

## 第 3 章 非参数方法

### 3.1 介绍

本章将讨论系统辨识中的一些非参数方法。这些方法所得的模型不是用有限维参数向量来参数化表达的，这些模型的特征将用曲线或函数等形式来表示。我们在例 2.1 和例 2.2 中已经讨论了两种非参数方法。下面我们将讨论以下几种方法。

瞬态分析：输入是阶跃或脉冲，输出的记录即为模型。

频率分析：输入是正弦信号，线性系统在稳态下的输出也应为正弦信号。幅值和相位的变化给出了在输入这一频域上的频域响应。

相关性分析：输入是白噪声。输入和输出之间归一化后的互协方差函数可以作为加权函数的估计。

谱分析：对于任意输入，频率响应都可以通过输入、输出的相关谱除以输入谱来估计。

### 3.2 瞬态分析

介绍瞬态分析的方法时，我们采用阶跃响应或脉冲响应作为系统的模型。在某些特定的实际应用中会用脉冲序列作为系统的输入。例如，流体系统（如生物医药应用），将系统中的注入作为输入，用感应器来跟踪系统中接下来的流体分布情况。

#### 阶跃响应

有时我们会用一个简单的低阶模型来表示阶跃响应。接下来的几个例子中，我们将用下面的传递函数形式的模型来描述几类一阶或二阶系统。

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3.1)$$

其中， $Y(s)$  是输出信号  $y(t)$  的拉普拉斯变换； $U(s)$  是输入  $u(t)$  的拉普拉斯变换； $G(s)$  是传递函数。

#### 例 3.1 一阶系统的阶跃响应

考虑一个传递函数为式 (3.2a) 的系统

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT} e^{-s\tau} \quad (3.2a)$$

该系统还可以用一个一阶差分方程来表示

$$T \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = Ku(t - \tau) \quad (3.2b)$$

注意，该模型还考虑到了时间延迟  $\tau$ 。图 3.1 画出了该系统的阶跃响应。

图 3.1 用画图的方法确定了该阶跃响应的各个参数  $K$ ,  $T$ ,  $\tau$ 。增益  $K$  是  $y(t)$  最后的值。画出最陡的切线，可以确定出  $T$  和  $\tau$ ，切线的斜率是  $K/T$ ，其中  $T$  是时间常值。切线与  $t$  轴相交的点为延迟， $t = \tau$ 。

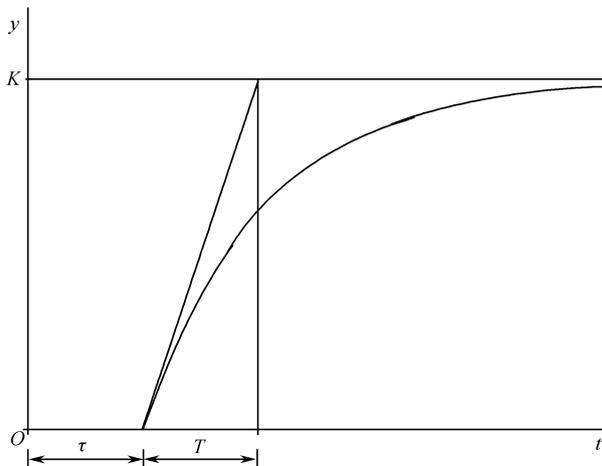


图 3.1 带有延迟的一阶系统的阶跃响应

### 例 3.2 阻尼振荡的阶跃响应

考虑传递函数为式 (3.3a) 的一个二阶系统

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.3a)$$

在时域分析中，该系统可以表示为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = K\omega_0^2 u \quad (3.3b)$$

物理上，该系统表示的是一个阻尼振荡。经过计算，阶跃响应为

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \tau) \right] \quad (3.3c)$$

$$\tau = \arccos \zeta$$

图 3.2 画出了该系统的阶跃响应。

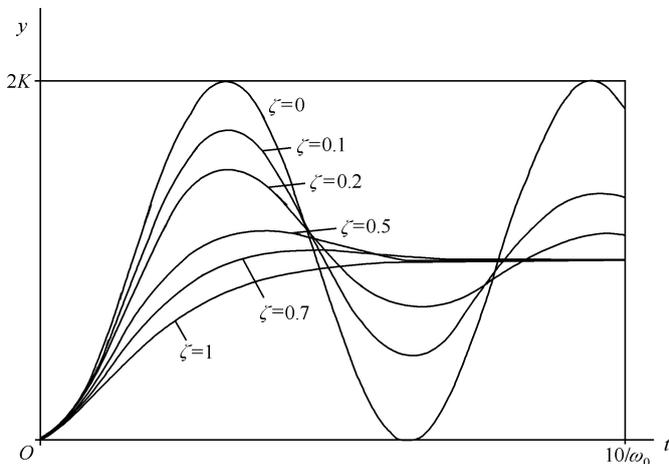


图 3.2 阻尼振荡的单位阶跃响应

观察图 3.2 可以看到，相关的阻尼系数  $\zeta$  是如何影响阶跃响应的。其余两个参数  $K$  和  $\omega_0$  只是标量因子。增益  $K$  衡量的是振幅轴，而  $\omega_0$  衡量的是时间轴。比较图 3.2 中所测阶跃响应和所

记录数据最接近的曲线，就能确定模型 (3.3a) 的 3 个参数  $K, \zeta$  和  $\omega_0$ 。除了这种方法外，还可以选择其他方法，其中之一是考察阶跃响应的局部极值（最大值和最小值）。由式 (3.3c)，经过计算可知，局部极值处于时刻

$$t_k = k \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{(1 - \zeta^2)}} \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3d)$$

在这些时刻，输出响应为

$$y(t_k) = K[1 - (-1)^k M^k] \quad (3.3e)$$

其中，超调量  $M$  为

$$M = \exp[-\zeta\pi/\sqrt{(1 - \zeta^2)}] \quad (3.3f)$$

超调量  $M$  和相对阻尼的关系在图 3.3 中有所说明。

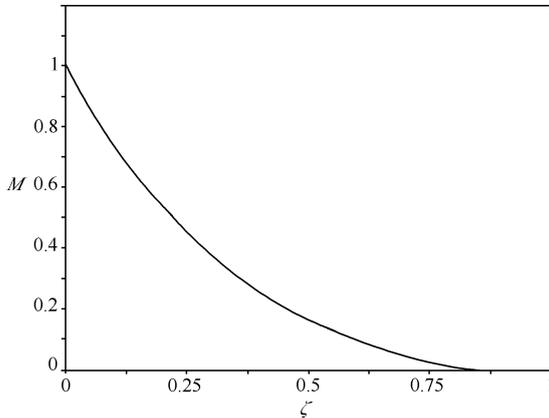


图 3.3 阻尼振荡的超调量  $M$  和相对阻尼  $\zeta$

参数  $K, \zeta$  和  $\omega_0$  可以如图 3.4 来确定。图像收敛时，曲线最后的收敛值可以作为增益  $K$  的估计。超调量  $M$  的估计有多种方法，其中之一是采用第一个局部最大值。一个可行的方法是用多个局部极值。由式 (3.3e) 可知，每半个振荡周期，振幅会因超调量  $M$  而减小。超调量  $M$  确定以后， $\zeta$  可以由式 (3.3f) 得到

$$\zeta = \frac{-\log M}{[\pi^2 + (\log M)^2]^{1/2}} \quad (3.3g)$$

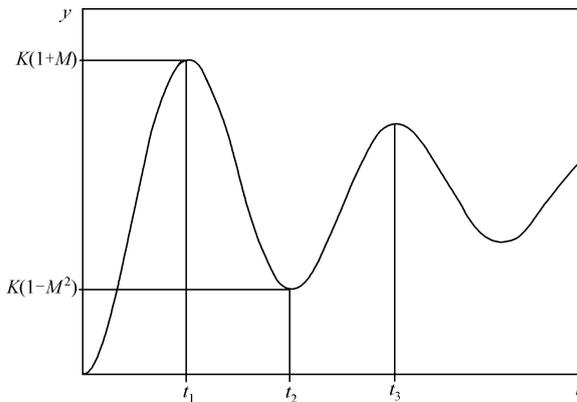


图 3.4 确定阻尼振荡的阶跃响应参数

这样振荡周期  $T$  也可以确定, 由式 (3.3d) 得

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{(1 - \zeta^2)}} \quad (3.3h)$$

从而  $\omega_0$  也可以计算得到

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T \sqrt{(1 - \zeta^2)}} = \frac{2}{T} [\pi^2 + (\log M)^2]^{1/2} \quad (3.3i)$$

## 脉冲响应

理论上来说, 脉冲响应需要用狄利克雷函数  $\delta(t)$  作为输入, 这样可以使得输出和系统的权函数  $h(t)$  相等。但是, 在实践活动中我们无法进行这样理想化的处理, 只能运用近似的脉冲响应。例如, 令

$$u(t) = \begin{cases} 1/\alpha & 0 \leq t < \alpha \\ 0 & \alpha \leq t \end{cases} \quad (3.4)$$

这样定义的输入满足  $\int_0^\infty u(t) dt = 1$  的条件, 当  $\alpha$  越小, 越接近理想化的脉冲输入。

像式 (3.4) 这样的近似脉冲输入, 会使得输出与理想情形下的输出有偏差。经过计算可得

$$y(t) = \int_0^\infty h(s) u(t-s) ds = \frac{1}{\alpha} \int_{\max(0, t-\alpha)}^t h(s) ds \approx h(t) \quad (3.5)$$

如果式 (3.4) 中脉冲持续时间  $\alpha$  和时间常数相比很短时, 那么这一偏差可以被忽略。我们通过下面的例子来说明这个问题。

### 例 3.3 非理想情形下的脉冲响应

考察传递函数为式 (3.6) 的阻尼振子

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1} \quad (3.6)$$

图 3.5 表示了不同  $\alpha$  值下的权函数和近似脉冲响应 (见式 (3.4))。从图中可以看到, 当  $\alpha$  相较于振荡周期很小时, 近似脉冲响应和权值间的偏差非常小。

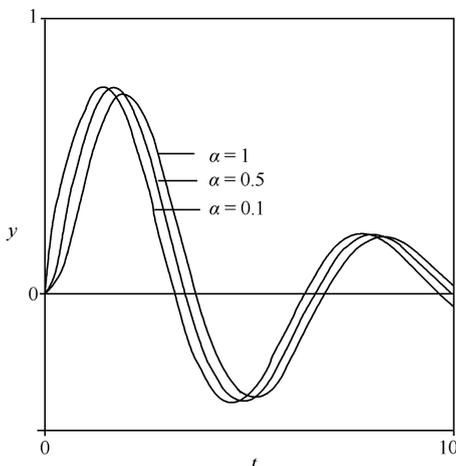


图 3.5 阻尼振子 (见式 (3.6)) 的权函数以及在近似脉冲 (见式 (3.4)) 下的脉冲响应

习题 3.11 和补充内容 C7.5 中讨论了如何用脉冲响应来拟合一个参数模型。

总的来说，瞬态分析的应用非常简单。它可以用来给出一个初步的模型，估计出相对阻尼、时间常数以及时间延迟等。瞬态估计能够给出一个粗略的模型，只是它对噪声十分敏感。

### 3.3 频率分析

在频率分析中，我们使用连续时间模型  $Y(s) = G(s)U(s)$ ，具体见式 (3.1)。

#### 基本频率分析

如果输入的是一个正弦函数

$$u(t) = a \sin(\omega t) \quad (3.7)$$

且系统渐进稳定，则在稳态下输出为：

$$y(t) = b \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.8)$$

其中：

$$b = a |G(i\omega)| \quad (3.9a)$$

$$\varphi = \arg[G(i\omega)] \quad (3.9b)$$

证明如下。为方便起见，假设系统初始状态为休息状态。（由稳定的假设，初始状态只会有瞬态效应）那么系统可以用一个权函数  $h(\tau)$  表示如下：

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (3.10)$$

其中函数  $h(\tau)$  的拉普拉斯变换为  $G(s)$ 。

令

$$G_i(s) = \int_0^t h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (3.11)$$

由

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

以及式 (3.7)、式 (3.10)、式 (3.11) 得

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a}{2i} \int_0^t h(\tau) [e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}] d\tau \\ &= \frac{a}{2i} [e^{i\omega t} G_i(i\omega) - e^{-i\omega t} G_i(-i\omega)] \\ &= \frac{a}{2i} |G_i(i\omega)| [e^{i\omega t} e^{i\arg G_i(i\omega)} - e^{-i\omega t} e^{-i\arg G_i(i\omega)}] \\ &= a |G_i(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_i(i\omega)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

当  $t$  趋向于无穷时， $G_i(i\omega)$  趋近于  $G(i\omega)$ 。因此，式 (3.8) 和式 (3.9) 得证。

注意，相位  $\varphi$  是负的。通过振幅  $a$  和  $b$  以及相位差  $\varphi$  的估计，由式 (3.9) 我们可以得到复变量  $G(i\omega)$ 。如果能够多次重复上述步骤，我们可以绘制出一个  $\omega$  关于函数  $G(i\omega)$  的图像，如 Bode 图（Nyquist 图或其他等价形式）可以用来设计控制系统。

上述分析对于扰动相当敏感。在实际应用中较少使用这样的简单形式。这并不难理解，假设真实系统可以表示为

$$Y(s) = G(s)U(s) + E(s) \quad (3.13)$$

其中,  $E(s)$  是扰动  $e(t)$  的拉普拉斯变换。那么我们有

$$y(t) = b \sin(\omega t + \varphi) + e(t) \quad (3.14)$$

由于噪声的存在, 比较难以给出振幅  $b$  和相位差  $\varphi$  的准确估计。

### 改进的频率分析

我们可以用很多方法改进前述的基本频率分析, 其中之一是利用相关性。用  $y(t)$  分别乘  $\sin \omega t$  和  $\cos \omega t$ , 并在  $[0, T]$  区间上做积分得到频率分析的结果。图 3.6 描述了这个过程。

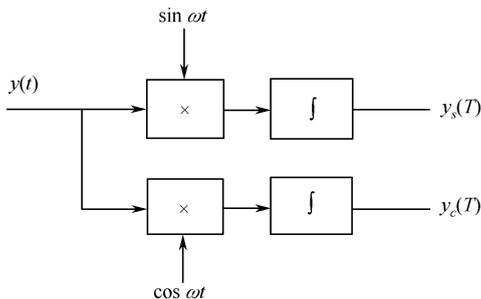


图 3.6 改进的频率分析

这样式 (3.14) 变为

$$\begin{aligned} y_s(T) &= \int_0^T y(t) \sin \omega t dt \\ &= \int_0^T b \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt + \int_0^T e(t) \sin \omega t dt \\ &= \frac{bT}{2} \cos \varphi - \frac{b}{2} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt + \int_0^T e(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} y_c(T) &= \int_0^T y(t) \cos \omega t dt \\ &= \int_0^T b \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t dt + \int_0^T e(t) \cos \omega t dt \\ &= \frac{bT}{2} \sin \varphi - \frac{b}{2} \int_0^T \sin(2\omega t + \varphi) dt + \int_0^T e(t) \cos \omega t dt \end{aligned} \quad (3.15b)$$

如果不含噪声 ( $e(t) = 0$ ), 且积分时间  $T$  是正弦曲线周期的倍数, 不妨设为  $T = k2\pi/\omega$ , 则有

$$\begin{aligned} y_s(T) &= \frac{bT}{2} \cos \varphi \\ y_c(T) &= \frac{bT}{2} \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.16)$$

利用式 (3.16) 可以确定出  $b$  和  $\varphi$ , 则由式 (3.9a) 可以得到  $G(i\omega)$ 。另外, 由式 (3.9) 和式 (3.16) 还可以得到

$$\begin{aligned} y_s(T) &= \frac{aT}{2} R_e G(i\omega) \\ y_c(T) &= \frac{aT}{2} I_m G(i\omega) \end{aligned} \quad (3.17)$$

因此也可以用它们来表示  $G(i\omega)$ 。

## 对噪声的敏感性

直观来说, 式 (3.15) ~ 式 (3.17) 的方法相较于基本频率分析方法而言, 对噪声有很好的抑制作用。究其原因是在式 (3.15) 中, 噪声的效应被平均化了。

关于噪声敏感性的分析还能够像下面这样简化处理。假设  $e(t)$  是一列协方差函数为  $r_e(\tau)$  的稳定序列, 则输出方差为  $r_e(0)$ 。通过观测信号来估计振幅  $b$  比较困难, 须要  $b^2$  比  $r_e(0)$  大许多。方差  $y_s(T)$  的计算可如下式 ( $y_e(T)$  可类似计算)

$$\begin{aligned} \text{var}[y_s(T)] &= E\left[\int_0^T e(t) \sin \omega t dt\right]^2 \\ &= E\int_0^T \int_0^T e(t_1) \sin \omega t_1 e(t_2) \sin \omega t_2 dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^T \int_0^T r_e(t_1 - t_2) \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

假设噪声的协方差  $r_e(\tau)$  有一个指数函数作为边界 (对于稳定的干扰而言, 这个假设并不强)

$$|r_e(\tau)| \leq r_0 \exp(-\alpha |\tau|) \quad (\alpha > 0) \quad (3.19)$$

那么, 方差  $\text{var}[y_s(T)]$  有上界

$$\begin{aligned} \text{var}[y_s(T)] &\leq \int_0^T \int_0^T |r_e(t_1 - t_2)| dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^T \left[ \int_{-t_2}^{T-t_2} |r_e(\tau)| d\tau \right] dt_2 \\ &\leq \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |r_e(\tau)| d\tau \right] dt_2 \\ &\leq 2T \int_0^{\infty} r_0 \exp(-\alpha |\tau|) d\tau = \frac{2Tr_0}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.20)$$

对于改进的频率分析来说, 其绝对精度满足

$$\frac{\text{var}[y_s(T)]}{\{E[y_s(T)]\}^2} \leq \frac{8}{\alpha \cos^2 \varphi} \frac{r_0}{b^2 T} \quad (3.21)$$

观察式 (3.21), 当  $T$  趋向于无穷时, 绝对精度的降低速率至少能达到  $1/T$ 。对于没有相关性分析的基本频率分析而言, 其绝对精度

$$\frac{\text{var}[y(t)]}{\{E[y(t)]\}^2} = \frac{r_e(0)}{b^2 \sin^2(\omega t + \varphi)} \quad (3.22)$$

与式 (3.21) 相比显然更大。

频率分析 (式 (3.15) — 式 (3.17)) 在商用设备中也有所运用。频率分析的不足之处在于实验时间较长 (在作积分前, 需要对频率分析的系统重置到固定相。对于较小的  $\omega$ , 需要设置较大的积分时间区间  $T$ )。

## 3.4 相关性分析

在相关性分析中, 我们要用到模型

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(t-k) + v(t) \quad (3.23)$$

或其连续时间状态下的形式。式 (3.23) 中的  $\{h(k)\}$  是一列权值序列, 而  $v(t)$  是干扰项。假设输入是一列稳定随机过程, 且与噪声相互独立。不难计算, 下列协方差函数的关系式 (也称

Wiener - Hopf 算式)

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)r_u(\tau - k) \quad (3.24)$$

其中,  $r_{yu}(\tau) = Ey(t + \tau)u(t)$ ,  $r_u(\tau) = Eu(t + \tau)u(t)$  (具体可参阅附录 A3.1 中的式 (A3.1.11))。式 (3.24) 中的协方差函数可以用数据来估计

$$\begin{aligned} \hat{r}_{yu}(\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\max(\tau,0)} y(t + \tau)u(t) \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \hat{r}_u(\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} u(t + \tau)u(t) \quad \hat{r}_u(-\tau) = \hat{r}_u(\tau) \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

那么权函数  $\{h(k)\}$  的估计  $\{\hat{h}(k)\}$  可以通过解下面的方程得到

$$\hat{r}_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{h}(k) \hat{r}_u(\tau - k) \quad (3.26)$$

这是一个无限维线性系统。若采用白噪声, 问题将会简化。通过先验信息我们知道  $r_u(\tau) = 0 (\tau \neq 0)$ 。因此, 由式 (3.24) 可得

$$h(k) = r_{yu}(k)/r_u(0) \quad (3.27)$$

显然, 利用数据计算式 (3.25) 可以估计式 (3.27)。在附录 A3.2 中我们将对估计精度进行分析。

另一种简化式 (3.26) 的方法是利用截断加权函数。这种方法会得到一个有限阶的线性系统。假设

$$h(k) = 0 \quad k \geq M \quad (3.28)$$

在信号处理中, 这样的模型我们称为有限脉冲响应 (Finite Impulse Response, FIR)。选取整数  $M$  时, 注意  $M$  要比主导时间常数大。运用近似式 (3.28), 式 (3.26) 变为

$$\hat{r}_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{h}(k) \hat{r}_u(\tau - k) \quad (3.29)$$

将  $\tau = 0, 1, \dots, M-1$  分别代入式 (3.29) 组成一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_{yu}(0) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yu}(M-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}_u(0) & \cdots & \hat{r}_u(M-1) \\ \hat{r}_u(1) & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_u(M-1) & \cdots & \hat{r}_u(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}(0) \\ \vdots \\ \hat{h}(M-1) \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

通过代入不同的  $\tau$  值 ( $\tau \neq 0$ ), 等式 (3.29) 还可以组成一个方程数目比  $M$  还多的溢出线性方程组。在第 4 章中我们将进一步讨论如何估计  $\{h(k)\}$ , 如何保证式 (3.30) 有唯一解的条件将在 5.4 节中具体展开讨论。

### 3.5 谱分析

本节我们将讨论最后一个非参数方法: 谱分析。我们也将运用和前述方法相同的模型 (3.23), 以及关系式 (3.24)。对式 (3.24) 作离散傅里叶变换 (参见附录 A3.1 节), 可以得到下面的关系式

$$\phi_{yu}(\omega) = H(e^{-i\omega})\phi_u(\omega) \quad (3.31)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{yu}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_{yu}(\tau) e^{-i\tau\omega} \\ \phi_u(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_u(\tau) e^{-i\tau\omega} \end{aligned}$$

$$H(e^{-i\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-ik\omega} \quad (3.32)$$

具体演算可见附录式 (A3.1.12)。注意  $\phi_{yu}(\omega)$  是一个复数值。

运用式 (3.31)，传递函数  $H(e^{-i\omega})$  可以这样估计

$$\hat{H}(e^{-i\omega}) = \hat{\phi}_{yu}(\omega) / \hat{\phi}_u(\omega) \quad (3.33)$$

因此，我们需要先寻求估计谱密度  $\hat{\phi}_{yu}(\omega)$  和  $\hat{\phi}_u(\omega)$  的方法。一个直接的办法是运用

$$\hat{\phi}_{yu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-N}^N \hat{r}_{yu}(\tau) e^{-i\tau\omega} \quad (3.34)$$

参见式 (3.25) 和式 (3.32)，类似地也可估计  $\hat{\phi}_u(\omega)$ 。式 (3.34) 可以如下式计算：

$$\hat{\phi}_{yu}(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{\tau=-N}^N \sum_{t=1-\min(\tau,0)}^{N-\max(\tau,0)} y(t+\tau)u(t) e^{-i\tau\omega}$$

运用式 (3.25) 计算时，用  $s$  替换式中的  $s = t + \tau$ ，图 3.7 说明了替换后新的求和指标是如何确定的。

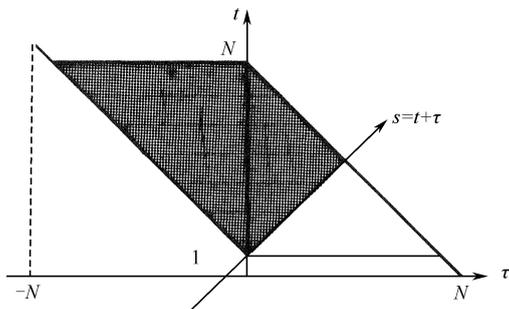


图 3.7 求和变量的变化 (阴影部分为求和部分)

由  $e^{-i\tau\omega} = e^{-is\omega} e^{-it\omega}$ ，我们有

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{yu}(\omega) &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N y(s)u(t) e^{-is\omega} e^{-it\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi N} Y_N(\omega) U_N(-\omega) \end{aligned} \quad (3.35)$$

其中

$$\begin{aligned} Y_N(\omega) &= \sum_{s=1}^N y(s) e^{-is\omega} \\ U_N(\omega) &= \sum_{s=1}^N u(s) e^{-is\omega} \end{aligned} \quad (3.36)$$

是序列  $\{y(t)\}$  和  $\{u(t)\}$  的离散傅里叶变换，分别为 0。对于  $\omega = 0, 2\pi/N, 2\pi/N, \dots, \pi$  的情形，可以用快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 的算法进行有效计算。

类似地，

$$\hat{\phi}_u(\omega) = \frac{1}{2\pi N} U_N(\omega) U_N(-\omega) = \frac{1}{2\pi N} |U_N(\omega)|^2 \quad (3.37)$$

这种估计谱密度的方法称为周期图法。由式 (3.33)、式 (3.35) 和式 (3.37)，传递函数的估计可以利用

$$\hat{H}(e^{-i\omega}) = Y_N(\omega) / U_N(\omega) \quad (3.38)$$

这个式子有时被称为经验传递函数估计。具体讨论可参见 Ljung (1985b)。

前述的估计谱密度及传递函数的方法给出的结果有时并不尽如人意。例如，当  $u(t)$  是一列随机过程时，即使数据量  $N$  趋于无穷，估计式 (3.35) 和式 (3.37) 也不收敛到（在均方意义下）真实的谱。需要特别注意的是，估计  $\phi_u(\omega)$  平均而言与  $\hat{\phi}_u(\omega)$  相差不大，但是当  $N$  趋于无穷时，其方差并不收敛到零。具体讨论可参见 Brillinger (1981)。这主要是因为，一方面，对于较大的  $\tau$  值，估计  $\hat{r}_{yu}(\tau)$  不太精确（此时式 (3.25) 中只包含较少的几项），而协方差  $\hat{r}_{yu}(\tau)$  值中每一项的权重都相同。另一方面，在式 (3.34) 中有  $2N+1$  项作加和。当  $N \rightarrow \infty$  时，即使每一项的估计都趋于 0 也不能保证估计误差合起来也趋于 0。我们可以通过对  $\tau$  值较大的项赋以权值来解决这些问题（也可以用来估计  $\hat{r}_{yu}(\tau)$  和  $\hat{\phi}_u(\omega)$ ）。因此，基于这样的考虑，为提高估计精度，我们采用下面的相关谱的方法

$$\hat{\phi}_{yu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-N}^N \hat{r}_{yu}(\tau) w(\tau) e^{-i\tau\omega} \quad (3.39)$$

其中， $w(\omega)$  称为滞后窗，当  $\tau = 0$  时  $w(\tau) = 1$ 。随着  $\tau$  的增大  $w(\tau)$  会减小；当  $\tau$  值较大时，即  $w(\tau)$  为 0（这里较大的  $\tau$  值指一定比例的数据量，一般取 5% 或 10%）。其他滞后窗的选取方法可以参考相关文献，参见 Brillinger (1981)。

这里我们试举一些滞后窗的例子。

### 例 3.4 滞后窗的选取

下面是文献中一般情况下选取的滞后窗

$$w_1(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases} \quad (3.40a)$$

$$w_2(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/M & |\tau| \leq M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases} \quad (3.40b)$$

$$w_3(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi\tau}{M} \right) & |\tau| \leq M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases} \quad (3.40c)$$

其中， $w_1(\tau)$  称为矩形型滞后窗； $w_2(\tau)$  是 Bartlett 型滞后窗； $w_3(\tau)$  称为 Hamming 型或 Tukey 型滞后窗。它们的具体图像见图 3.8。

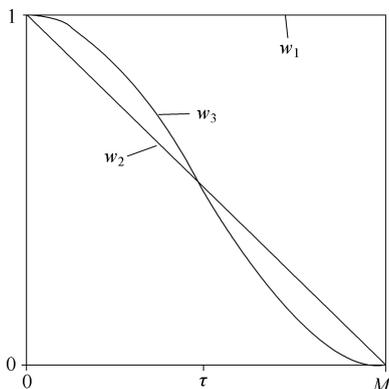


图 3.8 式 (3.40) 中的 3 种滞后窗  $w_1(\tau)$ 、 $w_2(\tau)$  和  $w_3(\tau)$

我们注意到，3 种滞后窗中当  $|\tau| > M$  时都为零。如果选取的参数  $M$  充分大，周期图会很平滑。另一方面，如果选取的  $M$  太小会导致谱中很多有用的信息被筛选掉。因此  $M$  的选取非常

重要。概括地说，选取  $M$  时需要考虑到以下两点：

- ①  $M$  须比  $N$  小很多（为了减小周期图中不稳定的随机波动）；
- ② 对于  $\tau \geq M$  的值，令  $|\hat{r}_u(\tau)| \ll \hat{r}_u(0)$ （这样可以使得我们感兴趣的谱不至于被筛选掉）。

滞后窗一方面，可以使得估计达到一个合理的精度。另一方面，谱图中的顶点可能会被抹掉，从而可能会将临近的顶点分开。因此，运用滞后窗会对频率分辨率有一定的影响，我们用下面的例子来说明。

### 例 3.5 滞后窗对频率分辨率的影响

为讨论方便，不妨假设输入为一个正弦信号  $u(t) = \sqrt{2} \sin \omega_0 t$ 。滞后窗选择矩阵型滞后窗式 (3.40a)（注意，实际上当输入为正弦信号时没有必要引入滞后窗。因为正弦信号的傅里叶变换  $U_N(\omega)$  有这样的性质：在输入这一频率上较大，而在其他频率上很小。我们考虑这一情况是因为它能简单地说明频率分辨率的问题）。为了强调滞后窗的作用，假设已知协方差函数的真值，如例 5.7 中

$$r_u(\tau) = \cos \omega_0 \tau \quad (3.41a)$$

因此

$$\hat{\phi}_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M \cos \omega_0 \tau e^{-i\tau\omega} \quad (3.41b)$$

真实的谱（参见例 5.7）为

$$\phi_u(\omega) = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (3.41c)$$

因此谱在  $\omega = \pm \omega_0$  时有两个尖峰。将式 (3.41b) 展开计算得

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_u(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\tau=-M}^M [e^{i(\omega_0-\omega)\tau} + e^{-i(\omega_0+\omega)\tau}] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( e^{-i(\omega_0-\omega)M} \frac{1 - e^{-i(\omega_0-\omega)(2M+1)}}{1 - e^{-i(\omega_0-\omega)}} + e^{i(\omega_0+\omega)M} \frac{1 - e^{-i(\omega_0+\omega)(2M+1)}}{1 - e^{-i(\omega_0+\omega)}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{-i(\omega_0-\omega)(M+1/2)} - e^{i(\omega_0-\omega)(M+1/2)}}{e^{-i(\omega_0-\omega)/2} - e^{i(\omega_0-\omega)/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{i(\omega_0+\omega)(M+1/2)} - e^{-i(\omega_0+\omega)(M+1/2)}}{e^{i(\omega_0+\omega)/2} - e^{-i(\omega_0+\omega)/2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\sin(M + \frac{1}{2})(\omega_0 - \omega)}{\sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)} + \frac{\sin(M + \frac{1}{2})(\omega_0 + \omega)}{\sin \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)} \right) \end{aligned} \quad (3.41d)$$

图 3.9 说明了不同的  $M$  值对窗谱（参见式 (3.41d)）的影响。可以看到，随着  $M$  值的减小，峰值扩散，峰值之间宽度增加。

当  $M$  较大时

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_u(\omega_0) &\approx \frac{1}{4\pi} \frac{M + 1/2}{1/2} \approx \frac{M}{2\pi} \\ \hat{\phi}_u\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2M}\right) &\approx \frac{1}{4\pi} \frac{\sin(\pi/2)}{\sin(\pi/4M)} \approx \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\pi/4M} = \frac{M}{\pi^2} \end{aligned}$$

因此，峰值间的宽度可以近似为

$$\Delta\omega = 2 \frac{\pi}{2M} = \frac{\pi}{M} \quad (3.41e)$$

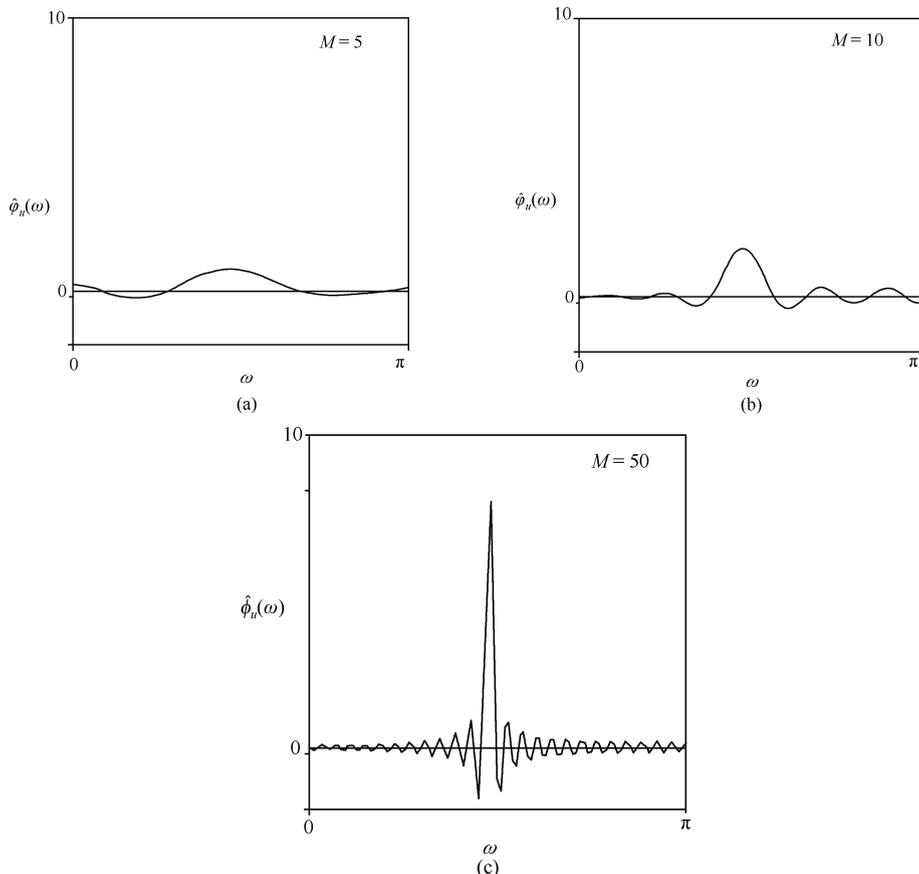


图 3.9 矩阵型滞后窗的宽度对窗谱（式（3.41d））的影响

许多信号可以看成一些（有限或无限个）正弦信号的叠加。根据上面的计算，信号在  $\omega = \omega_0$  点的真实频率信息反映在  $\hat{\phi}_u(\omega)$  的区间  $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$  上。因此，真实谱峰值间的宽度不小于  $\pi/M$ ，在估计谱中较难辨别。

谱分析是一种较常用的非参数方法。它对于输入没有具体限制，只要求与干扰项不相关。因此谱分析是一种较受欢迎的方法，从语言分析到机械振动研究，再到地球物理勘探研究都有应用，更不用提我们前文讨论的在控制系统的设计和分析中的应用了。

## 小结

- 瞬态分析易于应用。它一般是给出一个阶跃响应或脉冲响应（权值函数）模型，但对噪声较为敏感，仅仅能给出一个粗略模型。
- 频率分析是以正弦信号作为输入的方法。该方法的实验过程较长，尤其是为了减小结果对噪声的敏感性而分析相关性时。它得到的模型是一个频率响应，可以用 Bode 图或者等价形式的传递函数表示。
- 相关性分析是以白噪声作为输入的方法。该方法得到的模型用一系列权值函数表示，它对输出端的叠加噪声相当敏感。
- 谱分析是可以适用于任意输入的方法。该方法可以通过 Bode 图（或其他等价形式）得到传递函数。要使估计结果相对精确，须用滞后窗，这使得它成为一种受限制的频率分析方法。

正如第 2 章所提到的, 非参数方法易于应用, 但得到的模型差强人意。如果要得到精度较高的模型还是要借助参数方法。因此在这种情况下, 我们可以先借助非参数方法得到一个粗略模型, 为参数方法的运用寻找一些有用的信息。

## 习题

### 习题 3.1 阶跃响应中的时间常数 $T$

证明图 3.1 中确定  $T$  的规律。

### 习题 3.2 二阶阻尼振荡的阶跃响应分析

证明关系式 (3.3d) 至式 (3.3f)。

### 习题 3.3 幅值和相位

在频率分析中, 确定幅值和相位变化的方法之一是画出  $y(t)$  关于  $u(t)$  的 Bode 图。若  $u(t) = a \sin \omega t$ , 则  $y(t) = K a \sin(\omega t + \varphi)$ 。证明输入、输出关系可以用图 3.10 描述。

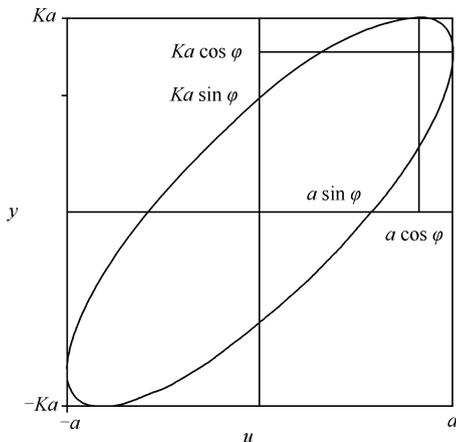


图 3.10 习题 3.3 输入、输出的关系

### 习题 3.4 一个简单随机过程的协方差函数

令  $e(t)$  是一列 0 均值、方差为  $\lambda^2$  的白噪声。考察白噪声的滤波形式

$$y(t) = \frac{1}{1 + aq^{-1}} e(t) \quad |a| < 1$$

其中,  $q^{-1}$  为单位延迟算子。计算  $y(t)$  的协方差函数  $r_y(k) = E y(t) y(t - k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

### 习题 3.5 谱密度函数的一些性质

$\phi_u(\omega)$  是稳定序列  $u(t)$  (参见式 (3.32)) 的谱密度函数:

$$\phi_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_u(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

假设

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \tau |r_u(\tau)| < \infty$$

以此保证  $\phi_u(\omega)$  的存在性。证明  $\phi_u(\omega)$  的下列性质：

(a)  $\phi_u(\omega)$  是一个实值函数，且  $\phi_u(-\omega) = \phi_u(\omega)$  成立。

(b) 对于所有的  $\omega$  值， $\phi_u(\omega) \geq 0$ 。

提示：令  $\varphi(t) = (u(t-1) \dots u(t-n))^T$ ， $x = (1 \ e^{i\omega} \dots e^{i(n-1)\omega})^T$ ，只需证明

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{n} E |\varphi^T(t)x|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\tau=-n}^n (n - |\tau|) r_u(\tau) e^{i\omega\tau} \end{aligned}$$

及  $n$  趋于无穷时的值。

### 习题 3.6 Parseval 公式

令

$$H(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k q^{-k} (m|n)$$

$$G(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k q^{-k} (p|n)$$

是两个稳定的矩阵形式的传递函数。令  $e(t)$  是一列 0 均值、协方差矩阵为  $\Lambda(n|n)$  的白噪声。证明：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\omega}) \Lambda G^T(e^{-i\omega}) d\omega &= \sum_{k=0}^{\infty} H_k \Lambda G_k^T \\ &= E[H(q^{-1})e(t)][G(q^{-1})e(t)]^T \end{aligned}$$

上式中的第一个等式为 Parseval 公式，第二个等式是对第一个公式中各项和的总体说明。

### 习题 3.7 截断加权函数的相关性分析

考察相关性分析式 (3.30)，假设协方差函数的估计  $\hat{r}_{yu}(\cdot)$  和  $\hat{r}_u(\cdot)$  无误差。

(a) 令输入为 0 均值白噪声。忽略  $M$  值的大小，证明加权函数的估计

$$\hat{h}(k) = h(k) \quad k = 0, \dots, M-1$$

(b) 对于任意的输入  $u(t)$ ，(a) 中的结论不一定成立。考虑下列输入

$$u(t) - \alpha u(t-1) = v(t) \quad |\alpha| < 1$$

其中， $v(t)$  是一列 0 均值、方差为  $\sigma^2$  的白噪声，以及一阶系统

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) \quad |a| < 1$$

证明：

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(k) &= b(-a)^{k-1} \quad k \geq 1 \\ \hat{h}(k) &= h(k) \quad k = 0, \dots, M-2 \\ \hat{h}(M-1) &= \frac{h(M-1)}{(1+a\alpha)} \end{aligned}$$

提示：

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{M-1} \\ \alpha & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha^{M-1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-\alpha^2} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha^2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & 1+\alpha^2 & -\alpha \\ & & & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

(可以通过验证上式，如可由式 (C7.7.18) 来演算。)

**习题 3.8 相关性分析的精度**

考察无噪声的一阶系统

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) \quad |a| < 1$$

假设在输入  $u(t)$  为 0 均值白噪声的情形下进行相关性分析。利用附录 A3.2 中的结果, 求估计  $\hat{h}(k), k = 1, 2, \dots$  的方差。

**习题 3.9 谱分析的一个特例: 改进的频率分析**

若输入为下列正弦函数形式, 即

$$u(t) = a \sin \tilde{\omega} t \quad \tilde{\omega} = \frac{2\pi}{N} n, n \in [0, N-1]$$

其中,  $N$  是数据总量。

证明: 谱分析式 (3.33) ~ 式 (3.36) 是改进的频域分析式 (3.15) ~ 式 (3.17) 相应离散时间下的形式, 并且

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{H}(e^{i\tilde{\omega}}) &= \frac{2}{a} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) \sin \tilde{\omega} t \\ \operatorname{Im} \hat{H}(e^{i\tilde{\omega}}) &= \frac{2}{a} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) \cos \tilde{\omega} t \end{aligned}$$

**习题 3.10 谱分析的一个特例: 阶跃响应分析**

记  $\{y(t)\}_{t=0}^N$  为一个线性系统离散时间下的输出, 其传递函数为  $H(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k}$ ; 输入  $u(t)$  为阶跃信号, 其振幅为  $a$ 。假设  $y(t) = 0 (t < 0)$ ,  $y(t) \approx \text{常数} (t > N)$ 。验证传递函数的估计为

$$\hat{H}(q^{-1}) = \sum_{k=0}^N \hat{h}(k)q^{-k}; \quad \hat{h}(k) = \frac{y(k) - y(k-1)}{a} \quad k = 0, \dots, N$$

并证明它和谱分析的估计结果近似相等。

**习题 3.11 确定脉冲响应的参数模型**

假设我们已知 (或已估计) 脉冲响应  $\{h(k)\}_{k=1}^{\infty}$ 。考察  $n$  阶参数模型

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) \quad (\text{i})$$

其中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n}$$

我们可以用  $\{h(k)\}$  来确定  $\{a_i, b_j\}$ , 须要求模型 (i) 对应的加权函数和  $h(k)$  一致,  $k = 1, \dots, 2n$ 。

(a) 令  $H(q^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)q^{-k}$ , 证明计算步骤可以用多项式表示

$$B(q^{-1}) = A(q^{-1})H(q^{-1}) + O(q^{-2n-1}) \quad (\text{ii})$$

并且式 (ii) 和下面的线性方程是等价的。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -h(1) & 0 & 0 & \vdots \\ -h(2) & -h(1) & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -h(1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -h(2n-1) & \dots & h(n) & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(1) \\ \vdots \\ h(2n) \end{pmatrix} \quad (\text{iii})$$

利用系统的脉冲响应  $\{h(k)\}$ ，由差分方程式 (i) 可以直接演算出式 (iii)。

(b) 假设  $\{h(k)\}$  是无噪声的  $n$  阶系统

$$A_0(q^{-1})y(t) = B_0(q^{-1})u(t)$$

的脉冲响应，其中  $A_0, B_0$  互素。证明上述步骤在  $A(q^{-1}) = A_0(q^{-1}), B(q^{-1}) = B_0(q^{-1})$  的意义下能够给出一个很好的模型。

## 推荐文献

由 Eykhoff (1974)，以及 Rake (1980, 1987) 和 Glover (1987) 的指导论文对非参数辨识方法给出了一些一般性的、更加具体的结果。

Schwarze 给出了一些不同的从阶跃响应确定参数模型的方法 (1964)。

Åström (1975) 对频率分析给出了完整的结果，而 Davies (1970) 进一步给出了相关性分析的结果。

Jenkins and Watts (1969) 的合著仍被视为经典之作。该领域的相关新近著作可以参考 Brillinger (1981)、Priestley (1982)、Ljung (1985b, 1987)、Hannan (1970)、Wellstead (1981) 以及 Bendat、Piersol (1980)。Kay (1988) 也就谱分析给出了一些参数化的方法。Cooley and Tukey (1965) 给出了能够进行离散时间傅里叶变换的快速傅里叶算法 (FFT)。关于这一内容还可以查阅 Bergland (1969) 的一篇指导性论文。

## 附录 A3.1 协方差函数、谱密度、线性滤波

假设  $u(t)$  是一列稳定的  $nu$  维随机过程，均值为  $m_u$ ，其协方差函数为

$$r_u(\tau) = E[u(t + \tau) - m_u][u(t) - m_u]^T \quad (\text{A3.1.1})$$

由定义可知， $w(t)$  谱密度为

$$\phi_u(\omega) \triangleq \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_u(\tau) e^{-i\tau\omega} \quad (\text{A3.1.2})$$

式 (A3.1.2) 的逆关系能说明利用谱密度表示协方差函数的方法，算式为

$$r_u(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_u(\omega) e^{i\tau\omega} d\omega \quad (\text{A3.1.3})$$

为了验证式 (A3.1.3)，将式 (A3.1.2) 代入式 (A3.1.3) 的右边，得

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} r_u(\tau') e^{-i\tau'\omega} e^{i\tau\omega} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} r_u(\tau') \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\tau-\tau')\omega} d\omega \\ &= \sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} r_u(\tau') \delta_{\tau,\tau'} = r_u(\tau) \end{aligned}$$

式 (A3.1.3) 得证。

考察  $u(t)$  的一个线性滤波

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(t-k) \quad (\text{A3.1.4})$$

其中， $y(t)$  是一个  $ny$  维信号； $\{h(k)\}$  是一列  $(ny | nu)$  的矩阵。我们假设滤波式 (A3.1.4) 是稳定的，即当  $k \rightarrow \infty$  时， $\|h(k)\| \rightarrow 0$ 。

在已有的假设条件下， $y(t)$  也是稳定的。该附录的目的是为了演算均值  $m_y$ 、协方差函数  $r_y(\tau)$ 、谱密度  $\phi_y(\omega)$ ，以及互协方差函数  $r_{yu}(\tau)$ 、交叉谱密度  $\phi_{yu}(\omega)$ 。为讨论方便，我们需引入滤波算子 (传递函数算子)

$$H(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k} \quad (\text{A3.1.5})$$

其中,  $q^{-1}$  是后移算子。用  $H(q^{-1})$  可以将滤波式 (A3.1.4) 写成

$$y(t) = H(q^{-1})u(t) \quad (\text{A3.1.6})$$

由式 (A3.1.4),  $y(t)$  的均值也不难得到

$$m_y = Ey(t) = E \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(t-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)m_u = H(1)m_u \quad (\text{A3.1.7})$$

$H(1)$  可看作滤波的静态增益。

现在我们考察输入和输出的均值偏差  $\tilde{u}(t) \triangleq u(t) - m_u$ ,  $\tilde{y}(t) \triangleq y(t) - m_y$  之间的关系。由式 (A3.1.4) 和式 (A3.1.7) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(t-k) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)m_u = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)[u(t-k) - m_u] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\tilde{u}(t-k) = H(q^{-1})\tilde{u}(t) \end{aligned} \quad (\text{A3.1.8})$$

因此,  $(\tilde{u}(t), \tilde{y}(t))$  的关系和  $(u(t), y(t))$  相同。我们在分析协方差函数时需讨论  $\tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$ 。为简便起见, 我们考察输入为 0 均值的情形。注意, 下面的结果在  $m_u \neq 0$  时也成立。

我们先考察  $y(t)$  的协方差函数, 直接计算得

$$\begin{aligned} r_y(\tau) &= Ey(t+\tau)y^T(t) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(j)Eu(t+\tau-j)u^T(t-k)h^T(k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(j)r_u(\tau-j+k)h^T(k) \end{aligned} \quad (\text{A3.1.9})$$

在大多数情形下, 式 (A3.1.9) 并不常用, 但其谱密度函数的结果较为常用。由式 (A3.1.2) 可得

$$\begin{aligned} \phi_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_y(\tau)e^{-i\tau\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(j)e^{-ij\omega}r_u(\tau-j+k)e^{-i(\tau-j+k)\omega}h^T(k)e^{ik\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(j)e^{-ij\omega} \left[ \sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} r_u(\tau')e^{-i\tau'\omega} \right] h^T(k)e^{ik\omega} \\ &= \left[ \sum_{j=0}^{\infty} h(j)e^{-ij\omega} \right] \phi_u(\omega) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} h^T(k)e^{ik\omega} \right] \end{aligned}$$

或者

$$\phi_y(\omega) = H(e^{-i\omega})\phi_u(\omega)H^T(e^{i\omega}) \quad (\text{A3.1.10})$$

我们可以看出, 输出的频率信息与输入的谱密度函数  $\phi_u(\omega)$ 、传递函数  $H(e^{i\omega})$  有关。例如, 假设系统有一个弱阻尼谐振频率  $\omega_0$ , 那么  $|H(e^{i\omega_0})|$  和  $\phi_y(\omega_0)$  都会相当大 (假设  $\phi_u(\omega_0) \neq 0$ )。

接着讨论互协方差函数, 我们可以这样计算

$$\begin{aligned} r_{yu}(\tau) &= Ey(t+\tau)u^T(t) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h(j)Eu(t+\tau-j)u^T(t) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(\tau-j) \end{aligned} \quad (\text{A3.1.11})$$

同样的，还可以计算交叉谱密度函数

$$\begin{aligned}\phi_{yu}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_{yu}(\tau) e^{-i\tau\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h(j) e^{-ij\omega} r_u(\tau-j) e^{-i(\tau-j)\omega} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h(j) e^{-ij\omega} \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} r_u(\tau') e^{-i\tau'\omega} \right]\end{aligned}$$

或者

$$\phi_{yu}(\omega_0) = H(e^{-i\omega_0}) \phi_u(\omega) \quad (\text{A3.1.12})$$

这里我们讨论的都是稳定过程。Ljung (1985c) 证明，在拟平稳信号下，上述结论仍然成立。这类信号其实是具有确定性的随机过程。类似式 (A3.1.1)，我们分别令均值和协方差函数为

$$m_u = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Eu(t) \quad (\text{A3.1.13a})$$

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E(u(t+\tau) - m_u)(u(t) - m_u)^T \quad (\text{A3.1.13b})$$

假设上式中的极限存在，协方差函数一经定义，与式 (A3.1.2) 类似，也可以计算其相应的谱密度函数。正如上文中提到的，对于拟平稳信号而言，线性滤波的式 (A3.1.10) 和式 (A3.1.12) 的一般结论也成立。

## 附录 A3.2 相关性分析的精度

考察系统

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(t-k) + v(t) \quad (\text{A3.2.1})$$

其中， $v(t)$  是一列稳定随机过程，并与输入信号独立。在 3.4 节中，加权函数可以由下式得到

$$\hat{h}(k) = \frac{\hat{r}_{yu}(k)}{\hat{r}_u(0)} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t+k)u(t)}{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t)} \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A3.2.2})$$

假设  $u(t)$  是 0 均值、方差为  $\sigma^2$  的白噪声。

估计式 (A3.2.2) 的精度可以利用遍历理论 (见附录 B 中的 B.1 节) 来确定。经计算得  $\hat{r}_{yu}(k) \rightarrow r_{yu}(k)$ ,  $\hat{r}_u(0) \rightarrow r_u(0)$ 。因此当  $N$  趋于无穷时， $\hat{h}(k) \rightarrow h(k)$ 。对于有限但较大的数据量  $N$ ，为考察偏差  $\hat{h}(k) - h(k)$ ，我们有必要先估计协方差  $\hat{r}_{yu}(k)$  和  $\hat{r}_u(0)$  的精度。这在 B.8 节中有具体讨论，这里我们尝试用一种更直接的方式。首先记

$$\begin{aligned}\hat{h}(k) - h(k) &= \frac{1}{\hat{r}_u(0)} [\hat{r}_{yu}(k) - h(k) \hat{r}_u(0)] \\ &\approx \frac{1}{r_u(0)} \frac{1}{N} \left[ \sum_{t=1}^N \{y(t+k) - h(k)u(t)\} u(t) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left\{ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{\infty} h(i)u(t+k-i) + v(t+k) \right\} u(t)\end{aligned} \quad (\text{A3.2.3})$$

$\{\hat{h}(\mu) - h(\mu)\}$  和  $\{\hat{h}(v) - h(v)\}$  的协方差  $P_{\mu\nu}$  可以这样计算