第 1 章　物理实验基本知识

1.1　测量与误差

科学实验是人们根据研究的目的，创造一定的条件，使自然过程在实验场所再现，并运用科学仪器、方法，探求其变化规律的实践活动。科学实验一般包含定性分析与定量研究两个层面，定量研究要进行测量，而测量绝不可能绝对准确，所以需要对测量结果的可靠性作出评价，对其误差范围作出估计。本章主要介绍测量误差和数据处理的基本知识。

1.1.1　测量

在物理实验中，一切物理量都是通过测量得到的，测量是人们对自然现象和实体进行数量描述的一种认识过程。所谓测量，就是用一定的工具或仪器，通过一定的方法，直接或间接地与被测对象进行比较。物理测量的内容很多，大到日、月、星辰，小到分子、原子。现在人们能观察和测量到的范围，在空间方面已小到原子核内部 10^{-15}～10^{-14} m，大到整个宇宙，其大小为百亿光年，数量级相差在 10^{40} 倍以上。在时间方面某些粒子寿命已短到 10^{-24} ～10^{-23} s 的瞬间，而宇宙的年龄长达百亿年，两者数量级相差也在 10^{40} 倍以上。在定量地验证理论方面，也需要进行大量的测量工作。因此可以说，测量是进行物理实验必不可少的极其重要的一环。

为确定被测对象的测量值，首先要选定一个单位，用它与被测对象进行比较，得到被测对象与它的比值—倍数，即为数值。显然数值的大小与所选用的单位有关，对同一对象测量时，选用的单位越大，数值越小，反之亦然。因此一个测量数据不同于一个数值，它是由数值和单位两部分组成的。一个数值有了单位，才具有特定的物理意义，这时它才可以称之为一个物理量。因此测量所得的值（数据）应包括数值（大小）和单位，两者缺一不可。

目前，物理学上各物理量的单位，都采用中华人民共和国法定计量单位，它是以国际单位制（SI）为基础的单位。国际单位制以米（长度）、千克（质量）、秒（时间）、安培（电流）、开尔文（温度）、摩尔（物质的量）和坎德拉（发光强度）为基本单位，其他物理量的单位均由这些基本单位导出，称为国际单位制的导出单位。

1.1.2　直接测量与间接测量

测量分为直接测量和间接测量两大类。直接测量是指把待测物理量直接与预先标定好的仪器、量具进行比较，直接从仪器、量具上读出量值的大小。例如，用直尺测量长度、用天平称物体质量、用秒表计量时间等。间接测量是指按一定的函数关系，由一个或多个直接测量量计算出另一个物理量。例如，测形状规则的物体密度时，先测出该物体的几何尺寸和质量，再用公式计算出物体的密度。在物理实验中进行的物理量测量，大多要通过间接测量得到。

测量方式又可分为等精度测量和非等精度测量。等精度测量是同一测量者在相同的条件下，用同样的方法和同样的仪器对同一物理量进行的多次测量。等精度测量中各次测量的结果可能不同，但没有理由认为哪一次或哪几次的测量更可靠或更不可靠。而一旦上述测量条件中任一项发

生变化，导致明显影响测量结果，则为非等精度测量。而一般所说的测量都是指等精度测量。

1.1.3 测量误差

测量的目的是为了得到待测物理量的值。在一定条件下，任何物理量的大小都有一个客观存在的真实值，称为真值。被测量的真值是一个理想的概念，一般而言是不知道的。

从测量的要求来说，人们总希望测量的结果能很好地符合客观实际。但在实际测量过程中，由于测量仪器、测量方法、测量条件和测量人员的水平以及种种因素的局限，不可能使测量结果与客观存在的真值完全相同，我们所测得的只能是某物理量的近似值。也就是说，任何一种测量结果的量值与真值之间总会或多或少地存在一定的差值，这一差值称为该测量值的测量误差，简称“误差”，误差的大小反映了测量的准确程度。测量误差的大小可以用绝对误差表示，也可用相对误差表示：

$$\text{绝对误差} = \text{测量值}-\text{真值}$$

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{真值}}$$

绝对误差反映了测量值偏离真值的大小和方向，相对误差则表示绝对误差对测量结果影响的程度。

测量总是存在着一定的误差，但实验者应该根据要求和误差限度来制订或选择合理的测量方案和仪器。不能不切合实际地要求实验仪器的精度越高越好；环境条件总是恒温、恒湿、越稳定越好；测量次数总是越多越好。一个优秀的实验工作者，应该是在一定的要求下，以最低的代价来取得最佳的实验结果。要做到既保证必要的实验精度，又合理地节省人力与物力。误差自始至终贯穿于整个测量过程之中，为此必须分析测量中可能产生各种误差的因素，尽可能消除其影响，并对测量结果中未能消除的误差做出评价。

1.1.4 误差的分类

误差的产生有多方面的原因，从误差的来源和性质上可分为“随机误差”和“系统误差”两大类。

1. 系统误差

在相同条件下，多次测量同一物理量时（等精度测量），测量值对真值的偏离（包括大小和方向）总是相同或以可以预知的方式变化，这类误差称为系统误差。系统误差的来源大致有以下几种。

（1）实验方法的不完善或依据的理论本身的近似性。例如，用天平称质量时未考虑空气的浮力；用伏安法测电阻时未考虑电表的内阻影响等。

（2）仪器结构不完善。例如，温度计的刻度不准；砝码质量不准；仪器零点没有调准；仪器未调整好水平或铅直等。

（3）环境条件的改变。例如，标准电池是在20℃条件下的电动势值为标准值，若不在这一温度环境中使用而不加以修正就会引入系统误差。

（4）测量者生理、心理因素的影响。例如，记录某一信号时有滞后或超前的倾向，对准标志线读数时总是偏左或偏右、偏上或偏下等。

系统误差的特点是恒定性，不能用增加测量次数的方法使它减小。在实验中发现和消除系统误差是很重要的，因为它常常是影响实验结果准确程度的主要因素。能否用恰当的方法发现和消

除系统误差，是测量者实验水平高低的反映，但是又没有一种普遍适用的方法去消除误差，主要靠对具体问题作具体的分析与处理，要靠实验经验的积累。

能否识别和消除系统误差与实验者的经验和实际知识有着密切关系。因此，对实验初学者来说，应该从一开始就逐步地积累这方面的感性知识，在实验时要分析采用这种实验方法、使用这套仪器、运用这种操作技术会不会给测量结果引入系统误差。

2. 随机误差

随机误差是指在相同条件下，多次测量同一物理量，其测量误差的绝对值和符号以不可预知的方式变化的测量误差。这种误差是由实验中多种因素的微小变动而引起的，如实验装置和测量机构在各次调整操作上的变动，测量仪器指示数值的变动，以及观测者本人在判断和估计读数上的变动等等。这些因素的共同影响就使测量值围绕着测量的平均值发生涨落，这变化量就是各次测量的随机误差。随机误差的出现，就某一测量值来说是没有规律的，其大小和方向都是不能预知的，但对一个量进行足够多次的测量，则会发现它们的随机误差是按一定的统计规律分布的，常见的分布有正态分布、均匀分布、t 分布等。

最典型的分布是正态分布，它的特点是：正方向误差和负方向误差出现的次数大体相等，数值较小的误差出现的次数较多，数值很大的误差在没有错误的情况下通常不出现。这一规律在测量次数越多时表现得越明显。

3. 系统误差和随机误差的关系

系统误差和随机误差的区别不是绝对的，在一定条件下，它们可以相互转化。例如，前面曾经提到的砝码误差，对于制造厂家来说，它是随机误差，对于使用者来说，它又是系统误差。又如测量对象的不均匀性（如小球直径、金属丝的直径等），既可以当作系统误差，又可以当作随机误差。有时系统误差和随机误差混在一起，也难于严格加以区分。例如，测量者使用仪器时的估读误差往往既包含有系统误差，又包含有随机误差。这里的系统误差是指当读数时总是有偏大或偏小的倾向，随机误差是指当每次读数时偏大或偏小的程度又是互不相同的。

1.2　随机误差及其估算

1.2.1　随机误差的统计规律

随机误差是实验过程中各种随机或不确定因素的微小变动引起的。例如，实验仪器在各次调整操作过程中的变动性，实验环境中的温度、湿度、电源电压、杂散电磁场的起伏变化等等。这些因素的综合影响使测量结果的随机误差时大时小、时正时负，既不可预测又无法控制。但是，在测量次数相当多的情况下，随机误差仍服从一定的统计规律。在物理实验中，多次独立测量得到的数据一般可近似看作为正态分布。正态分布的特征可以用正态分布曲线形象地表示出来，如图 01-1 所示。测量值 x 的正态分布函数为：

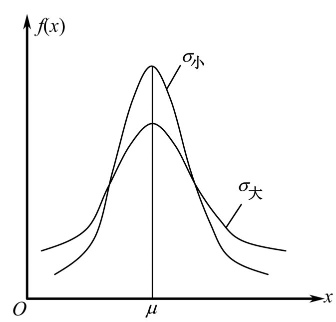

图 01-1　正态分布曲线

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad (01\text{-}1)$$

式中，μ 表示 x 出现概率最大的值，在消除系统误差后，μ 为真值。σ称为标准误差，它反映了测量值的离散程度。

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{\mathrm{i}}-\mu)^2}{n}} \quad (n \to \infty) \tag{01-2}$$

服从正态分布的随机误差具有以下特点：

（1）单峰性：绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。

（2）对称性：绝对值相等的正负误差出现的概率相等。

（3）有界性：绝对值很大的误差出现的概率趋近于零，即误差的绝对值不超过一定限度。

（4）抵偿性：随机误差的算术平均值随着测定次数的增加而越来越趋近于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{\mathrm{i}} = 0$$

1.2.2　测量结果的最佳值－算术平均值

在实际测量中，测量次数 n 总是有限的，设对某一物理量进行等精度的重复测量，所得的一系列测量值分别为：$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\mathrm{i}}, \ldots x_{\mathrm{n}}$，则测量结果的算术平均值为

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{\mathrm{i}} \tag{01-3}$$

x_{i} 是随机变量，$\overline{x}$ 也是一个随机变量，根据随机误差的统计分布特点，可以证明如果对一个物理量测量了相当多次后，分布曲线趋于对称分布，其算术平均值就是接近真值 μ 的最佳值。

根据误差定义有

$$\Delta x_1 = x_1 - \mu$$
$$\Delta x_2 = x_2 - \mu$$
$$\cdots\cdots$$
$$\Delta x_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}} - \mu$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{\mathrm{i}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{\mathrm{i}} - \mu = \overline{x} - \mu$$

由随机误差的抵偿性，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum\Delta x_{\mathrm{i}} \to 0$，因此 $\overline{x} \to \mu$。

由此可见，测量次数越多，算术平均值越接近真值。所以多次测量结果的算术平均值为接近真值的最佳值。那么，如何来表示测量结果的随机误差大小呢？

1.2.3　随机误差的表示

1. 标准误差、置信概率和极限误差

由图 01-1 可以看出，σ值越小，曲线越陡且峰值越高，表明测量值的误差集中，小误差占优势，即各测量值的分散性小，重复性好。反之，σ值越大，曲线越平坦，说明各次测量值的分散性大，重复性差。可见σ并不表示一个具体的测量误差值，但它反映在相同条件下进行一组测量后的随机误差出现概率的分布情况，具有统计性的特征。

定义 $P=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$，表示变量 x 在(x_1,x_2)区间出现的概率，称为置信概率。x 出现在（$\mu-\sigma$, $\mu+\sigma$）之间的概率为

$$P=\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\mathrm{d}x=0.683$$

所以随机误差出现在$(-\sigma,+\sigma)$区间内的概率也是 P

$$P(-\sigma\leqslant\Delta x\leqslant+\sigma)=\int_{-\sigma}^{+\sigma} f(\Delta x)\mathrm{d}\Delta x=\int_{-\sigma}^{+\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\Delta x=0.683$$

说明，对任意一次测量，其测量值出现在（$\mu-\sigma$，$\mu+\sigma$）区间的可能性为 0.683。相应的测量误差落在$-\sigma$到$+\sigma$之间的概率为 0.683。区间$[-\sigma,+\sigma]$称为置信区间，其对应的概率 $P(\sigma)$=0.683 称为置信概率。为了给出更高的置信水平，当置信区间扩展为（-2σ，$+2\sigma$）时其置信概率为 $P(2\sigma)=\int_{-2\sigma}^{+2\sigma} f(\Delta x)\mathrm{d}\Delta x=0.954$；当置信区间为（$-3\sigma$，$+3\sigma$）时，其置信概率为 $P(3\sigma)=\int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f(\Delta x)\mathrm{d}\Delta x=0.997$。即在 1000 次测量中只有 3 次测量值的误差绝对值会超过 3σ。由于实际测量中次数很少超过几十次，因此可以认为测量值误差超过$\pm3\sigma$范围的概率极小，因而 3σ 也被称作极限误差。

2. 平均误差

定义

$$\eta=\frac{1}{n}\sum\left|\Delta x_{\mathrm{i}}\right| \tag{01-4}$$

它的概率意义是

$$P(-\eta\leqslant\Delta x\leqslant+\eta)=\int_{-\eta}^{+\eta} f(\Delta x)\mathrm{d}\Delta x=0.575$$

即任意一次测量的误差落在$-\eta$到$+\eta$之间的概率为 0.575，它与标准误差的关系为

$$\eta=0.798\sigma\approx\frac{4}{5}\sigma$$

3. 标准偏差

由于真值虽客观存在却无法准确得到，因而任意一次测量的误差 Δx_{i} 也无法计算。考虑到有限次测量的算术平均值 $\bar{x}$ 为接近真值的最佳值，且当 $n\to\infty$ 时，$\bar{x}\to\mu$。所以我们可以用各次测量值与算术平均值之差——残差，来估算有限次测量中的误差

$$v_{\mathrm{i}}=x_{\mathrm{i}}-\bar{x} \tag{01-5}$$

残差 v_{i} 是可以计算的，用残差 v_{i} 来计算标准误差σ时，根据误差理论，其计算式为

$$S_{\mathrm{x}}=\sqrt{\frac{\sum v_{\mathrm{i}}^2}{n-1}} \tag{01-6}$$

式中 S_{x} 称为标准偏差，由于实验中测量次数总是有限的，所以 S_{x} 只是 $n\to\infty$ 时标准误差σ的一个估算值。

4. 平均值标准差

由于算术平均值 $\bar{x}$ 是测量结果的最佳值，最接近真值，因此，我们更希望知道 $\bar{x}$ 对真值的离散程度。误差理论可以证明 $\bar{x}$ 的标准差为

$$S_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\sum\left(\bar{x}-x_i\right)^2}{n(n-1)}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}} \qquad (01\text{-}7)$$

上式说明，算术平均值的标准差$S_{\bar{x}}$是n次测量中任意一次测量值标准差的$1/\sqrt{n}$，显然$S_{\bar{x}}$小于S_x。$S_{\bar{x}}$的意义是待测物理量处于$\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}$区间内的概率为 0.683。　从上式中可以看出，当n为无穷大时，$S_{\bar{x}}=0$，即测量次数无穷多时，算术平均值就是真值。

值得注意的是测量次数相当多时，测量值才近似为正态分布，上述结果才成立。在测量次数较少的情况下，测量值将呈t分布。测量次数较少时，t分布偏离正态分布较多，当测量次数较多时（如多于 10 次）t分布趋于正态分布。t分布时，$\bar{x}\pm S_{\bar{x}}$的置信概率不是 0.683。在这种情况下，$x=\bar{x}\pm t_P S_{\bar{x}}=\bar{x}\pm t_P S_x/\sqrt{n}$的置信概率是$P$。表 01-1 列出了置信概率$P$分别为 0.683 和 0.95 时的不同测量次数下的t_P值。

表 01-1　两种置信概率下 t_P 的多次测量值

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{0.683}$	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06
$t_{0.95}$	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26

1.3　仪器误差

1.3.1　仪器的最大允差

仪器误差是指在正确使用仪器的前提下，测量所得结果的最大允许误差或误差限，用$\Delta_{仪}$表示。仪器的准确度等级通常是由制造厂家和计量机构使用更准确的仪器、量具检定比较后给出的。仪器的最大允差由所用仪器的量程和级别决定。某些常用实验仪器的最大允差$\Delta_{仪}$如表 01-2 所示。

1.3.2　仪器的标准误差

仪器误差同样包含系统误差和随机误差两部分。究竟以哪个因素为主，取决于具体情况。一般而言，级别较高的仪表主要是随机误差，而级别较低的或工业用仪表则主要是系统误差。实验室常用仪表两种误差都有，且数值相近，根据实际，一次测量值的仪器标准差为

$$\sigma_{仪}=\Delta_{仪}/C$$

式中 C 为一常数，由仪器误差的概率分布决定。常用仪器的误差分布及 C 的取值如表 01-3 所示。

表 01-2　部分常用实验仪器的最大允差

仪 器 名 称	量　程	最小分度值	最 大 允 差
钢板尺	150 mm	1 mm	±0.10 mm
	500 mm	1 mm	±0.15 mm
	1000 mm	1 mm	±0.20 mm
钢卷尺	1 m	1 mm	±0.8 mm
	2 m	1 mm	±1.2 mm
游标卡尺	125 mm	0.02 mm	±0.02 mm
		0.05 mm	±0.05mm

续表

仪 器 名 称	量　程	最小分度值	最 大 允 差
螺旋测微器（千分尺）	0～25 mm	0.01 mm	±0.004 mm
七级天平（物理天平）	500g	0.05g	0.08g（接近满量程） 0.06g（1/2 量程附近） 0.04g（1/3 量程附近）
三级天平（分析天平）	200g	0.1mg	1.3mg（接近满量程） 1.0mg（1/2 量程附近） 0.7mg（1/3 量程附近）
普通温度计（水银或有机溶剂） 精密温度计（水银）	0～100℃ 0～100℃	1℃ 0.1℃	±1℃ ±0.2℃
电表（0.5 级） 电表（0.1 级）			0.5%×量程 0.1%×量程

表 01-3　常用仪器的误差分布

仪器名称	米尺	游标卡尺	千分尺	物理天平	秒表
误差分布	正态分布	均匀分布	正态分布	正态分布	正态分布
C	3	$\sqrt{3}$	3	3	3

1．均匀分布

一般仪器误差的分布概率密度函数服从均匀分布，即在最大允差$\varDelta_{仪}$范围内，各种误差出现的概率相同，而在最大允差外出现的概率为零。例如，游标卡尺的仪器误差、机械秒表的仪器误差、仪器度盘或其他传动齿轮的回差所产生的误差及级别较高的仪器和仪表的误差等都呈现均匀分布，分布规律为

$$f(\Delta x)=\frac{1}{2\varDelta_{仪}}$$

从而标准误差为

$$\sigma_{仪}=\frac{\varDelta_{仪}}{\sqrt{3}}\ (P=0.577) \tag{01-8a}$$

$$\sigma_{仪}=0.683\varDelta_{仪}\quad (P=0.683) \tag{01-8b}$$

2．正态分布

若仪器误差的概率分布函数近似服从正态分布，则：

$$\sigma_{仪}=\frac{\varDelta_{仪}}{3}\quad (P=0.683) \tag{01-9}$$

1.4　间接测量的误差传递

间接测量量是由直接测量量根据一定的数学公式计算出来的。这样一来，直接测量量的误差就必然影响到间接测量量，这种影响的大小也可以由相应的数学公式计算出来，这就是误差传递。

1.4.1　误差传递的基本公式

设 $x,y,z,\cdots$为独立的直接测量量，N 为待测的间接测量物理量，其函数关系为

$$N=F(x,y,z,\cdots)$$

对上式进行全微分有

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots$$

上式说明，当测量值 x,y,z 有微小改变 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 时，间接测量量 N 改变 $\mathrm{d}N$，通常误差远小于测量值，把 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\mathrm{d}N$ 看作是误差，即在上式中以$\Delta x,\Delta y,\Delta z\cdots$代替 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\cdots$，上式就是误差传递公式了。

$$\Delta N=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z+\cdots \qquad (01\text{-}10)$$

因而相对误差为

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\Delta x}{F}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{F}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\Delta z}{F}+\cdots \qquad (01\text{-}11)$$

在某些情况下，计算间接测量量的相对误差较为简便，若取自然对数

$$\ln N=\ln F(x,y,z,\cdots)$$

再求全微分，可得

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial \ln F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \ln F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \ln F}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots$$

式（01-10）和式（01-11）就是误差传递的基本公式，其中等于号“=”后面的每一项称为绝对误差或相对误差的分误差项；$\Delta x,\Delta y,\Delta z\cdots$前面的系数称为误差传递系数。可以看出，一个独立测量量的误差对总误差的影响，不仅取决于本身误差的大小，还取决于误差传递系数。

1.4.2　标准误差的传递和合成

在一般情况下，要求计算间接测量结果的标准误差，而前面两式对标准误差的合成并不成立。设间接测量量 N 与各独立的直接测量量 $x,y,z,\ldots$有下列函数关系：

$$N=F(x,y,z,\cdots)$$

设在同样条件下对各直接测量量进行了 n 次等精度测量，各直接测量量的标准误差分别为 $\sigma_{\mathrm{x}},\sigma_{\mathrm{y}},\sigma_{\mathrm{z}},\ldots$则

$$\sigma_{\mathrm{N}}=\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2(\sigma_{\mathrm{x}})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2(\sigma_{\mathrm{y}})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2(\sigma_{\mathrm{z}})^2+\cdots} \qquad (01\text{-}12)$$

式（01-12）即为标准误差的传递公式。若函数关系为积商形式，则通过下式求标准误差

$$\frac{\sigma_{\mathrm{N}}}{N}=\sqrt{(\frac{\partial \ln F}{\partial x})^2(\sigma_{\mathrm{x}})^2+(\frac{\partial \ln F}{\partial y})^2(\sigma_{\mathrm{y}})^2+(\frac{\partial \ln F}{\partial z})^2(\sigma_{\mathrm{z}})^2+\cdots} \qquad (01\text{-}13)$$

常用函数的标准误差传递公式如表 01-4 所示。

表 01-4　常用函数的标准误差传递公式

函数关系	标准误差传递公式
$N = x + y$	$\sigma_N = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
$N = x - y$	$\sigma_N = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
$N = kx$	$\sigma_N = k\sigma_x$，$\dfrac{\sigma_N}{N} = \dfrac{\sigma_x}{x}$
$N = \sqrt[k]{x}$	$\dfrac{\sigma_N}{N} = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{\sigma_x}{x}$
$N = xy$	$\dfrac{\sigma_N}{N} = \sqrt{(\dfrac{\sigma_x}{x})^2 + (\dfrac{\sigma_y}{y})^2}$
$N = \dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\sigma_N}{N} = \sqrt{(\dfrac{\sigma_x}{x})^2 + (\dfrac{\sigma_y}{y})^2}$
$N = \dfrac{x^k y^m}{z^n}$	$\dfrac{\sigma_N}{N} = \sqrt{(k\dfrac{\sigma_x}{x})^2 + (m\dfrac{\sigma_y}{y})^2 + (n\dfrac{\sigma_z}{z})^2}$
$N = \sin x$	$\sigma_N = \lvert\cos x\rvert \sigma_x$
$N = \ln x$	$\sigma_N = \dfrac{\sigma_x}{x}$

1.4.3　间接测量的平均值标准差

间接测量量 N 由直接测量量 $x,y,z,\cdots$ 的最佳估计值通过函数关系求得。

$$N = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \cdots)$$

设各直接测量量的平均值标准差分别为 $S_{\bar{x}}$，$S_{\bar{y}}$，$S_{\bar{z}}\ldots$，则间接测量量 N 的平均值标准差为

$$S_{\bar{N}} = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 S_{\bar{x}}^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 S_{\bar{y}}^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2 S_{\bar{z}}^2 + \cdots} \tag{01-14}$$

1.5　不确定度

由前所述，误差是一个理想的概念，它本身就是不确定的。根据误差的定义，由于真值一般不可能准确地知道，因而测量误差也不可能确切获知。既然误差无法按照其定义式精确求出，那么现实可行的办法就只能根据测量数据和测量条件进行推算（包括统计推算和其他推算），去求得误差的估计值。显然，由于误差是未知的，因此不应再将任何一个确定的已知值称作误差。误差的估计值或数值指标应采用另一个专门名称，这个名称就是不确定度。

测量不确定度是用来表征被测量之值所处范围的一种评定，一切测量结果都具有不确定度。

1.5.1　不确定度

在物理实验中，常常要对测量的结果做出综合的评定，这就要采用不确定度的概念。不确定度是“误差可能数值的测量程度”，表征所得测量结果代表被测量的程度。也就是因测量误差存在而对被测量值不能肯定的程度，因而是测量质量的表征，用不确定度对测量数据做出比较合理的评定。对一个物理实验的具体数据来说，不确定度是指测量值（近真值）附近的一个范围，测量值与真值之差（误差）可能落于其中，不确定度小，测量结果可信赖程度高；不确定度大，测量结果可信赖程度低。在实验和测量工作中，不确定度一词近似于不确知、不明确、不可靠、有质疑，是作为估计而言的；因为误差是未知的，不可能用指出误差的方法去说明可信赖程度，而

只能用误差的某种可能的数值去说明可信赖程度，所以不确定度更能表示测量结果的性质和测量的质量。用不确定度评定实验结果的误差，其中包含了各种来源不同的误差对结果的影响，而它们的计算又反映了这些误差所服从的分布规律，这更准确地表述了测量结果的可靠程度，因而有必要采用不确定度的概念。

以标准偏差表示测量结果的不确定度，称为**标准不确定度**，以 u 表示。以标准差的倍数表示的不确定度称为**扩展不确定度**或称为展伸不确定度，也可称为总不确定度，以 U 表示。标准不确定度依其评定方法分为 A、B 两类：能用对观测列进行统计分析的方法计算者，称为 A **类标准不确定度**，以 u_A 表示；不同于 A 类的其他方法计算者，称为 B **类标准不确定度**，以 u_B 表示。各标准不确定度分量的合成称为**合成标准不确定度**，以 u_c 表示。

1.5.2　不确定度评定的简化方法

1. A 类不确定度分量

由于大学物理实验中大部分直接测量可看成等精度测量，以 n 次直接测量量的算术平均值 $\overline{x}$ 作为测量结果的最佳估计值，用 $S_{\bar{x}}$ 来估算测量结果的标准误差，A 类标准不确定度分量为

$$u_A = t_p S_{\bar{x}} \quad (P = 0.683) \tag{01-15}$$

2. B 类不确定度分量

B 类标准不确定度的评定原则上要考虑到各种影响因素，获得 B 类标准不确定度的信息来源众多，包括以前的观测数据，对有关技术资料和测量仪器特性的了解和经验，生产部门提供的技术说明文件、校准证书、检定证书或其他文件提供的数据、准确度的等别或级别等，手册或某些资料给出的参考数据及其不确定度等。为简化处理，我们主要是以仪器标准差作为 B 类标准不确定度分量。即

$$u_B = \sigma_{仪} \quad (P = 0.683) \tag{01-16}$$

对于单次测量的随机误差一般是以最大误差进行估计，以下分两种情况处理。

已知仪器准确度时，这时以其准确度作为误差大小，如一个量程 150mA，准确度 0.2 级的电流表，测某一次电流，读数为 131.2mA。为估计其误差，则按准确度 0.2 级可算出最大绝对误差为 0.3mA，因而该次测量的结果可写成 I＝131.2±0.3mA；又如用物理天平称量某个物体的质量，当天平平衡时，砝码为 m＝145.02g，让游码在天平横梁上偏离平衡位置一个刻度（相当于 0.05g），天平指针偏过 1.8 分度，则该天平这时的灵敏度为（1.8÷0.05）分度/g，其感量为 0.03g/分度，就是该天平称物体质量时的准确度，测量结果可写成 m＝145.02±0.03g。

未知仪器准确度时，这时单次测量误差的估计，应根据所用仪器的精密度、仪器灵敏度、测试者感觉器官的分辨能力以及观测时的环境条件等因素具体考虑，以使估计误差的大小尽可能符合实际情况。一般来说，最大读数误差对连续读数的仪器可取仪器最小刻度值的一半，而无法进行估计的非连续读数的仪器，如数字式仪表，则取其最末位数的一个最小单位。

3. 合成标准不确定度

合成标准不确定度可以按不确定度分量的 A、B 两类评定方法分别合成。例如，$u_{cA}(N)$、$u_{cB}(N)$ 分别为按 A、B 类标准不确定度分量的合成不确定度。

当全部直接测量量彼此独立或不相关时，合成标准不确定度 $u_c(N)$ 由下式得出：

$$u_c(N)=\sqrt{\sum_1^n(\frac{\partial F}{\partial x_i})^2u^2(x_i)} \qquad (01\text{-}17)$$

式中，标准不确定度 $u(x_i)$既可以按 A 类，也可以按 B 类方法评定。$u_c(N)$是估计的标准差，表征合理赋予被测量 N 之值的分散性。

4. 扩展不确定度的评定

将合成标准不确定度 $u_c(N)$乘以给定概率 P 的包含因子 k_p，从而得到扩展不确定度。合成标准不确定度表示为 u_c 将 A 类和 B 类标准差合成得到置信概率 P=0.683 的合成标准不确定度：

$$u_c=(u_A{}^2+u_B{}^2)^{1/2} \qquad P=0.683 \qquad (01\text{-}18)$$

若考虑到测量次数，还应采用 t 因子修正。将合成标准不确定度乘以一个与一定置信概率相联系的包含因子（或称覆盖因子）K，得到增大置信概率的不确定度称为展伸不确定度（或扩展不确定度）。在大学物理实验中，若取置信概率 P=0.683，在 A 类、B 类不确定度分量各只有一个以标准误差形式表示的相互独立的分量的简单情况下，合成不确定度 u_c 为

$$u_c=\sqrt{[t_{0.683(n-1)}S_{\bar{x}}]^2+\sigma_{仪}^2} \qquad (01\text{-}19a)$$

若取置信概率为 0.95，对正态分布，$k_{0.95}=1.96\approx 2$。这时的展伸不确定度为

$$u_{0.95}=[(t_{0.95}u_A)^2+(k_{0.95}u_B)^2]^{1/2} \qquad (01\text{-}19b)$$

在大学物理实验中，为简化计算，以后我们统一采用式（01-19a）计算不确定度，因而相应的置信概率为 P=0.683。

1.5.3 不确定度的计算

1. 直接测量量的不确定度计算过程

（1）单次测量时，大体有三种情况。

① 仪器精度较低，随机误差很小，多次测量读数相同，不必进行多次测量。

② 对测量的准确程度要求不高，只测一次就够了。

③ 因测量条件的限制，不可能多次重复测量。

单次测量的结果也应以不确定度表示测量结果。这时 u 常用仪器的最大允差$\Delta_{仪}$表示。

（2）多次测量时，不确定度的计算过程如下。

① 求测量数据的算术平均值：

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$$

② 修正已知的系统误差，得到测量值（如螺旋测微器必须消除零误差）。

③ 计算平均值标准差 $S_{\bar{x}}$。

④ 求 A 类不确定度分量 u_A：

$$u_A=t_{p(n-1)}S_{\bar{x}}(P=0.683)$$

⑤ 根据仪器标定的最大允差确定 $u_B=\sigma_{仪}$。

⑥ 由 u_A、u_B 合成不确定度：

$$u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}$$

⑦ 给出测量结果：

$$x = \bar{x} \pm u$$

2. 间接测量量不确定度计算过程

用间接测量不确定度表示结果的计算过程如下。

（1）先写出（或求出）各直接测量量的不确定度。

（2）依据 $N = F(x, y, z, \cdots)$ 的关系求出 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdots$，或 $\dfrac{\partial \ln F}{\partial x}$，$\dfrac{\partial \ln F}{\partial y}\cdots$。

（3）用 $u = \sqrt{(\dfrac{\partial F}{\partial x})^2 (u_x)^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial y})^2 (u_y)^2 + \cdots}$，

或 $u_r = \dfrac{u_N}{\bar{N}} = \sqrt{(\dfrac{\partial \ln F}{\partial x})^2 (u_x)^2 + (\dfrac{\partial \ln F}{\partial y})^2 (u_y)^2 + \cdots}$ 求出 u 和 u_r。

（4）亦可用传递公式直接用各直接测量量不确定度进行计算（见表 01-4）。

（5）给出实验结果 $\begin{cases} N = \bar{N} \pm u \\ u_r = \dfrac{u}{\bar{N}} \times 100\% \end{cases}$，$\bar{N} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \cdots)$。

1.5.4　不确定度与误差的关系

不确定度和误差是两个不同的概念，它们有着根本的区别，但又是相互联系的。不确定度和误差都是由测量过程的不完善引起的，而且不确定度概念和体系是在现代误差理论的基础上建立和发展起来的。如前所述，根据传统误差的定义，由于真值一般无从得知，则测量误差一般也是未知的，是不能准确得知的，误差是一个理想的概念。不确定度则是表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度，反映了可能存在的误差分布范围，表征被测量的真值所处的量值范围的评定，所以不确定度能更准确地用于测量结果的表示。

应当指出，不确定度概念的引入并不意味着“误差”一词需放弃使用。实际上，误差仍可用于定性地描述理论和概念的场合。我们没有必要将误差理论改为不确定度理论，或将误差源改为不确定度源。某些术语，如误差分析和不确定度分析等都是可以并存的，可以保留原来的名称，而在具体计算和表示计算结果时，应改为不确定度。总之，凡是涉及具体数值的场合均应使用不确定度来代替误差，以避免出现将已知值赋予未知量的矛盾。

1.6　有效数字及其运算

1.6.1　有效数字

任何一个物理量，其测量结果既然都包含误差，那么该物理量数值的尾数不应该任意取舍，要由不确定度来决定，即测量值的末位数与不确定度的末位数对齐。如前述砝码质量 m＝145.02±0.03(g)中，实际值在 144.99-145.05(g)范围内，这里前四位是可靠数字，后一位是反映误差的存疑数字。

可靠数字和存疑数字合起来统称为有效数字。它用于正确地表示实验结果。在上述例子中 m 有五位有效数字。

有效数字的位数与小数点的位置无关，如 1.23 与 123 都是三位有效数字。关于“0”是不是有效数字的问题，可以这样来判别：从左往右数，以第一个不为零的数字为起点，它左边的“0”

不是有效数字，它右边的“0”是有效数字。例如，0.0123 是三位有效数字，0.01230 是四位有效数字。作为有效数字的“0”，不可以省略不写。例如，不能将 1.3500 cm 写作 1.35 cm，因为它们的准确程度是不同的。

有效数字位数的多少，大致反映不确定度的大小。有效数字位数越多，则不确定度越小，测量结果的准确度越高。

有效数字尾数的舍入规则如下。

（1）若舍去部分的数值小于所保留的末位数单位的 1/2，末位数不变。

（2）若舍去部分的数值大于保留的末位数单位的 1/2，末位数加 1。

（3）若舍去部分的数值恰好等于保留的末位数单位的 1/2，当末位数为偶数时，保持不变；为奇数时，末位数加 1。

例如，4.32749→4.327　　4.32751→4.328　　4.32750→4.328　　4.32850→4.328

通俗地说有效数字尾数的舍入规则是“四舍六入，五凑偶”。

1.6.2 有效数字书写规则

测量结果的有效数字位数由不确定度来确定。由于不确定度本身只是一个估计值，一般情况下，不确定度的有效数字位数只取一到两位，当首位数字等于或大于 3 时，取一位；首位数字小于 3 时，则取两位，其后面的数字采用进位法舍去。测量值的末位须与不确定度的末位取齐。例如，$L=(1.00\pm0.02)$ cm。一次直接测量结果的有效数字，由仪器极限误差或估计的不确定度来确定。多次直接测量算术平均值的有效数字，由计算得到平均值的不确定度来确定。间接测量结果的有效数字，也是先算出结果的不确定度，再由不确定度来确定。

当数值很大或很小时，用科学计数法来表示。例如，某年我国人口为七亿五千万，极限误差为二千万，就应写作：$(7.5\pm0.2)\times10^4$ 万，其中(7.5 ± 0.2)表明有效数字和不确定度，10^4 万表示单位；又如，把(0.00062 ± 0.000003) m 写作$(6.23\pm0.03)\times10^{-4}$ m，看起来就简洁醒目了。

1.6.3 有效数字的运算规则

在有效数字运算过程中，为了不致因运算而引进“误差”或损失有效位数，影响测量结果的精度，统一规定有效数字的近似运算规则如下。

（1）数量相加（或相减）时，其和（或差）数在小数点后所应保留的位数与该数中小数点后位数最少的一个相同。

例如：

$$\begin{array}{r} 20.1 \\ +)\ \ 4.178 \\ \hline 24.278 \end{array} \quad \rightarrow 24.3$$

（2）数量相乘（或除）后保留的有效数字，只须与该因子中有效数字最少的一个相同。

例如：

$$\begin{array}{r} 4.178 \\ \times)\ \ 10.1 \\ \hline 4178 \\ \underline{4178} \\ 42.1978 \end{array} \quad \rightarrow 42.2$$

（3）乘方与开方的有效数字与其底的有效数字位数相同。

（4）一般来说，函数运算的位数应根据误差分析来确定。在物理实验中，为了简便和统一，对常用的对数函数、指数函数和三角函数作如下规定：

对数函数运算后的尾数取得与真数的位数相同。例如：

$$\lg 1.938=0.2973$$

$$g1983=3+\lg 1.938=3.2973$$

指数函数运算后的有效数字的位数可与指数的小数点后的位数相同(包括紧接小数点后的零)。

例如，$10^{6.25}=1.78\times10^{6}$　　$10^{0.0035}=1.008$

三角函数的取位随弧度的有效数字而定。

例如，$\sin 30°00'=0.5000$　　$\cos 20°16'=0.9381$

（5）在运算过程中，我们可能碰到一种特定的数，它们称为正确数。例如，将半径化为直径 $d=2r$ 时出现的倍数 2，它不是由测量得来的。还有实验测量次数 n，它总是正整数，没有可疑部分。正确数不适用有效数字的运算规则，只需由其他测量值的有效数字的多少来决定运算结果的有效数字。

（6）在运算过程中，我们还可能碰到一些常数，如 π、g 之类，一般我们取这些常数与测量的有效数字的位数相同。例如，圆周长 $l=2\pi R$，当 $R=2.356$ mm 时，此时 π 应取 3.142。

有效数字的位数多寡决定于测量仪器，而不决定于运算过程。因此，选择计算工具时，应使其所给出的位数不少于应有的有效位数，否则将使测量结果精度降低，这是不允许的。相反，通过计算工具随意扩大测量结果的有效位数也是错误的，不要认为算出结果的位数越多越好。

【例 1】采用感量为 0.1g 的物理天平称量某物体的质量，其读数值为 35.41g，求物体质量的测量结果。

【解】采用物理天平称物体的质量，重复测量读数值往往相同，故一般只需进行单次测量即可。单次测量的读数即为近似真实值，$m=35.41$g。

物理天平的“示值误差”通常取感量的一半，并且作为仪器误差，即

$$\sigma_{仪}=0.05\text{（g）}$$

测量结果为

$$m=35.41\pm0.05\text{（g）}$$

在此例中，因为是单次测量（$n=1$），合成不确定度 $u_c=\sqrt{u_A^2+\sigma_B^2}$ 中的 $u_A=0$，所以 $u_c=\sigma_B$，即单次测量的合成不确定度等于非统计不确定度。但是这个结论并不表明单次测量的 u_c 就小，因为 $n=1$ 时，S_x 发散。其随机分布特征是客观存在的，测量次数 n 越大，置信概率就越高，因而测量的平均值就越接近真值。

【例 2】用外径千分尺测量小钢球的直径，五次的测量值分别为

$$d\text{（mm）}=11.922, 11.923, 11.922, 11.922, 11.922$$

外径千分尺的最小分度数值为 0.01mm 试写出测量结果的标准式。

【解】（1）求直径 d 的算术平均值

$$\bar{d}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{5}d_i=\frac{1}{5}(11.922+11.923+11.922+11.922+11.922)$$

$$=11.922(\text{mm})$$

（2）计算 B 类不确定度

外径千分尺的仪器误差为 $\Delta_{仪}=0.004$（mm）

$$\sigma_B=\frac{\Delta_{仪}}{3}\approx0.002\text{mm}$$

（3）计算 A 类不确定度

$$S_d=\sqrt{\frac{\sum_1^5\left(d_i-\overline{d}\right)^2}{n-1}}$$
$$=\sqrt{\frac{\left(11.922-11.922\right)^2+\left(11.923-11.922\right)^2+\cdots}{5-1}}$$
$$=0.0005\left(\mathrm{mm}\right)$$

$$S_{\bar{d}}=\frac{S_d}{\sqrt{n}}=0.00024(\mathrm{mm})$$

$$u_A=t_{0.683(n-1)}S_{\bar{d}}=1.14\times0.00024=0.00028$$

（4）合成不确定度

由于 $0.00028<\frac{1}{3}\times0.002$，故可略去 u_A，于是

$$u_c=0.002\ (\mathrm{mm})$$

（5）测量结果为

$$d=\overline{d}\pm u_c=11.922\pm0.002\left(\mathrm{mm}\right)$$

从上例中可以看出，当有些不确定度分量的数值很小时，相对而言可以略去不计。在计算合成不确定度中求“方和根”时，若某一平方值小于另一平方值的 $\frac{1}{9}$，则这一项就可以略去不计。这一结论称为微小误差准则。在进行数据处理时，利用微小误差准则可减少不必要的计算。不确定度的计算结果，一般应保留一位有效数字，多余的位数按有效数字的修约原则进行取舍。

【例 3】已知电阻 $R_1=50.2\pm0.5$（Ω），$R_2=149.8\pm0.5$（Ω），求它们串联的电阻 R 和合成不确定度 u_R。

【解】串联电阻的阻值为

$$R=R_1+R_2=50.2+149.8=200.0\ (\Omega)$$

合成不确定度

$$u_R=\sqrt{\sum_1^2\left(\frac{\partial R}{\partial R_i}u_{Ri}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}u_1\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial R_2}u_2\right)^2}$$
$$=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=\sqrt{0.5^2+0.5^2}=0.7(\Omega)$$

测量结果为

$$R=200.0\pm0.7\ (\Omega)$$

在此例中，由于 $\frac{\partial R}{\partial R_1}=1,\frac{\partial R}{\partial R_2}=1,$ R 的总合成不确定度为各个直接观测量的不确定度平方求和后再开方。

【例 4】测量金属环的内径 $D_1=2.880\pm0.004$（cm），外径 $D_2=3.600\pm0.004$（cm），厚度 h=2.575±0.004（cm）。试求环的体积 V 和测量结果。

【解】环体积公式为

$$V=\frac{\pi}{4}h(D_2^2-D_1^2)$$

（1）环体积的近似真实值为

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{4}h(D_2^2-D_1^2)\\&=\frac{3.1416}{4}\times 2.575\times(3.600^2-2.880^2)=9.436(\mathrm{cm}^3)\end{aligned}$$

（2）首先将环体积公式两边同时取自然对数后，再求全微分

$$\ln V=\ln(\frac{\pi}{4})+\ln h+\ln(D_2^2-D_1^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=0+\frac{\mathrm{d}h}{h}+\frac{2D_2\mathrm{d}D_2-2D_1\mathrm{d}D_1}{D_2^2-D_1^2}$$

则相对不确定度为

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{V}}=\frac{u_{\mathrm{V}}}{V}&=\sqrt{(\frac{u_{\mathrm{h}}}{h})^2+(\frac{2D_2u_{D_2}}{D_2^2-D_1^2})^2+(\frac{-2D_1u_{D_1}}{D_2^2-D_1^2})^2}\\&=\left[(\frac{0.004}{2.575})^2+(\frac{2\times3.600\times0.004}{3.600^2-2.880^2})^2+(\frac{-2\times2.880\times0.004}{3.600^2-2.880^2})^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&=0.0081=0.81\%\end{aligned}$$

（3）总合成不确定度为

$$u_{\mathrm{V}}=V\cdot E_{\mathrm{V}}=9.436\times0.0081=0.08(\mathrm{cm}^3)$$

（4）环体积的测量结果为

$$V=9.44\pm0.08\,(\mathrm{cm}^3)$$

V 的标准式 V=9.436cm^3 中，应与不确定度的位数取齐，因此将小数点后的第三位数 6，按照数字修约原则进到百分位，故为 9.44cm^3。

1.7　实验数据处理

处理实验数据的目的在于，通过必要的整理分析和归纳计算，得到实验的结论。

1.7.1　列表法

对一个物理量进行多次测量，或者测量几个量之间的函数关系，往往借助于列表法把实验数据列成表格。列表法的优点是使大量数据表达清晰醒目、有条理、易于核查和发现问题，避免差错，同时有助于反映出物理量之间的相互关系和规律。所以，设计一个简明醒目、合理美观的数据表格，是每一个学生都要掌握的基本技能。

列表没有统一的格式，但所设计的表格能够充分反映上述优点，一般应注意以下几点。

（1）首先要写明数据表格的名称，必要时还应提供有关参数。例如，所引用的物理常数、实验时的环境参数（温度、湿度、大气压等）、测量仪器的误差等。

（2）各栏目均应注明所记录的物理量的名称（符号）和单位，单位及量值的数量级写在标题

栏中，不要重复记在各个数值上。

（3）栏目的顺序应充分注意数据间的联系和计算顺序，力求简明、齐全、有条理。

（4）表中的原始测量数据应正确反映有效数字，数据不应随便涂改，确实要修改数据时，应将原来数据画条杠以备随时查验。

（5）对于函数关系的数据表格，应按自变量由小到大或由大到小的顺序排列，以便于判断和处理。

实验数据表格中除了原始测量数据外，还应包括有关计算结果（包括一些中间计算结果），如平均值、误差或不确定度等。

1.7.2　作图法

1．作图法的作用和优点

作图法是一种被广泛用来处理实验数据的方法，它能直观地揭示出物理量之间的规律。特别是在还没有完全掌握一些科学实验的规律和结果或还没有找出适当函数表达式时，用作实验曲线的方法来表示实验结果之间的函数关系，常常是一种很重要的方法。

作图法的目的是揭示和研究物理量之间的变化规律，找出对应的函数关系，求取经验公式或求出实验的某些结果。如直线方程 $y = mx + b$，就可根据曲线斜率求出 m 值，从曲线截距获取 b 值。此外，还可以从曲线上直接读取没有进行测量的对应于某 x 的 y 值（内插法），在一定条件下也可以从曲线延伸部分读出原测量数据范围以外的量值（外推法）。实验曲线还可以帮助发现实验中个别的测量错误。当被测量的函数为非线性关系时，一般求值较困难，而且也很难从曲线中判断结果是否正确，用作图法可以进行置换变数处理，如 $PV = C$，可将 $P \sim V$ 图线改为 $P \sim 1/V$ 图线，如图 01-2 所示。

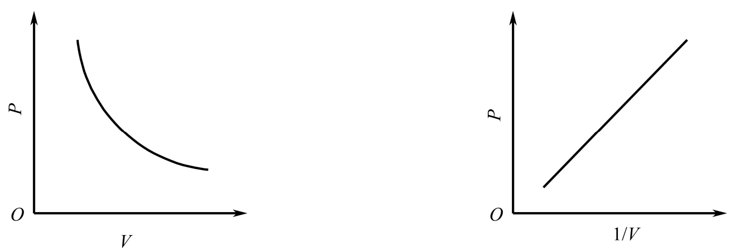

图 01-2　曲线改直线示意图

2．作图规则

（1）选用坐标纸。根据作图参量的性质，选用毫米直角坐标纸、双对数坐标纸、单对数坐标纸或其他坐标纸等。坐标纸的大小应根据测得数据的大小、有效数字多少及结果的需要来定。

（2）坐标轴的比例与标度。一般以横轴代表自变量，纵轴代表因变量。在坐标纸的左下方画两条粗细适当的线表示纵轴和横轴，在轴的末端近旁标明所代表的物理量及其单位。要适当选取横轴和纵轴的比例和坐标的起点，使曲线居中，并布满图纸的 70%～80%。标度时注意做到以下几点。

① 图上实验点的坐标读数的有效数字位数不能少于实验数据的有效数字位数。例如，对于直接测量的物理量，轴上最小格的标度不能大于测量仪器的最小刻度。

② 标度的选择应使图线显示其特点，标度应划分得当，以不用计算就能直接读出图线上每一点的坐标为宜。故通常用 1、2、5，而不选用 3、7、9 来标度。

③ 横轴和纵轴的标度可以不同，或者两轴的交点不为零以便调整图线的大小和位置。

④ 如果数据特别大或特别小，可以提出乘积因子，如提出$\times 10^{3}$ 或$\times 10^{-2}$，放在坐标轴物理量单位符号前面。

（3）曲线的标点与连线。用削尖的硬铅笔以小“＋”字标在坐标纸上，标出各测量数据点的坐标，要使与各测量数据对应的坐标准确地落在小“＋”字的交点上。当一张图上要画几条曲线时，每条曲线可采用不同的标记，如“×”、“⊙”、“◬”、“⊡”等以示区别。连线时要用直尺或曲线板等作图工具，根据不同情况，把数据点连成直线或光滑曲线。曲线并不一定要通过所有的点，而要求画一条代表性的光滑曲线，要求曲线两旁偏差点有较均匀的分布。在画曲线时，发现个别偏离过大的数据点，应当舍去并进行分析或重新测量核对。校准曲线要通过校准点，连成折线。

（4）标写图名。一般在图纸上部附近空旷位置写出简洁完整的图名，下部标明班级、姓名和日期。

1.7.3　逐差法

由于随机误差具有抵偿性，对于多次测量的结果，常用平均值来估计最佳值，以消除随机误差的影响。但是，当自变量与因变量呈线性关系时，对于自变量等间距变化的多次测量，如果用求差平均的方法计算因变量的平均增量，就会使中间测量数据两两抵消，失去利用多次测量求平均的意义。例如，在拉伸法测杨氏模量的实验中，当荷重均匀增加时，标尺位置读数依次为$x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9$，如果求相邻位置改变的平均值有

$$\begin{aligned}\overline{\Delta x}&=\frac{1}{9}\left[\left(x_9-x_8\right)+\left(x_8-x_7\right)+\left(x_7-x_6\right)+\left(x_6-x_5\right)+\ldots+\left(x_1-x_0\right)\right]\\&=\frac{1}{9}\left[x_9-x_0\right]\end{aligned}\tag{01-20}$$

即中间的测量数据对$\overline{\Delta x}$的计算值不起作用。为了避免这种情况下中间数据的损失，可以用逐差法处理数据。

逐差法是物理实验中常用的一种数据处理方法，特别是当自变量与因变量呈线性关系，而且自变量为等间距变化时，更有其独特的特点。

逐差法的优点在于可以充分利用实验中测量采集的数据，达到对数据取平均（即保持多次测量的优越性，减少偶然误差）的效果，而且还可以最大限度地保证不损失有效数字、减少相对误差。

逐差法是将测量得到的数据按自变量的大小顺序排列后平分为前后两组，先求出两组中对应项的差值（即求逐差），然后取其平均值。例如，对上述杨氏模量实验中的 10 个数据的逐差法处理为：

（1）将数据分为两组

Ⅰ组：x_0,x_1,x_2,x_3,x_4；

Ⅱ组：x_5,x_6,x_7,x_8,x_9。

（2）求逐差：x_5-x_0，x_6-x_1，x_7-x_2，x_8-x_3，x_9-x_4

（3）求逐差平均：$\overline{\Delta x'}=\dfrac{1}{5}\left[\left(x_5-x_0\right)+\ldots+\left(x_9-x_4\right)\right]$

1.7.4　最小二乘法

用图解法处理数据时，根据标在图上的实验点描绘实验曲线带有一定的主观随意性，因而人工拟合的实验曲线往往不是最佳的。一组实验结果的最佳拟合曲线常用最小二乘法进行拟合。这