第 2 章　极限与连续

2.1　知 识 要 点

本章内容主要包括：数列极限的定义与性质，函数极限的定义及其性质，函数的左极限和右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算法则，极限存在准则，两个重要极限，函数的连续性，间断点的类型以及闭区间上的连续函数的性质等.

2.1.1　极限的概念与性质

1．极限的概念

极限的概念主要包括数列的极限和函数的极限．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 的定义为：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立.

函数的极限分为 $x\to\infty$ 、$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限两种情况，具体为：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\ M>0$，当 $|x|>M$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

类似地，可以给出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 以及 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 的定义．两个重要的结论需要读者掌握：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

2．极限的性质

（1）**唯一性**　若极限 $\lim Y$ 存在，则极限值唯一.

（2）**有界性**　如果 $\lim Y$ 存在，则 Y 是局部有界的．特别地，若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，则 $\{u_n\}$ 不仅是局部有界的，而且是全局有界的.

（3）**保号性**　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

（4）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant 0$ (或 $f(x)\leqslant 0$)，则有 $A\geqslant 0$ (或 $A\leqslant 0$).

（5）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant g(x)$ (或 $f(x)\leqslant g(x)$)，则有 $A\geqslant B$ (或 $A\leqslant B$).

注　这里变量 Y 既可以表示数列，也可以表示函数，下同.

2.1.2　无穷小量与无穷大量

1．无穷小的概念及其性质

以 0 为极限的变量称为**无穷小**（或**无穷小量**）. 需要注意的是，0 是一种特殊的无穷小. 无穷小的概念在整个微积分中有着重要的作用，需要读者引起重视.

无穷小有如下性质：

（1）有限个无穷小的代数和是无穷小；

（2）有界变量与无穷小的乘积是无穷小；

（3）$\lim Y = A \Leftrightarrow Y = A + \alpha$，其中 α 是无穷小(与 Y 同在一个变化过程中).

2．无穷小的阶

设 α, β 是同一变化过程中的两个无穷小，则

（1）若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**(或 α 是比 β **低阶的无穷小**)，记为 $\beta = o(\alpha)$.

（2）若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则称 β 是与 α **同阶的无穷小**，记为 $\beta = O(\alpha)$. 特殊地，当 $c = 1$ 时，称 β 与 α 是**等价的无穷小**，记为 $\alpha \sim \beta$.

（3）若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，$k > 0$，则称 β 是关于 α 的 k **阶无穷小**，记为 $\beta = O(\alpha^k)$.

3．等价无穷小量的性质

性质 1　设 α，β，γ 是同一变化过程中的无穷小量，则有

（1）若 $\alpha \sim \beta$，则 $\beta \sim \alpha$；　　（2）若 $\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$，则 $\alpha \sim \gamma$.

性质 2（等价无穷小量替换定理）　设 α，β，$\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 是同一变化过程中的无穷小量，且 $\alpha \sim \bar{\alpha}$，$\beta \sim \bar{\beta}$，$\lim \dfrac{\alpha}{\beta}$ 存在，则有

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\bar{\alpha}}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\bar{\beta}} = \lim \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

4．常见的等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时，有

（1）$\sin x \sim x$；　　（2）$\arcsin x \sim x$；

（3）$\tan x \sim x$；　　（4）$\arctan x \sim x$；

（5）$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2} x^2$；　　（6）$\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2} x^3$；

（7）$\ln(1 + x) \sim x$；　　（8）$\log_a(1 + x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$　$(a > 0, a \neq 1)$；

（9）$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$；　　（10）$a^x - 1 \sim x \ln a$　$(a > 0, a \neq 1)$；

（11）$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x$　　（12）$\sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$；

（13）$\sqrt{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$（为（12）式的特殊情况）.

5．无穷大量

本质上，无穷大量 Y 的极限是不存在的，但由于其变化趋势是明显的，故借用极限的记号，将其记为 $\lim Y=\infty$ 或 $Y\to\infty$．由于无穷大量的极限不存在，因此关于无穷大量的问题往往转换为无穷小量去讨论.

无穷大量的具体定义可以分为如下三种情况：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty \Leftrightarrow \forall M>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|u_n|>M$ 成立.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0$，$\exists\ X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|>M$ 成立.

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$ 成立.

注意无穷大量与无界变量的区别　无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量.

例如，$a_n=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ n, & n=2k\end{cases}$（其中 k 为正整数）为无界变量，但当 $n\to\infty$ 时不是无穷大量（为什么？）.

2.1.3　四个极限存在准则与两个重要极限

1．极限存在准则

准则 1　夹逼定理

如果变量 X,Y,Z 满足 $X\leqslant Y\leqslant Z$，且 $\lim X=\lim Z=A$（A 为某常数），那么 $\lim Y$ 也存在且 $\lim Y=A$.

准则 2　单调有界数列必有极限.

准则 3　数列 $\{u_n\}$ 与子数列 $\{u_{n_k}\}$ 之间的关系

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A \Leftrightarrow$ 对 $\{u_n\}$ 的任何子数列 $\{u_{n_k}\}$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=A$.

（3）当 $\{u_n\}$ 是单调数列时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A \Leftrightarrow$ 存在某个子数列 $\{u_{n_k}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$.

准则 4　海涅（Heine）定理

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对任何数列 $\{x_n\}$，$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，且 $x_n\neq x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

Heine 定理给出了数列极限与函数极限之间的关系.

2．两个重要公式

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．该极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 类型的未定式．它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或者 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$．该极限属于 1^∞ 类型的未定式．它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$.

2.1.4　几个重要的结论

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ 1 & a=1 \\ \text{不存在} & \text{其他} \end{cases}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & n<m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & n=m \\ \infty & n>m \end{cases}$，　(其中 $a_n \neq 0, b_m \neq 0$)；

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (有限，$+\infty$ 或 $-\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$；

（4）若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限都存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = AB .$$

（5）当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$；

（6）$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2.1.5　施笃兹（O.Stolz）定理

定理 1　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，且数列 $\{b_n\}$ 严格单调递减，若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ 存在（或等于 $+\infty$，或 $-\infty$），则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 存在（或等于 $+\infty$，或 $-\infty$），且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} .$$

定理 2　设数列 $\{b_n\}$ 严格单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ 存在（或等于 $+\infty$，或 $-\infty$），则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 存在（或等于 $+\infty$，或 $-\infty$），且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} .$$

施笃兹定理相当于数列极限的洛必达法则.

2.1.6　柯西（Cauchy）定理

设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内有定义，且内闭有界（即对于任意的 $[c, d] \subset (a, +\infty)$，函数 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上有界），若 $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - f(x-1)] = A$（或 $+\infty$，或 $-\infty$），则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A\ （或 +\infty，或 -\infty）.$$

2.1.7　关于函数的连续性

函数的连续性是通过极限定义的，因此判断函数是否连续及判断函数间断点的类型，本质上仍是求极限．因为初等函数在其定义区间上总是连续的，因此讨论函数的连续性主要针对非初等函数而言，例如，在讨论分段函数的连续性时，只需要讨论函数在分段点处的连续性即可．

闭区间上的连续函数有一些很好的性质，例如，有界性定理、最值定理、介值定理及零点定理，这些都需要读者好好掌握．

2.1.8　求极限的常用方法

（1）利用极限的四则运算法则．往往结合对函数的恒等变形，常用的方法有：因式分解、通分、有理化、三角恒等变形等；

（2）利用无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量之间的关系（特别是利用有界变量与无穷小量的积仍是无穷小量的性质）等；

（3）利用等价无穷小量的性质；

（4）利用高阶无穷小量的性质；

（5）利用四个极限存在准则；

（6）利用两个重要极限；

（7）利用极限与左、右极限的关系（适用于求分段函数在分段点处的极限以及用定义求极限等情形）；

（8）利用施笃兹定理求数列极限；

（9）利用连续性（适用于求函数在其连续点处的极限）；

（10）利用导数定义求极限（见第 3 章）；

（11）利用泰勒公式求极限（见第 4 章）；

（12）利用洛必达法则求极限（见第 5 章）；

（13）利用定积分的定义求极限；

（14）利用积分中值定理求极限；

（15）利用级数收敛的必要条件求极限．

2.2　典型例题分析

2.2.1　题型一、利用极限的分析定义求极限

例 2.2.1　设极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$（有限，$+\infty$ 或 $-\infty$），试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=A$.

证法 1　利用极限的定义证明．

（1）当 A 为有限数时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，所以对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立．对于上述 $\varepsilon>0$ 和 N_1，有

$$\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}-A\right|=\left|\frac{(u_1-A)+(u_2-A)+\cdots+(u_n-A)}{n}\right|$$
$$\leqslant\frac{|u_1-A|+\cdots+|u_{N_1}-A|}{n}+\frac{(n-N_1)}{n}\varepsilon,$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_1-A|+\cdots+|u_{N_1}-A|}{n}=0$，所以对于上述 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，有

$$\frac{|u_1-A|+\cdots+|u_{N_1}-A|}{n}<\varepsilon,$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}-A\right|<2\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=A$.

（2）当 A 为 $+\infty$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$，则对 $\forall M>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $u_n>M$． 因此当 $n>N_1$ 时，

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{N_1}}{n}+\frac{u_{N_1+1}+\cdots+u_n}{n}$$
$$\geqslant\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{N_1}}{n}+\frac{(n-N_1)M}{n},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{N_1}}{n}+\frac{(n-N_1)M}{n}\right]=M$， 故存在正整数 N_2， 当 $n>N_2$ 时， 有

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{N_1}}{n}+\frac{(n-N_1)M}{n}>\frac{1}{2}M,$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$， 对于上述 $\forall M>0$， 当 $n>N$ 时， 有

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}>\frac{1}{2}M,$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=+\infty$.

（3）当 A 为 $-\infty$， 即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=-\infty$， 利用类似于（2）的方法可以证明，具体过程略.

证法 2　利用 O.Stolz 定理证明.

设 $a_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$， $b_n=n$， 则数列 $\{b_n\}$ 严格单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$， 而极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=A,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A.$$

2.2.2　题型二、利用初等变换方法求极限

例 2.2.2　【1998 年北京市竞赛题】设 $x_n = 1 + \dfrac{1}{1+1} + \dfrac{1}{1+2} + \cdots + \dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ ________.

解　由于

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

因此，当 $n \geqslant 3$ 时，

$$x_n = 1 + \frac{1}{1+1} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{1+1} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 + \dfrac{1}{1+1} + 1 = \dfrac{5}{2}$.

例 2.2.3　【2010 年全国竞赛预赛题】设 $x_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　由于

$$x_n = \frac{1-a}{1-a}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}) = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a},$$

当 $|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{2^{n+1}} = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{1-a}$.

例 2.2.4　【2010 年北京市竞赛题】设数列 $\{x_n\}$ 定义如下：

$$x_1 = \sqrt{5},\quad x_{n+1} = x_n^2 - 2,\quad n \geqslant 1,$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}$.

分析　本题证明的关键在于找到合适的递推公式.

解　由于 $x_{n+1} = x_n^2 - 2$，所以

$$x_{n+1}^2 = (x_n^2 - 2)^2 = x_n^4 - 4x_n^2 + 4,$$

记 $y_n = x_n^2$，则有 $y_{n+1} = y_n^2 - 4y_n + 4$，即

$$y_{n+1} - 4 = y_n(y_n - 4).$$

由 $x_1 = \sqrt{5}$ 可知 $y_1 = 5$，$y_2 = 9$，根据数学归纳法容易证明当 $n \geqslant 2$ 时，$y_n > 5$. 从而当 $n \geqslant 2$ 时，$y_{n+1} - 4 > 5(y_n - 4)$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. 由前面分析知，对任意的正整数 i，有 $y_{i+1} - 4 = y_i(y_i - 4)$，因此

$$\prod_{i=1}^{n}(y_{i+1} - 4) = \prod_{i=1}^{n} y_i(y_i - 4),$$

整理得 $y_{n+1} - 4 = y_1 y_2 \cdots y_n (y_1 - 4)$. 所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{y_1 y_2 \cdots y_n}{y_{n+1}}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{y_1 y_2 \cdots y_n}{y_{n+1}}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}}} = 1.$$

2.2.3　题型三、利用四个极限存在准则求极限

例 2.2.5【2000 年北京市竞赛题】已知 $n\sin\dfrac{1}{n+1}<x_n<(n+2)\sin\dfrac{1}{n+1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$.

解　利用结论：若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=A$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}x_n,$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n+1}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+2)\sin\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}(n+2)\cdot\frac{1}{n+1}=1,$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=1$.

例 2.2.6　【2006 年首都经贸大学竞赛题】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$.

解　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$x^n\cdot\sqrt{x+3}\leqslant x^n\cdot\sqrt{1+3},$$

即

$$x^n\sqrt{3}\leqslant x^n\sqrt{x+3}\leqslant 2x^n,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3}x^n\,\mathrm{d}x=\sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2x^n\,\mathrm{d}x=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

由夹逼定理可知，原式=0.

例 2.2.7　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$.

解　由于

$$4=(4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 4^{\frac{1}{n}}\cdot 4,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}4\cdot 4^{\frac{1}{n}}=4$，由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4.$$

注　本例题的结论可以推广到一般情况，例如求极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_K^n)^{\frac{1}{n}},$$

其中 K 为某个正整数， $a_i>0$ ， $i=1,2,\cdots,K$ ，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_K^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_K\}.$$

例 2.2.8　求极限 $\lim_{n\to\infty}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}$，其中 $x>0$.

解　利用例 2.2.7 的结论．当 $0<x<1$ 时，原式 $=1$；当 $x=1$ 时，原式 $=1$；当 $x>1$ 时，原式 $=x$．因此

$$\text{原式}=\begin{cases}1 & 0<x\leqslant 1\\ x & x>1\end{cases}.$$

例 2.2.9　证明数列 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

证　由拉格朗日中值定理可知存在一点 $n<\xi<n+1$，使得

$$\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi},$$

从而有

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

而 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n<0$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调递减．又因为

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n>0,\end{aligned}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 有下界，由单调收敛准则可知，数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

注　由于数列 $\{a_n\}$ 收敛，不妨设 $\lim_{n\to\infty}a_n=C$．事实上，极限 C 是一个无理数，称之为欧拉常数，其值为 $0.57721\cdots$.

例 2.2.10　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0$，$2x_{n+1}=x_n+\frac{4}{x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限值.

证　因为 $2x_{n+1}=x_n+\frac{4}{x_n}\geqslant 2\sqrt{x_n\cdot\frac{4}{x_n}}=4$，所以 $x_{n+1}\geqslant 2$，即数列 $\{x_n\}$ 有下界．又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}x_n+\frac{2}{x_n}-x_n=\frac{2}{x_n}-\frac{1}{2}x_n=\frac{4-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0,$$

即有 $x_{n+1}\leqslant x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调收敛准则可知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

不妨设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A$，等式 $2x_{n+1}=x_n+\frac{4}{x_n}$ 两边同时取极限，有 $2A=A+\frac{4}{A}$，解得 $A=\pm 2$，由保号性可知 $A\geqslant 2$，所以 $A=2$.

注　单调有界准则是证明数列极限存在的一种常用方法．在具体证明过程中，只需证明数列单调递增有上界，或者单调递减有下界即可．然而该准则只是充分条件，不是必要条件．有些时候，如果数列不是单调的，只能通过一些其他方法进行证明，参见例 2.2.11．

例 2.2.11【1988 年北京市竞赛题】设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=2$，当 $n\geqslant 2$ 时，$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限值．

分析　由于

$$x_{n+1}-x_n=\left(2+\frac{1}{x_n}\right)-\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}},$$

因此数列 $\{x_n\}$ 不具有单调性，故单调有界准则失效．这里可以利用极限的定义来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性．然而极限的定义只能够验证一个数（例如 A）是不是数列的极限，因此需要我们先找到可能的极限值 A，然后再利用极限定义进行验证．

证　假设数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，等式 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ 两边同时取极限，有

$$A=2+\frac{1}{A},$$

解得 $A=1\pm\sqrt{2}$，根据极限的保号性，由于 $x_{n+1}>2$，所以 $A\geqslant 2$，故 $A=1+\sqrt{2}$．

下面利用数列极限的定义验证 $A=1+\sqrt{2}$ 为 $\{x_n\}$ 的极限值．对于 $\forall\varepsilon>0$，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$|x_n-A|=\left|2+\frac{1}{x_{n-1}}-\left(2+\frac{1}{A}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{A}\right|=\frac{|x_{n-1}-A|}{A\cdot x_{n-1}}<\frac{1}{4}|x_{n-1}-A|,$$

从而由上述递推公式可以得到，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$|x_n-A|<\frac{1}{4^{n-1}}|x_1-A|=\frac{1}{4^{n-1}}\left|2-(1+\sqrt{2})\right|<\frac{1}{4^{n-1}},$$

要使得 $|x_n-A|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{1}{4^{n-1}}<\varepsilon$ 即可，即有 $n>1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 4}$，取 $N=\left[1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 4}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1+\sqrt{2}$．

例 2.2.12　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在．

证　取两个子数列

$$\{x_n^{(1)}\}=\left\{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right\} \text{和} \{x_n^{(2)}\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\},$$

显然满足

$$x_n^{(1)}\neq 0, \lim_{n\to\infty}x_n^{(1)}=0;\quad x_n^{(2)}\neq 0, \lim_{n\to\infty}x_n^{(2)}=0,$$

但是

$$\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=1,$$

$$\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=\sin(n\pi)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=0,$$

由海涅定理可知，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

**例 2.2.13 【2011 年全国竞赛预赛题】 若存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+p}-u_n)=\lambda$（$\lambda$ 为有限数），试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

证 记 $A_n^{(i)}=u_{(n+1)p+i}-u_{np+i}$，$i=0,1,\cdots,p-1$，则对某个固定的 i，数列 $\{A_n^{(i)}\}$ 为 $\{u_{n+p}-u_n\}$ 的一个子数列，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_{n-1}^{(i)}}{n-1}=\lambda.$$

又因为

$$A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_{n-1}^{(i)}=u_{np+i}-u_{p+i},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}-u_{p+i}}{n-1}=\lambda$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{p+i}}{n-1}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}}{n-1}=\lambda$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}}{np+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{np+i}=\frac{\lambda}{p}.$$

对于任意的自然数 m 和固定的自然数 p，必存在自然数 n 和 i $(i=0,1,\cdots,p-1)$，使得 $m=np+i$，且 $m\to\infty\Leftrightarrow n\to\infty$，因此

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_m}{m}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{np+i}}{np+i}=\frac{\lambda}{p},$$

结论得证.

2.2.4 题型四、利用施笃兹定理求极限

例 2.2.14 设 p 为某个正整数，试证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$.

证 （1）设 $a_n=1^p+2^p+\cdots+n^p$，$b_n=n^{p+1}$，则 $\{b_n\}$ 单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，根据施笃兹定理，结合等价无穷小量替换有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}(p+1)}=\frac{1}{p+1}.$$

（2）设 $a_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}$，$b_n=(p+1)n^p$，则数列 $\{b_n\}$ 单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，根据施笃兹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p+[n^{p+1}-(n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p-n^p]},$$

由二项式定理可知，

$$(n+1)^{p+1}=n^{p+1}+(p+1)n^p+\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots,$$

$$(n+1)^p=n^p+pn^{p-1}+\cdots,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots}{(p+1)pn^{p-1}+\cdots}=\frac{1}{2}.$$

2.2.5　题型五、利用两个重要极限求极限

例 2.2.15　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 a,b,c 均为正数.

分析　本题属于 1^∞ 类型，常用的方法有两种，一是利用第二个重要极限进行求解，二是利用对数恒等式，将表达式 $f(x)$ 转化为 $\mathrm{e}^{\ln f(x)}$ 的形式，再使用洛必达法则或等价无穷小量替换等方法进行求解.

解　由题意

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}},$$

利用等价无穷小量替换，于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}&=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{c^x-1}{x}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{x\ln a}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x\ln b}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x\ln c}{x}\right)\\&=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}.$$

例 2.2.16　设 $p(x;n)$ 是自由度为 n 的 t 分布的概率密度函数，$\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数，即 $p(x;n)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}p(x;n)=\varphi(x)$.

解　注意到 $\Gamma(n)=(n-1)!$，根据斯特林公式（见 1.1.7 节）知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n)}{\sqrt{2\pi}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-(n-1)}}=1,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}\left(\dfrac{n+1}{2}-1\right)^{\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}+1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{2\pi}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n-1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}p(x;n)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}=\varphi(x)$.

2.2.6　题型六、利用等价无穷小量替换求极限

例 2.2.17　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{a}\right)^{\frac{n}{\ln n}}$，其中 $a>0$.

解　利用等价无穷小量替换，有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{n}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{n}-1}{a}\right)\right]=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n}-1}{a}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{a}\right)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{\frac{1}{n}\ln n}{a}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}.$$

注　本题属于 1^∞ 类型，利用对数恒等式，将表达式 $f(x)$ 转化为 $\mathrm{e}^{\ln f(x)}$ 的形式，多次使用等价无穷小量替换，综合性较强．这里用到了结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$.

例 2.2.18　【2013 年全国竞赛预赛试题】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$.

解　因为

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left[\pi(\sqrt{1+4n^2}-2n)\right]=\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n},$$

结合连续函数的性质及等价无穷小量替换，有

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\cdot\ln\left(1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\cdot\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]\\&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]\\&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]=e^{\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

例 2.2.19　【2005 年北京市竞赛题】 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2^x-1}\ln\left(1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right)=4$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}(2^x-1)=0$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right)=0$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=0$．利用等价无穷小量替换定理，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2^x-1}\ln\left(1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(2^x-1)(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{x\ln 2\cdot x^2}=4,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=2\ln 2.$$

2.2.7　题型七、利用中值定理求极限

例 2.2.20　若 $f(x)=x^2[\arctan(2x+1)-\arctan(2x)]$，试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

解　记 $g(x)=\arctan(2x)$，由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi\in\left(x,x+\frac{1}{2}\right)$，使得

$$g\left(x+\frac{1}{2}\right)-g(x)=\arctan(2x+1)-\arctan(2x)=\frac{2}{1+4\xi^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{1+4\xi^2},$$

而

$$\frac{x^2}{1+4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}<f(x)=\frac{x^2}{1+4\xi^2}<\frac{x^2}{1+4x^2},$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{4}$.

注　本题也可以利用函数 $\arctan x$ 的麦克劳林展开式进行求解，请读者自己完成.

例 2.2.21　设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+b} x\arcsin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

解　根据积分中值定理，则至少存在一点 ξ 介于 x 与 $x+b$ 之间，使得

$$\int_x^{x+b} x\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)f(x)\mathrm{d}x=b\xi\arcsin\left(\frac{1}{\xi+1}\right)f(\xi),$$

显然当 $x\to+\infty$ 时，$\xi\to+\infty$，因此

$$\text{原式}=\lim_{\xi\to+\infty} b\xi\arcsin\left(\frac{1}{\xi+1}\right)f(\xi)=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{b\xi}{\xi+1}f(\xi)=ab.$$

例 2.2.22　【2005 年北京市竞赛题】　设积分区域为 $D_r=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$，其中 $r\geqslant 0$，则 $\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

解　由二重积分的积分中值定理可知，至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D_r$，使得

$$\iint\limits_{D_r}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\pi r^2,$$

显然当 $r\to0^+$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，所以原式$=\pi$.

例 2.2.23　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

分析　首先我们先看一种错误的解法．错误解法：利用积分中值定理，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\xi=\frac{\pi}{2}\times0=0.$$

上述解法利用了积分中值定理，方法简洁明了，结论也是对的，但过程却是错误的．原因是题解过程中的 ξ 与 n 的取值有关，正确写法应该是 $\xi=\xi(n)$．虽然知道 $0<\sin\xi_n<1$，但是 ξ_n 的变化趋势尚不清楚，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\xi_n$ 存在与否，无法判断．假如该极限存在，其值多少都无法确定（尽管后面的方法能够证明其值为零），故上述方法存在问题．

解法 1　令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，　由于

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}\cos x\\&=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2x\mathrm{d}x\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)\mathrm{d}x\\&=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,\end{aligned}$$

所以

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

当 n 为偶数时，

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

当 n 为奇数时，

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!},$$

因为 $\{I_n\}$ 为单调递减非负数列，因此有 $I_n I_{n+1} \leqslant I_n^2 \leqslant I_n I_{n-1}$，从而

$$\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{n!!}{(n+1)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \leqslant I_n^2 \leqslant \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

整理得

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \leqslant I_n^2 \leqslant \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

注　根据解法 1 的解题过程容易得出，当 $n\to\infty$ 时，$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ 与 $n^{-\frac{1}{2}}$ 是同阶无穷大，同时还可以得到一些重要结论，例如

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{n}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

解法 2　对于任意小的 $\varepsilon > 0$，有

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x < \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) + \varepsilon,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) = 0$，所以对于上述 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，有

$$\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) < \varepsilon,$$

此时有

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x < 2\varepsilon,$$

从而结论得证.

注　解法 2 显然比解法 1 更为简洁. 注意到当 $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ 时，$\sin x \to 1$，因此解法 2 的核心思想是对 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ 进行拆分，将 $\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ 进行“无穷小化”. 由此还可以给出一个一般性的结论.

命题 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续、严格单调，且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x=0 .$$

利用上述命题的结论，可以求解一系列极限问题．例如

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\mathrm{e}}\ln^n x\,\mathrm{d}x=0;\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^3(\sqrt{x+1}-1)^n\,\mathrm{d}x=0;\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=0 .$$

2.2.8 题型八、利用定积分的定义求极限

例 2.2.24 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n^3}}+\sqrt{\dfrac{n+2}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n+n}{n^3}}\right)$.

解 结合定积分的定义，有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}\ =\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n},$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) .$$

例 2.2.25 【2008 年北京市竞赛题】 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{n}{n}}\right].$$

解 记

$$x_n=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{n}{n}},$$

则有

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+1}\leqslant x_n<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n},$$

根据定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln2-1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=2\ln2-1,$$

由夹逼定理可知，原式 $=2\ln2-1$.

注 关于 n 项相加的表达式求极限，常用的方法是通分、夹逼定理，以及使用定积分的定

义三种方法，通分方法一般使用于分母相同或大致相同的情况．本题综合运用了夹逼定理和定积分的定义两种方法，具有较高的综合性．

例 2.2.26　【2007 年北京市竞赛题】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+k^{-1}}$.

解　因为

$$\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+k^{-1}}<\frac{1}{n},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot e^{\frac{k}{n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+k^{-1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot e^{\frac{k}{n}},$$

根据定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 e^x dx=e-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=e-1,$$

因此由夹逼定理可知，原式 $=e-1$.

2.2.9　题型九、函数的连续性问题

例 2.2.27　【2002 年考研题】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值.

解　由于

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2,\quad f(0)=ae^0=a,$$

而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $a=-2$.

例 2.2.28　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\right]^{1/n}$ ，其中 $x\geqslant0$，讨论 $f(x)$ 的连续性.

解　当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right]^{1/n}=1^0=1,$$

当 $x=1$ 时， $f(x)=2^0=1$；当 $1<x<2$ 时，