得该系统的传递函数为

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+Bs+k}$$

（c）引入中间变量 $x_3(t)$，分别对 $x_2(t)$ 点和 $x_3(t)$ 点利用牛顿第二定律得

$$-B\left[\dot{x}_2(t)-\dot{x}_3(t)\right]-k_2x_2(t)=0$$

$$-B\left[\dot{x}_3(t)-\dot{x}_2(t)\right]-k_1\left[x_3(t)-x_1(t)\right]=0$$

令 $X_1(s)=L[x_1(t)],X_2(s)=L[x_2(t)],X_3(s)=L[x_3(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，对上两式等号两边同时做拉氏变换得

$$-(Bs+k_2)X_2(s)+BsX_3(s)=0 \tag{3-9}$$

$$-(Bs+k_1)X_3(s)+BsX_2(s)+k_1X_1(s)=0 \tag{3-10}$$

由式（3-9）得

$$X_3(s)=\frac{(Bs+k_2)X_2(s)}{Bs}$$

代入式（3-10）并整理得此系统的传递函数为

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)}=\frac{k_1Bs}{(k_1+k_2)Bs+k_1k_2}$$

（d）对 $x_2(t)$ 点利用牛顿第二定律得

$$-B_2\dot{x}_2(t)-B_1\left[\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)\right]-k_2x_2(t)-k_1\left[x_2(t)-x_1(t)\right]=0$$

即，

$$(B_1+B_2)\dot{x}_2(t)+(k_1+k_2)x_2(t)=B_1\dot{x}_1(t)+k_1x_1(t)$$

令 $X_1(s)=L[x_1(t)],X_2(s)=L[x_2(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉氏变换得

$$\left[\left(B_1+B_2\right)s+\left(k_1+k_2\right)\right]X_2\left(s\right)=\left(B_1s+k_1\right)X_1\left(s\right)$$

由此得该系统的传递函数为

$$\frac{X_2\left(s\right)}{X_1\left(s\right)}=\frac{B_1s+k_1}{\left(B_1+B_2\right)s+k_1+k_2}$$

3-7　图 3-11 所示 $f\left(t\right)$ 为输入力，系统的扭转弹簧刚度为 $k$，轴的转动惯量为 $J$，阻尼系数为 $B$，系统的输出为轴的转角 $\theta\left(t\right)$，轴的半径为 $r$，求系统的传递函数。

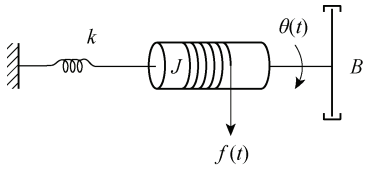



图 3-11

解：

由题意列扭矩平衡方程式为

$$k\theta\left(t\right)+J\ddot{\theta}\left(t\right)+B\dot{\theta}\left(t\right)=rf\left(t\right)$$

对上式两边进行拉氏变换，得

$$k\Theta\left(s\right)+Js^2\Theta\left(s\right)+Bs\Theta\left(s\right)=rF\left(s\right)$$

则

$$\frac{\Theta\left(s\right)}{F\left(s\right)}=\frac{r}{Js^2+Bs+k}$$

3-8　证明图 3-12（a）和图 3-12（b）所示的系统是相似系统。其中，$u_i\left(t\right)$、$x_i\left(t\right)$ 为输入，$u_0\left(t\right)$、$x_2\left(t\right)$ 为输出。

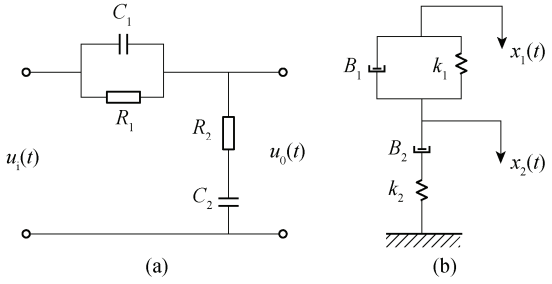



图 3-12

解：图 3-12（a）与 3-3 题中图 3-7（d）一样，求取数学模型方法可用前文介绍方法，也可用下文介绍的方法来求取。

$u_i\left(t\right)$ 为输入电压，$u_0\left(t\right)$ 为输出电压，流过 $R_2$ 的电流 $i$（$t$），

$$i\left(t\right)=C_1\frac{\mathrm{d}\left(u_i\left(t\right)-u_0\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{u_i\left(t\right)-u_0\left(t\right)}{R_1}$$

$$i\left(t\right)=C_2\frac{\mathrm{d}\left(u_0\left(t\right)-i\left(t\right)R_2\right)}{\mathrm{d}t}$$

代入得

$$C_1\frac{\mathrm{d}(u_\mathrm{i}(t)-u_0(t))}{\mathrm{d}t}+\frac{u_\mathrm{i}(t)-u_0(t)}{R_1}=C_2\frac{\mathrm{d}u_0(t)}{\mathrm{d}t}-R_2C_2\left[C_1\frac{\mathrm{d}^2(u_\mathrm{i}(t)-u_0(t))}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R_1}\cdot\frac{\mathrm{d}(u_\mathrm{i}(t)-u_0(t))}{\mathrm{d}t}\right]$$

整理得

$$R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}^2u_0(t)}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{R_2C_2}{R_1}+C_1+C_2\right)\frac{\mathrm{d}u_0(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{u_0(t)}{R_1}=R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{i}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{R_2C_2}{R_1}+C_1\right)\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{i}(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{u_\mathrm{i}(t)}{R_1}$$

等式两边进行拉氏变换并整理得

$$\begin{aligned}\frac{U_0(s)}{U_\mathrm{i}(s)}&=\frac{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2)s+1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1}\\&=\frac{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)}{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)+R_1C_2s}\end{aligned}$$

（b）在 $k_2$ 上端引入中间变量 $x(t)$，分别对 $x(t)$ 和 $x_2(t)$ 利用牛顿第二定律得

$$-B_2(\dot{x}_2(t)-\dot{x}(t))-B_1(\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t))-k_1(x_2(t)-x_1(t))=0$$

$$-B_2(\dot{x}(t)-\dot{x}_2(t))-k_2x(t)=0$$

令 $X_1(s)=L[x_1(t)],X_2(s)=L[x_2(t)],X(s)=L[x(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉氏变换得

$$-B_2(sX_2(s)-sX(t))-B_1(sX_2(s)-sX_1(t))-k_1(X_2(s)-X_1(s))=0$$

$$-B_2(sX(s)-sX_2(s))-k_2X(s)=0$$

消去 $X(s)$ 得

$$G(s)=\frac{X_2(s)}{X_1(s)}=\frac{(B_1s+k_1)(B_2s+k_2)}{(B_1s+k_1)(B_2s+k_2)+B_2k_2s}=\frac{\left(1+\frac{B_1}{k_1}s\right)\left(1+\frac{B_2}{k_2}s\right)}{\left(1+\frac{B_1}{k_1}s\right)\left(1+\frac{B_2}{k_2}s\right)+\frac{B_2}{k_1}s}$$

和图 3-12（a）所示系统具有相似的传递函数，故这两个系统为相似系统。

3-9　若系统在阶跃输入 $x(t)=1(t)$ 作用时，系统的输出响应为 $y(t)=1-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}$，试求系统的传递函数和脉冲响应函数。

解：阶跃输有

$$x(t)=1(t),\quad X(s)=\frac{1}{s}$$

系统的输出响应为

$$y(t)=1-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t},\quad Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}=\frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}$$

系统的传递函数为

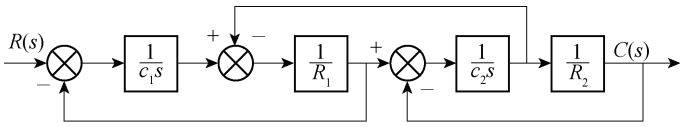
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}}{\frac{1}{s}}=\frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s+2)}$$

脉冲响应函数 $X(s)=1$，有

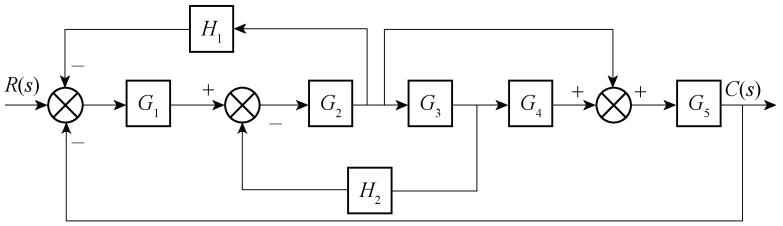
$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s+2)}\times 1=\frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s+2)}=1-\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

$$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=L^{-1}\left[1-\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\right]=\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}$$

3-10　运用框图简化法则，求图 3-13 所示各系统的传递函数。



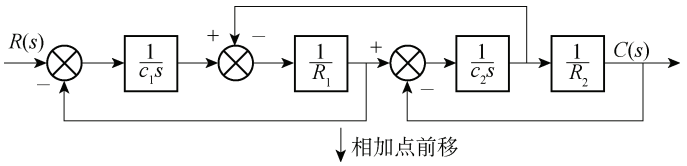

(a)



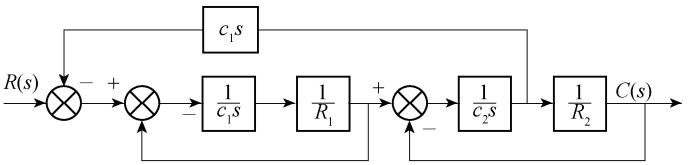

(b)

图 3-13

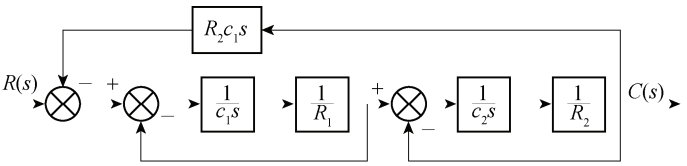
解：（1）图 3-13（a）所示系统框图的化简过程如图 3-14 所示。



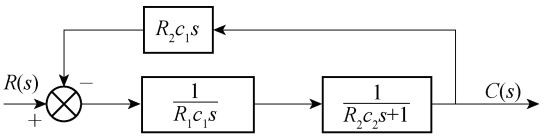

相加点前移




分支点后移




消去两个反馈回路




消去反馈回路

图 3-14

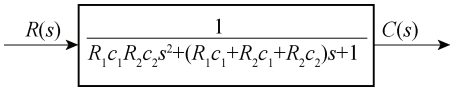



图 3-14（续）

传递函数：

$$G(s)=\frac{1}{R_1c_1R_2c_2s^2+(R_1c_1+R_2c_1+R_2c_2)s+1}=\frac{1}{(1+R_1c_1s)(1+R_2c_2s)+R_2c_1s}$$

（2）图 3-13（b）所示系统框图的化简过程如图 3-15 所示。

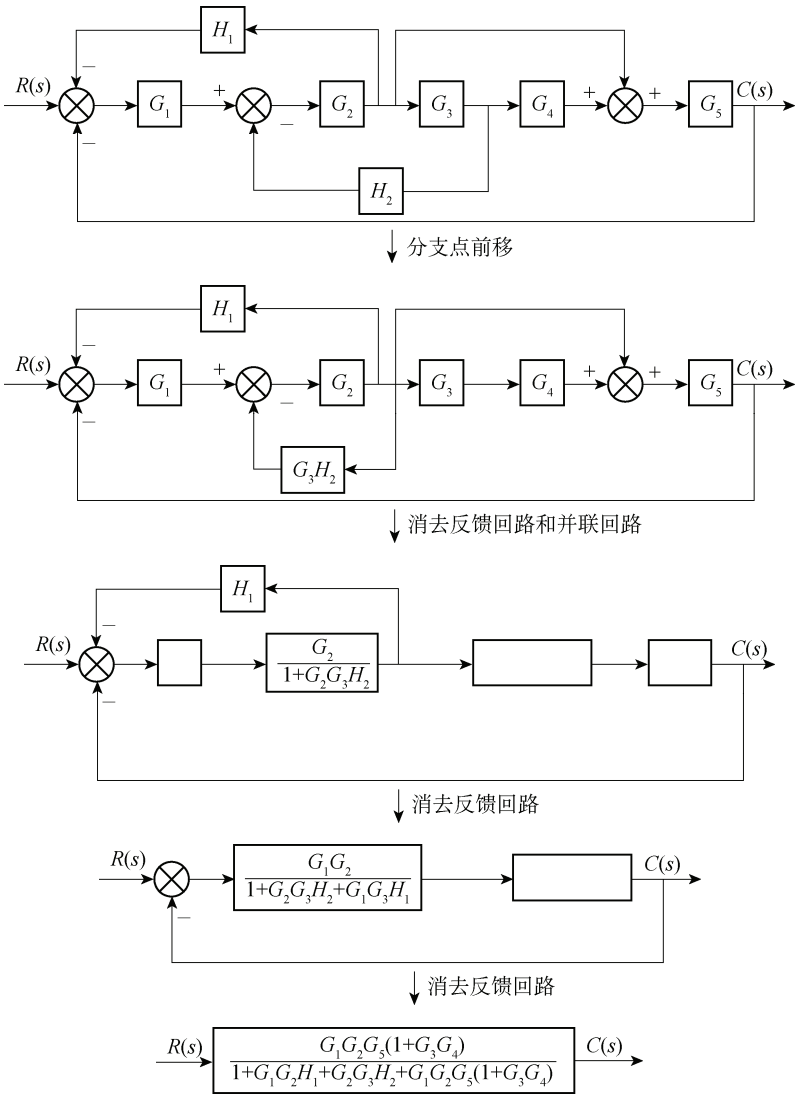



图 3-15

传递函数为

$$G(s)=\frac{G_1G_2G_5(1+G_3G_4)}{1+G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_5(1+G_3G_4)}$$

3-11　绘制图 3-16 所示系统的框图，并写出其传递函数。

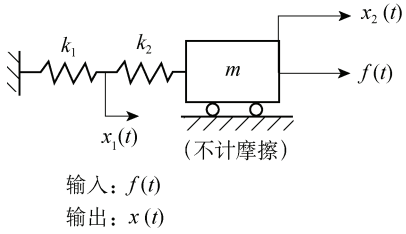



图 3-16

解：分别对质量 $m$ 和 $x_1(t)$ 利用牛顿第二定律得

$$f(t)-k_2\left(x(t)-x_1(t)\right)=m\ddot{x}(t)$$

$$-k_1x_1(t)-k_2\left(x_1(t)-x(t)\right)=0$$

$$m\ddot{x}(t)+k_2x(t)=f(t)+k_2x_1(t)$$

整理得

$$x_1(t)=\frac{k_2}{k_1+k_2}x(t)$$

在初始条件为 0 的情况下，对上两式等号两边同时做拉氏变换得

$$\left(ms^2+k_2\right)X(s)=F(s)+k_2X_1(s)$$

$$X_1(s)=\frac{k_2}{k_1+k_2}X(s)$$

上两式的框图分别如图 3-17 和图 3-18 所示。将图 3-17 和图 3-18 所示系统框图合并得系统框图如图 3-19 所示，化简后如图 3-20 所示。

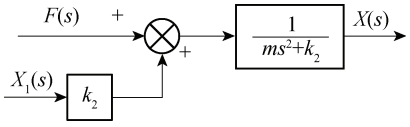



图 3-17

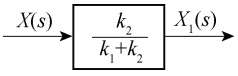



图 3-18

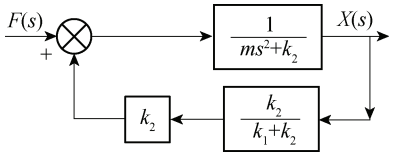



图 3-19

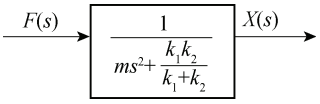



图 3-20

系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{\dfrac{1}{ms^2+k_2}}{1-\dfrac{1}{ms^2+k_2}\cdot\dfrac{k_2^2}{k_1+k_2}}=\frac{1}{ms^2+\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}}$$

3-12　绘制图 3-21 所示系统的框图，该系统在开始时处于静止状态，系统的输入为外力 $f(t)$，输出为位移 $x(t)$，并写出系统的传递函数。

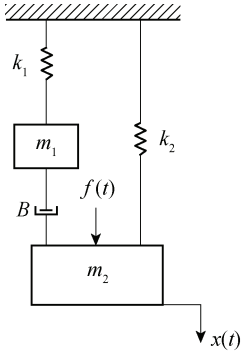



图 3-21

解：设 $m_1$ 的位移为 $x_1(t)$，分别对质量 $m_1$ 和 $m_2$ 利用牛顿第二定律得

$$-B\left(\dot{x}_1(t)-\dot{x}(t)\right)-k_1x_1(t)=m_1\ddot{x}_1(t)$$

$$f(t)-B\left(\dot{x}(t)-\dot{x}_1(t)\right)-k_2x(t)=m_2\ddot{x}(t)$$

整理得

$$m_1\ddot{x}_1(t)+B\dot{x}_1(t)+k_1x_1(t)=B\dot{x}(t)$$

$$m_2\ddot{x}(t)+B\dot{x}(t)+k_2x(t)=f(t)+B\dot{x}_1(t)$$

在初始条件为 0 的情况下，对上两式等号两边同时做拉氏变换得

$$\left(m_1s^2+Bs+k_1\right)X_1(s)=BsX(s)$$

$$\left(m_2s^2+Bs+k_2\right)X(s)=F(s)+BsX_1(s)$$

即，

$$X_1(s)=\frac{Bs}{m_1s^2+Bs+k_1}X(s)$$

$$X(s)=\frac{1}{m_2s^2+Bs+k_2}\left[F(s)+BsX_1(s)\right]$$

上两式的框图分别如图 3-22（a）、（b）所示，将图 3-22（a）、（b）所示框图合并得系统的框图如图 3-22（c）所示，化简一次后的框图如图 3-22（d）所示。

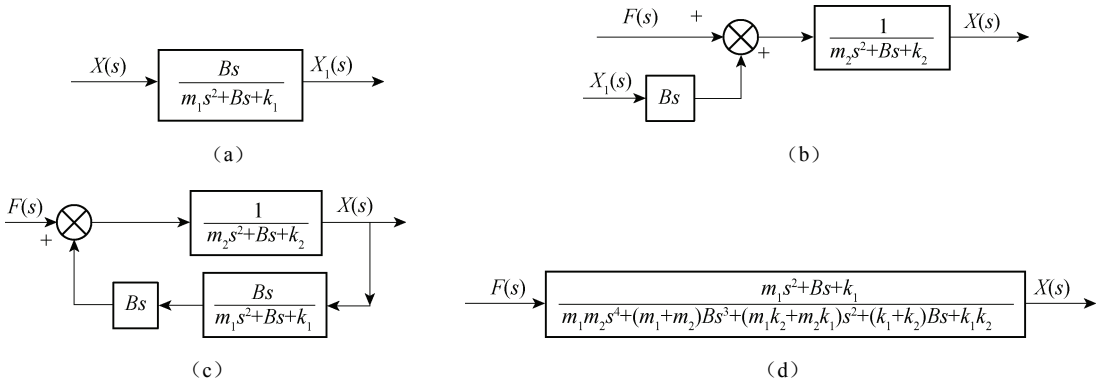



图 3-22

系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{m_1s^2+Bs+k_1}{m_1m_2s^4+(m_1+m_2)Bs^3+(m_1k_2+m_2k_1)s^2+(k_1+k_2)Bs+k_1k_2}$$

$$=\frac{m_1s^2+Bs+k_1}{(m_1s^2+Bs+k_1)(m_2s^2+Bs+k_2)-B^2s^2}$$