第3章 发射系统

本章将详细定义和阐述发射机的各项技术指标，并将说明该如何实现、计算和测量这些指标。

处理现代数字发射系统时，必须特别关注 RF(射频)功率放大器(PA)的设计。功率放大器的效率、输出功率以及最重要的线性度通常构成了在各个国家获取运行许可证的强制法规条件。事实上，即使大多数发射机技术指标不把功率放大器列入，对它也有许多限制因素，而且功率放大器通常决定了发射机的总体结构。这就是我们特别关注功率放大器的原因。

- 高效率对于便携式设备的电池寿命和散热至关重要。
- 输出功率直接确定了地理覆盖范围。
- 线性度不仅是数据传输速率的一个限制因素，而且对将发射的射频信号限制在一个预定的频谱范围内至关重要，可限制对附近接收机的干扰。

事实上，现代蜂窝系统的总容量(拥挤)性能主要受到系统“载噪比”(C/I)的限制，反过来“载噪比”又受到用户功率放大器线性度的严重影响。

如果频谱效率并不会构成主要问题，可以使用非线性放大器，与恒定包络调制方案一起，例如 GMSK(用于 GSM 系统)。但是，随着频谱效率、管理和共存变得越来越关键，需要采用可变包络多电平多载波调制方法，例如与正交频分复用(OFDM)组合的正交调幅(QAM)。

利用现代高速信号处理器件，可采用高密度调制方案，从而在严重的多径条件下带来频谱效率突破。但是，这些方案的应用需要实现功率放大器的线性化，功率放大器线性化方法通常要使用涉及整个发射链路的复杂算法。反过来，线性化方法的有效性在很大程度上取决于功率放大器本身的“起点”性能。

线性化、功率和效率是相互冲突的要求，有时很难在这些要求之间达成令人满意的平衡。例如，“A类”功率放大器具有较好的线性度(Clarke和Hess，1978年)，但是需要RF功放电源单独给负载提供一个较大的直流(DC)偏置电流，因此其能源效率非常低，尤其是在放大后的信号具有较高的峰均功率比(PAPR)时。因此，很多线性放大器都使用“AB类”器件，其线性度没那么好。更糟糕的是，“勉强满足的”AB类器件在很多宽带应用中都出现了太多失真。

在接下来的讨论中，我们分析了 PA 设计中的重要概念和技术指标，并且强调了几项技术，既能输出较强的 RF 功率的同时又能保持整个发射链路良好的线性特性。

3.1 峰均功率比(PAPR)

正如前面所指，因为需要在特定带宽中传输更多数据，提高频谱效率的同时仍然能够保持

无线系统中处理多径延迟扩展的能力，所以提出采用密集星座映射的复杂调制方案。不幸的是，这些方案产生的信号包络显示出较高的峰均功率比。

例如，对于使用了具有 52 个载波的 OFDM/QAM 组合调制方案的 801.11a WLAN 系统，PAPR 为 10dB 左右。使用π/4 DQPSK 调制的低速窄带 TETRA(陆地集群无线电)标准，PAPR 为 2dB 左右。

因为峰值功率受到功率放大器的饱和电平限制，所以 PAPR 越高，平均功率就越低，因此传输距离就越短。

用 P_{Peak} 表示给定系统中出现的瞬时发射功率的最高可能值，用 P_{Avg} 表示一段较长的时间段内发射功率的平均值(最理想的情况是无限长时间)。PAPR 定义为：

$$\mathrm{PAPR}=\frac{P_{Peak}}{P_{Avg}} \tag{3.1}$$

通常用 dB 表示它的单位。

3.1.1 计算准静态射频信号的 PAPR

为了简单起见，使用了以下定义：准静态射频信号是一个调制载波，其中心频率通常要比调制信号(基带)的带宽高得多。

在实际的应用环境中，上述定义等同于“窄带”的定义，而“窄带”的定义更具有限制性，因为它意味着中心频率比已调信号的带宽要高得多(以载波频率为中心)。

除了少数几种特殊的方案(本书未提及)，例如超宽带调制(UWB)，大多数 RF 信号包括被称作“宽带”的射频信号，均属于准静态类型。

考虑 1.2.1.2 节所述的广义形式(实数)射频信号：

$$S(t)=v(t)\cos[\omega t+\theta(t)],\quad -\infty<v(t)<\infty,\quad \theta(t)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.2}$$

分别用 B_v 和 B_θ 表示 $v(t)$和$\theta(t)$的带宽，用 B 表示两者之间的最大值，准静态条件意味着：

$$\omega>>2\pi B，B=\max\{B_v, B_\theta\} \tag{3.3}$$

$[t_0, t_0+T]$时间段内在 1Ω电阻上的平均功率 $S(t)$表示为：

$$\begin{aligned}P_{Avg}&=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}S^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}v^2(t)\cos^2[\omega t+\theta(t)]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2T}\left\{\int_{t_0}^{t_0+T}v^2(t)\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_0+T}v^2(t)\cos[2\omega t+2\theta(t)]\mathrm{d}t\right\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

如果 $v(t)$是一个连续函数，并且取ωT>>1，那么得到一个非常普遍的结果，被称为“Riemann-Lebesgue 引理”(Bender 和 Orszag，1978 年)，证明忽略了式(3.4)中的最后一个积分。

在准静态情况下，如果取 $T\geqslant 1/B$，则按照式(3.3)，$\omega T\geqslant\omega/B$>>1，因此可以将式(3.4)近似为如下形式：

$$P_{Avg} \approx \frac{1}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t)\mathrm{d}t \approx \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t)\mathrm{d}t \tag{3.5}$$

Riemann-Lebesgue 引理的解释如下：如果慢变函数 $x(t)$乘以快速振荡正弦函数 $\sin(\omega t)$，则 $x(t)$的值在一个振荡周期内几乎恒定。因此，求一个振荡周期内 $\sin(\omega t)$的积分结果近似为零。由此推断，式(3.4)中最后一个积分的大小最多等于半个周期内求积分得到的值，因此，如果正弦曲线的周期变得非常短，那么积分的值接近于零。

在准静态设置中，t_p 时的“瞬时”功率定义为$[t_p,\ t_p+\tau]$时间段内的平均值功率，从而得出 $2\pi/\omega \ll \tau \ll 1/B$。

在这一时间段内，$v(t)$和$\theta(t)$大致恒定不变，而 $S(t)$几乎等于纯正弦曲线，即：

$$S(t)= v(t_p)\cos[\omega t+\theta(t_p)] \qquad t\in[t_p, t_p+\tau], \{t_p, t_p+\tau\}\in[t_0, t_0+T] \tag{3.6}$$

那么，$[t_0, t_0+T]$时间段内在 1Ω电阻器前后建立的“峰值”瞬时功率 P_{Peak} 就是所有可能的时间段$[t_p, t_p+\tau]$内获得的最大平均功率值，即：

$$\begin{aligned} P_{Peak} &= \max_{t_p}\frac{1}{\tau}\int_{t_p}^{t_p+\tau} S^2(t)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{\tau}\max_{t_p}\left\{v^2(t_p)\int_{t_p}^{t_p+\tau}\cos^2[\omega t+\theta(t_p)]\mathrm{d}t\right\} \\ &= \max_{t_p}\left\{\frac{1}{2}v^2(t_p)+\frac{1}{2\tau}v^2(t_p)\int_{t_p}^{t_p+\tau}\cos[2\omega t+2\theta(t)]\mathrm{d}t\right\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

因为 $2\pi/\omega \ll \tau$，所以$\omega\tau \gg 1$，并且按照 Riemann-Lebesgue 引理，可以判断最后一个积分可以忽略不计，因此，可以将式(3.7)近似为如下形式：

$$P_{Peak} \approx \frac{1}{2}\max_{t\in[t_0,\,t_0+T]} v^2(t) \tag{3.8}$$

最后，采用式(3.5)和式(3.8)，式(3.1)得出：

$$\mathrm{PAPR} = \frac{P_{Peak}}{P_{Avg}} = T\max_{t\in[t_0,\,t_0+T]}\left\{v^2(t)\right\}\Big/\int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t)\mathrm{d}t \tag{3.9}$$

用数学语言，我们自然地按照信号的范数，即无穷范数和 2-范数定义 PAPR：

$$\|v\|_2 = \left(\int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|v\|_\infty = \sup_{t\in[t_0,\,t_0+T]}|v(t)| \tag{3.10}$$

可得到有意义的结果：

$$\mathrm{PAPR} = T\left(\|v\|_\infty/\|v\|_2\right)^2 \tag{3.11}$$

从现在开始，若不特别说明，假设所有的信号都是准静态的。

示例：考虑信号 $S(t)$包括 N 个未调制载波$\{S_n(t)\}$之和，每个载波都包括下列形式：

$$S_n(t) = V_n\cos(\omega_n t+\theta_n), \qquad |V_n|>0, \quad n=1,2,\cdots,N \tag{3.12}$$

假设频率ω_n 足够高，并且间距足够长，使其处于前述周期 T 和τ之间的范围内，它们满足：

$$\omega_n\tau \gg 1, \qquad |\omega_n-\omega_m|\tau \gg 1, \quad n\neq m \tag{3.13}$$

复合信号的形式为：

$$S(t)=\sum_{n=1}^{N}S_n(t)=\sum_{n=1}^{N}V_n\cos(\omega_n t+\theta_n) \tag{3.14}$$

所以复合信号的平均功率为：

$$\begin{aligned}P_{Avg}&=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[\sum_{n=1}^{N}S_n(t)\right]^2\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\left[\int_{t_0}^{t_0+T}\sum_{n=1}^{N}S_n^2(t)\mathrm{d}t+2\int_{t_0}^{t_0+T}\sum_{n\neq m}S_n(t)\cdot S_m(t)\mathrm{d}t\right]\end{aligned} \tag{3.15}$$

并且其峰值功率为：

$$P_{Peak}=\max_{t_p}\frac{1}{\tau}\int_{t_p}^{t_p+\tau}\left[\sum_{n=1}^{N}S_n(t)\right]^2\mathrm{d}t \tag{3.16}$$

留给读者来证明，采用式(3.13)并且在 Riemann-Lebesgue 引理的帮助下，式(3.15)可近似为如下形式：

$$P_{Avg}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}V_n^2 \tag{3.17}$$

并且式(3.16)被限制为：

$$P_{Peak}\leqslant\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{N}V_n\right]^2 \tag{3.18}$$

如果载波的幅值都相同，即 $V_n=V$，$n=1, 2,\cdots,N$，那么峰值对平均功率比约束为：

$$\mathrm{PAPR}\leqslant N \tag{3.19}$$

注意：以上结果不能提供包络随时间的变化过程以及峰值功率出现的频率。

在特定场景中，可以计算包络的概率分布函数(PDF)，从而提供峰值出现概率的信息。根据 PDF，可以设计有效的“裁剪算法”。

可以假定，如果较高峰值出现概率很低，则可以(在一定程度上)裁去较高峰值，得到中等的等效噪声功率，使系统整体性能的降低在可接受范围内，这样可有效降低 PAPR。

例如，在 801.11a WLAN 标准中使用 52 个载波、BPSK 调制，PAPR 的上界为 10log(52) ≈17dB。尽管如此，如果使用的功率放大器在裁剪前仅可处理 10dB 的 PAPR，结果表明系统的性能仍然良好。原因是平均值以上超过 10dB 的峰值出现时间低于 1%，所以它们可以“裁去”，其后果影响甚微。对包络统计和裁剪策略进行深入的分析超过了本书的范围，我们为对这个主题感兴趣的读者，推荐了大量的参考文献(van Nee 和 de Wild，1998 年)。正如前文所指，因为平均发射功率最终确定系统性能的指标，最好是尽可能降低 PAPR。已经使用了几项技术来完成这项任务：

- 最简单的方法是“硬裁剪”机制：硬生生地裁去高出预定电平的所有瞬时峰值。如果峰值的出现很少，裁剪只会给已发射的信号带来很小的失真。在相应的接收机处检测被裁剪的信号时，这个小失真不会使误码率(BER)明显降低，但是由失真导致的等效噪声产生了干扰，被称为“相邻信道功率比”(ACPR)，大大增加了扩展到相邻通道的杂

散能量电平。在发射机距离较近处，如果邻近接收机检测到的上述杂散能量变得比热噪声大，那么在限制噪声情况下就会降低它们的灵敏度并且导致严重的系统性能下降。因此，硬裁剪没有被广泛使用。而是设计了几种算法，在基带部分采用信号处理技术对信号进行逐步的“软裁剪”。

- 采用π/4-DQPSK 等差分调制方案，提供了一种降低 PAPR 的有效方法。其核心思想是对比特流进行编码，避免在从一个符号转换成另一个符号的过程中，复平面路径中出现穿越零点，从而缩小基带信号的动态范围。
- 基带“峰值开窗”是另一种常用的方法。此处，高出预定电平的所有峰值都乘以一个平滑窗口，例如高斯窗口、汉明窗口、凯泽窗口等。峰值开窗以稍微降低误码率和相邻信道功率比为代价，合理地改进了 PAPR。
- 在符号级别还使用了扰频器和编码，例如流行的格雷码，旨在降低符号序列产生高峰值的概率。

3.1.2 PAPR 的测量

测量 PAPR 的实验室装置如图 3.1 所示。很多现代功率计都能够测量综合基带调制产生的 RF 信号的峰值功率、平均功率和累积分布函数(CDF)。为了获得足够高的测量准确度并且保护功率计不受损坏，有必要采取下列步骤：

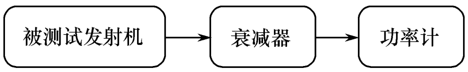

图 3.1 数字调制的灵敏度测量

- 采用与调制方案类似的调制方法并且已知其特性的信号来校准功率计。
- 仔细验证功率传感器能够处理的最大峰值和平均功率，相应地调节衰减器。
  — 如果衰减电平太低，功率传感器可能受损。
  — 如果衰减电平太高，可测量的动态范围可能不足。
- 设置好衰减器后，在相关的频带内，记录整个组合的插入损耗，包括电缆、连接器和衰减器。
- 记录的插入损耗应该是用于校准功率计的基准电平的数字。

根据峰值和平均功率测量的结果，采用式(3.1)计算 PAPR。

3.2 非线性度对射频功率放大器的影响

所有射频功率放大器都有一定的非线性，导致对式(3.2)的窄带射频信号产生了双重影响：

- 因瞬时信号 $S(t)$失真导致的包络 $A(t)$失真，被称为“AM 到 AM 的转换”；
- 因瞬时信号 $S(t)$失真导致的相位$\theta(t)$失真，被称为“AM 到 PM 的转换”。

在数字调制方案中，这样的失真严重影响了符号错误率，并且使已发射的信号产生频谱扩展，导致临近信道受到干扰。

在振幅方面很容易理解影响功率放大器线性度的机理，但是如果涉及相位，进行分析时就很复杂且很困难，这两种机理都取决于特定的功率放大器技术。尽管如此，正如接下来要说明的，我们能够了解一些有关它们的联合数学表达式。

3.2.1 功率放大器非线性度分析模型

下面以 Heiter(1973 年)描述的简单、分析方便的方法作为开始。射频功率放大器的输入由式(3.2)中的窄带信号 $S(t)$构成。因为与中心频率ω相比，$S(t)$的调制是准静态的，为了进行谐波分析，虽然瞬时相位ωt 发挥了作用，但是 $v(t)$和$\theta(t)$仍被看作是常数。

非线性功率放大器的输出 $S_{out}(t)$可以通过式(3.20)中改进的 McLaurin 级数均取近似值，包括取决于阶数的时延。换句话说，假设信号在经历了 τ_n 延时之后表现出 n 阶的非线性度：

$$\begin{aligned} S_{out}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(S\left(t-\tau_n\right)\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(v\cos\left[\omega t+\theta-\omega\tau_n\right]\right)^n, \qquad a_1 = 1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

设定$\varphi_n = \omega\tau_n$ 并且取φ_1 作为参考相位，可以任意地设定$\varphi_1 \equiv 0$，所以式(3.20)采用了如下形式：

$$S_{out}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(v\cos\left[\omega t+\theta+\varphi_n\right]\right)^n, \qquad \varphi_1 = 0, \quad a_1 = 1 \tag{3.21}$$

因为 $S_{out}(t)$的所有各次谐波都在到达天线之前被滤波，所以在式(3.21)中希望得到的就是那些ω附近的频率成分的结果，称之为“带内”分量。

为了弄清这些分量，改写欧拉公式中的 $\cos^n[\omega t+\theta+\varphi_n]$并且使用二项式展开：

$$\left(x+y\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{3.22}$$

得到：

$$\begin{aligned} S_{out}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{v}{2}\right)^n \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t+\theta+\varphi_n\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega t+\theta+\varphi_n\right)}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{v}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t+\theta+\varphi_n\right)k} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega t+\theta+\varphi_n\right)(n-k)} \end{aligned} \tag{3.23}$$

只有当 $k-(n-k)=\pm 1$ 时，式(3.23)才会得出带内分量。

由此推断只有 $n \pm 1 = 2k$ 等整数才会被关注，因此 n 必须是奇数：

$$n = 2m+1, \quad k = \frac{n \pm 1}{2} = \left\{m, m+1\right\}, \quad m = 0,1,2\cdots \tag{3.24}$$

式(3.23)得出的带内信号 $S(t)$采用以下形式：

$$S(t)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}\left(\frac{v}{2}\right)^{2m+1}\left[\binom{2m+1}{m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\theta+\varphi_{2m+1})}+\binom{2m+1}{m+1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta+\varphi_{2m+1})}\right] \tag{3.25}$$

$$=v\cdot\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}\left(\frac{v}{2}\right)^{2m}\binom{2m+1}{m}\cos(\omega t+\theta+\varphi_{2m+1})$$

$$=v\cdot\sum_{m=0}^{\infty}c_m v^{2m}\cos(\omega t+\theta+\varphi_{2m+1})$$

$$=\left[v\cdot\sum_{m=0}^{\infty}c_m\cos(\varphi_{2m+1})v^{2m}\right]\cos(\omega t+\theta)-\left[v\cdot\sum_{m=0}^{\infty}c_m\sin(\varphi_{2m+1})v^{2m}\right]\sin(\omega t+\theta)$$

$$=V(v)\cos(\omega t+\theta+\tilde{\varphi}(v))$$

其中，采用了：

$$c_m=2^{-2m}a_{2m+1}\binom{2m+1}{m},\quad \binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m+1} \tag{3.26}$$

并且注意到：

$$c_0=a_1>>1 \tag{3.27}$$

是放大器的“线性电压增益”。采用 Stirling 公式(Abramovitch 和 Stegun，1970 年)，对于较大的 n：

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\,n^n\mathrm{e}^{-n},\qquad n\to\infty \tag{3.28}$$

容易证明：

$$2^{-2m}\binom{2m+1}{m}=2^{-2m}\frac{(2m)!(2m+1)}{(m!)^2(m+1)}\approx\frac{2}{\sqrt{\pi m}},\qquad m\to\infty \tag{3.29}$$

因此：

$$c_m\approx\frac{2}{\sqrt{\pi m}}a_{2m+1},\qquad m\to\infty \tag{3.30}$$

相对于精确值，图 3.2 显示了式(3.29)的近似值。

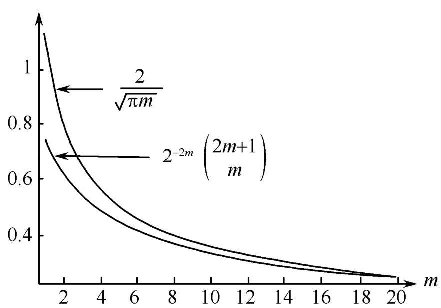

图 3.2　采用 Stirling 公式的近似法

如果功率放大器“无记忆”，即$\varphi_{2m+1}=0$，$\forall m$，则没有相位失真，并且失真后的输出振幅的形式如下：

$$V(v)=v\cdot\sum_{m=0}^{\infty}c_m v^{2m}=v\cdot f(v^2) \tag{3.31}$$

其中，$f(v^2)$表示 v^2 的函数，当 $v\to 0$ 时 $f(v^2)\to$常数。

如果器件“近似无记忆”，意味着角度$\{\varphi_{2m+1}\}$很小(通常是这种情况)，可以将式(3.25)近似为如下形式：

$$S_{IB}(t) \approx \left(v \cdot \sum_{m=0}^{\infty} c_m v^{2m}\right)\cos(\omega t+\theta) - \left(v \cdot \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varphi_{2m+1} v^{2m}\right)\sin(\omega t+\theta) \tag{3.32}$$

注意到式(3.32)是一个信号的正交表达式(见 1.2.1.2 节)，该信号的振幅大约为式(3.31)，并且附加的相位$\varphi(v)$如下：

$$\begin{aligned}\varphi(v) &\approx \arctan\left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m \varphi_{2m+1} v^{2m} \Big/ \sum_{m=0}^{\infty} c_m v^{2m}\right) \\ &\approx \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varphi_{2m+1} v^{2m} \Big/ \sum_{m=0}^{\infty} c_m v^{2m} = g(v^2)\end{aligned} \tag{3.33}$$

其中，$g(v^2)$表示 v^2 的某些函数，当 $v \to 0$ 时 $g(v^2) \to 0$。

我们可以看到，输出振幅失真和输出相位失真都仅仅是输入振幅的函数。

运用多项措施使分析模型与实验测量的数据相适应，已有一些被广泛接受。其中一个模型因为比较简单并且非常准确，所以最为常用，该模型就是“Saleh 模型”(Saleh，1981 年)，其利用了式(3.31)和式(3.33)的数学结构，如下所示：

$$\begin{aligned}V(v(t)) &= c_0 v_{sat}^2 \frac{2v(t)}{v^2(t)+v_{sat}^2} \\ \varphi(v(t)) &= \frac{\pi}{6}\frac{2v^2(t)}{v^2(t)+v_{sat}^2}\end{aligned} \tag{3.34}$$

其中，V 和φ 分别是压缩的输出幅度和附加相位，而 $v_{sat}>0$ 是“输入饱和电压”，通常是由实际测量确定的一个较为宽松的定义。后面将采用合理并且简便的方法确定 v_{sat}。

习惯将式(3.34)写成下列归一化形式：

$$\begin{aligned}r(t) &= \frac{v(t)}{v_{sat}} \\ \tilde{V}(r(t)) &\equiv \frac{V(v(t))}{c_0 v_{sat}} = \frac{2r(t)}{r^2(t)+1} \\ \tilde{\varphi}(r(t)) &\equiv \varphi(v(t)) = \frac{\pi}{6}\frac{2r^2(t)}{r^2(t)+1}\end{aligned} \tag{3.35}$$

如图 3.3 所示，其中 $c_0 v_{sat}=1$。

注意：式(3.35)蕴含着：

$$\left|\tilde{V}(r(t))\right| \leqslant 1 \tag{3.36}$$

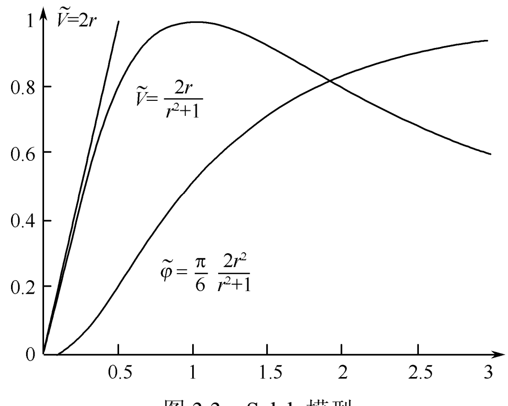

图 3.3 Saleh 模型

利用双参数公式可以得到 Saleh 模型更加一般的形式：

$$\begin{aligned}\tilde{V}(r) &= \frac{\alpha_a r}{\beta_a r^2+1} \\ \tilde{\varphi}(r) &= \frac{\alpha_\varphi r^2}{\beta_\varphi r^2+1}\end{aligned} \tag{3.37}$$

其中，α_a、β_a、α_φ、β_φ是通过测量得到的参数。

3.2.2　功率放大器非线性度对数字调制的影响

在分析发射机失真对数字调制信号星座图的影响方面人们已经做了大量的研究。简单、归一化的 Saleh 模型对定性分析数字传输中的非线性现象是很有用的。

许多著作(Lyman 和 Wang，2002 年；Yu 和 Ibnkahla，2005 年；Feng 和 Yu，2004 年)仍然将式(3.35)的简单归一化模型用于 16-QAM 进行分析(见 1.2.1.2 节)，这是最简单的调制方案，明确说明了由幅度和相位失真引起的非线性现象。接下来仍然用这种分析方法，其结果如图 3.4 所示。

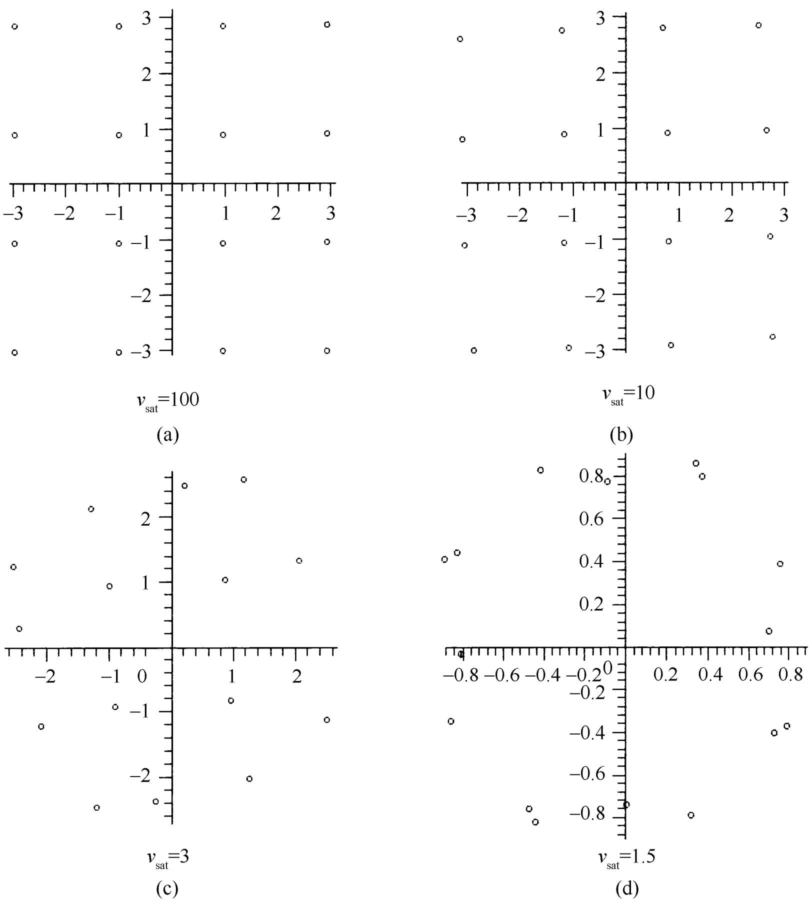

图 3.4　采用 Saleh 模型分析 16-QAM 星座图失真

参考式(3.2)，定义 v_n 和 θ_n 分别为传输符号在 t_n 时刻的幅度和相位，并定义 $r_n=v_n/v_{sat}$ 为归一化 Saleh 模型中相应的归一化幅度。

传输的符号 $\tilde{V}_n$ 在 t_n 时刻为矢量信号：

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}(r_n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_n + \tilde{\varphi}(r_n)]} \tag{3.38}$$

由式(3.35)可知，根据 r_n 的值，传输的符号将被压缩和旋转。

由此可见，具有较大幅度的传输符号比更靠近星座中心的传输符号将产生较大的失真。

图 3.4 显示出当 v_{sat}=100, 10, 3, 1.5，$v_n \in \{1, \sqrt{2}, 3, \sqrt{18}\}$ 时的 16-QAM 星座情况下，由式(3.38)计算出的幅度和相位失真的影响。

观察 v_{sat}=100 时，相应的 $r_n \leqslant (18)^{1/2}/100 \approx 0.04$，此时的星座图是无失真的，然而当 v_{sat}=3 时，$r_n \leqslant (18)^{1/2}/3 \approx 1.4$，此时外围的传输符号失真了，但是靠近中心的几乎没有变化。对于 v_{sat}=1.5 时，星座图产生的严重失真，已导致不能识别任何传输符号。

3.2.3 功率放大器非线性度对频谱形状的影响

理解和分析功率放大器的非线性对传输信号频谱的影响是很困难的，甚至连仿真都难以入手。

- 非线性放大器的“传递函数”很大程度上依赖于输入信号，因此要找到一个通用的传递函数是不可能的，对于每一个具体的情况都必须加以专门的分析。
- 功率放大器的非线性导致带宽展宽：输出信号较输入信号有更宽的带宽，这种影响通常称之为“频谱再生”。
- 对数字采样必须特别注意。由于频谱再生，对输出信号的采样率要高于输入信号的采样率。
- 在对输出信号频谱形状有一个先验(非直接)估计的基础上，对于输入信号进行过采样。

为理解频谱再生现象，做如下考虑：

(1) 给定两个时间函数 $g_1(t)$和 $g_2(t)$，并用∗代表卷积，傅里叶变换有如下性质：

$$F\left[g_1(t)\cdot g_2(t)\right](f) = \left(F[g_1] * F[g_2]\right)(f) \tag{3.39}$$

对于任意的函数 $g(t)$，定义 $g(*)^k g$ 为 $g(t)$与自身的 k 次卷积。那么，如果 $g_1(t)=g_2(t)=g(t)$，式(3.39)可写成一般形式：

$$F[g^m](f) = (F[g](*)^{m-1}F[g])(f), \qquad m = 1,2,3\cdots \tag{3.40}$$

也就是说，$g(t)$的傅里叶变换与它本身卷积$(m-1)$次，可得到$[g(t)]^m$ 的傅里叶变换。正式定义如下：

$$(F[g](*)^{-1}F[g])(f) = F[v^0](f) = \delta(f) \tag{3.41}$$

(2) 定义 supp$[g]$(g 的支集)，在范围$[t_1, t_2]$，$t_1<t_2$ 内，如果 t 在定义的范围之外，那么 $g(t)\equiv 0$，但是 $g(t_1)\neq 0$，$g(t_2)\neq 0$。将此表达如下：

$$t \not\subset \mathrm{supp}[g] \Rightarrow g(t) = 0 \tag{3.42}$$

(3) 直接证明 k 次自卷积满足下式：

$$\mathrm{supp}[g] = [t_1, t_2] \Rightarrow \mathrm{supp}[g(*)^k g] = [(k+1)t_1, (k+1)t_2] \tag{3.43}$$

根据式(3.40)，如果 supp$[F[v]]=[-B/2, B/2]$，那么：

$$\mathrm{supp}[F[v^m]] = \mathrm{supp}[(F[v](*)^{m-1}F[v])] = \left[-m\frac{B}{2}, m\frac{B}{2}\right], \qquad m \geqslant 1 \tag{3.44}$$

这就意味着，如果 $v(t)$被限定在带宽 B 内，则$[v(t)]^m$ 就被限定在带宽 mB 内。因此，对于偶数 m，即 $m=2k$，$k=1, 2,\cdots$，有：

$$\mathrm{supp}[F[v^{2k}]]=[-kB,kB],\qquad k\geqslant 0,1,2\cdots \tag{3.45}$$

因此，尽管输出频谱能够快速衰减以保证收敛，但不一定是带限信号。

如果输入信号的复振幅 $a(t)$为：

$$a(t)=v(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(t)},\quad |v(t)|<<v_{sat},\quad \theta(t)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.46}$$

出于简单考虑，假设失真是无记忆的并且只有 M 阶交调项，输出复振幅 $A(t)$有如下形式：

$$A(t)=V(v(t))\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(t)} \tag{3.47}$$

其中，根据式(3.31)：

$$V(v(t))=v(t)\sum_{m=0}^{M}c_m[v(t)]^{2m} \tag{3.48}$$

那么有：

$$\begin{aligned}F[A](f)&=F\left[v\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\sum_{m=0}^{M}c_m v^{2m}\right](f)\\&=\left(F[a]*F\left[\sum_{m=0}^{M}c_m v^{2m}\right]\right)(f)\\&=\left(F[a]*\sum_{m=0}^{M}c_m(F[v](*)^{2m-1}F[v])\right)(f)\end{aligned} \tag{3.49}$$

假设未失真信号 $a(t)$带宽为±$B/2$，振幅 $v(t)$带宽为±$Bv/2$，根据式(3.43)和式(3.45)，可以得到式(3.49)中 $F[A]$的支集为：

$$\mathrm{supp}(F[A])=[-(B/2+MBv),(B/2+MBv)] \tag{3.50}$$

如果式(3.46)中的信号只有相位调制，则v为常数，因此$F[v]$为δ函数，那么正如所期望的一样，式(3.49)是不会产生频谱再生的。

下面通过一个例子感受一下 $a(t)$的频谱再生的严重性。通过式(3.43)和式(3.46)可以得到：

$$\mathrm{supp}[F[v](f)]\subseteq \mathrm{supp}[F[a](f)] \tag{3.51}$$

因此，假设一种最差情况，即无相位调制。为简单起见，设信号是一个单个小脉冲，其带宽限定为±1/2，即：

$$a(t)=v(t),\quad v(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}v_{sat}\varepsilon,\quad \varepsilon=\frac{\|v(t)\|_\infty}{v_{sat}}<1 \tag{3.52}$$

$1/\varepsilon$ 的值在文献中称作“功率回退因子”。在进一步的处理之前，对 v_{sat} 作一个正式的定义。

假设三阶项起主要作用(通常对于小信号来说，三阶项比其更高阶项的输出较大)，固定 v 不变，由式(3.31)可得输出的振幅为：

$$V(v)\approx c_0v+c_1v^3 \tag{3.53}$$

由于压缩的原因，当电压升高时，输出振幅将低于单独由线性增益 c_0 产生的结果。要注意的是，由于压缩的存在意味着 c_0 和 c_1 的符号相反。

输出电压小于单独由线性增益产生的输出电压 1dB 时，定义此时的输入电压为 v_{sat}。由式(3.53)有：

$$
\begin{aligned}
20\log_{10}\frac{V(v_{sat})}{c_0 v_{sat}} &= 20\log_{10}\left(1+\frac{c_1}{c_0}v_{sat}^2\right) \\
&= 20\log_{10}\left(1-\left|\frac{c_1}{c_0}\right|v_{sat}^2\right) = -1
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

由此可知 c_0 和 c_1 有相反的符号，可以得到：

$$
v_{sat} \approx 0.33\left|\frac{c_0}{c_1}\right|^{\frac{1}{2}} \tag{3.55}
$$

这个 v_{sat} 的输入值称作放大器的“1dB 压缩点”。$v(t)$的傅里叶变换为：

$$
F[v] = \chi(f)v_{sat}\varepsilon, \qquad \chi(f) = \begin{cases} 1, |f| \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0, |f| > \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3.56}
$$

并且式(3.49)可写成：

$$
\begin{aligned}
F[A](f) &= \sum_{m=0}^{M} c_m (F[v](*)^{2m} F[v])(f) \\
&= \sum_{m=0}^{M} c_m v_{sat}^{2m+1}\varepsilon^{2m+1}(\chi(*)^{2m}\chi)(f)
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

注意：如果 $c_m = (-1)^m |c_0|$，则式(3.57)对应于Saleh模型。的确，式(3.31)所包含的可收敛几何级数可导出式(3.35)。

现在来做一个合理的假设，由线性增益产生的输出振幅大于由任何高阶失真项产生的输出振幅，即：

$$
|c_m| v_{sat}^{2m+1} \leqslant |c_0| v_{sat} \tag{3.58}
$$

可以简化并约束式(3.57)为：

$$
|F[A](f)| \leqslant |c_0| v_{sat} \sum_{m=0}^{M} (\chi(*)^{2m}\chi)(f)\varepsilon^{2m+1} \tag{3.59}
$$

为了能够画出式(3.59)的曲线图，唯一任务就是进行卷积计算。

$\chi(x)$函数的($n-1$)次自卷积与称为“n 阶基数 B-样条函数”相关，它可由 $N_n(x)$表示。尤其是：

$$
(\chi(*)^{n-1}\chi)(x) = N_n\left(x+\frac{n}{2}\right), \qquad n = 1,2,3,\cdots \tag{3.60}
$$

这里：

$$
x \in [0,1) \Rightarrow N_1(x) = 1, \quad x \notin [0,1) \Rightarrow N_1(x) = 0 \tag{3.61}
$$

并且当 n>1，$N_n(x)$具有闭合形式表达式：

$$
N_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} (\max\{0, x-k\})^{n-1}, \qquad n \geqslant 2 \tag{3.62}
$$

其支集为：

$$\text{supp}[N_n(x)]=[0, n] \tag{3.63}$$

注意：$N_1(x)$仅仅是把“框函数”$\chi(x)$右移一半的结果，因此在式(3.60)中，以 $N_n(x)$为中心，在其支集上将它向左移动一半。但是，当 $n>1$，$N_n(x)$并不是一个平凡函数。实际上，$N_n(x)$是一个样条函数，即分段多项式函数，由每个分段 $x\in[k, k+1), k=0, 1,\cdots,n-1$ 上不同的多项式构成。

名称“B-样条函数”强调它们构成了所有分段多项式函数空间上的一个基。名称“基数”说明了各个分段都具有单位长度。基数 B- 样条函数的完整论述可以查看 Chui 的文献(1995 年)。1 阶、2 阶、3 阶和 4 阶基数 B-样条函数如图 3.5 所示。

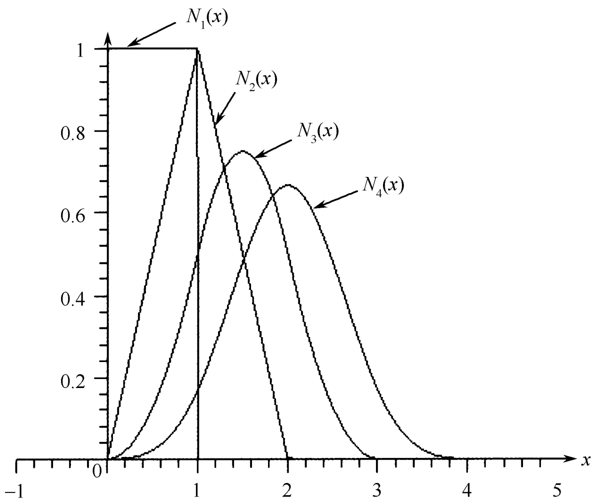

图 3.5　1、2、3 和 4 阶基数 B-样条函数

在基数 B-样条函数的帮助下，对于给定的输入信号电平，例如$|v(t)|\leqslant v_{sat}\varepsilon$，式(3.59)可以写成简便的解析形式：

$$\frac{|F[A](f)|}{|c_0|v_{sat}\varepsilon}\leqslant\chi(f)+\sum_{m=1}^{M}N_{2m+1}\left(f+\frac{2m+1}{2}\right)\varepsilon^{2m} \tag{3.64}$$

针对各种ε值，以 dB 为单位绘出式(3.64)所表示的曲线，如图 3.6 所示。

注意：由于功率放大器的非线性传输特性，式(3.64)的结果不能直接展开成一个任意的带限信号，尽管通过采样定理，一个信号能够由类似于式(3.52)的移位脉冲序列所表示。事实上，像式(3.64)这样的有界信号通常都是带限的，正如下一节要讲到的。

3.2.4　频谱再生的严格约束条件

观察式(3.64)和图 3.6，带限信号的频谱再生是有严格条件的。

利用之前定义的ε，假设使用一般的归一化带限信号形式，而不是式(3.52)中的简单信号：

$$v(t)=g(t)v_{sat}\varepsilon,\quad \text{supp}(F[g])=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad |F[g]|\leqslant 1 \tag{3.65}$$

那么式(3.57)可以改写成下列形式：

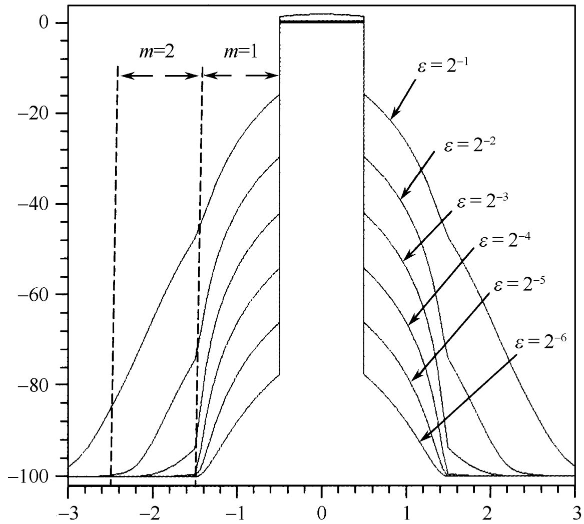

图 3.6　频谱再生范围与标准化带宽

$$F[A](f)=\sum_{m=0}^{M}c_m v_{sat}^{2m+1}\varepsilon^{2m+1}(F[g](*)^{2m}F[g])(f) \tag{3.66}$$

注意到对于任意的两个函数 $x(t)$和 $y(t)$，有：

$$|x*y|(t)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x(\tau)||y(t-\tau)|\mathrm{d}\tau=|x|*|y| \tag{3.67}$$

令 $y=x*z$，由式(3.67)可得：

$$|x|*|y|\leqslant|x|*|x|*|z| \tag{3.68}$$

利用同样的方法，通过归纳很容易得出 x 的 k 次自卷积满足：

$$|x(*)^k x|\leqslant|x|(*)^k|x| \tag{3.69}$$

将最后的结果用于式(3.66)可得：

$$|F[A](f)|\leqslant\sum_{m=0}^{M}|c_m|v_{sat}^{2m+1}\varepsilon^{2m+1}(|F[g]|(*)^{2m}|F[g]|)(f) \tag{3.70}$$

因为卷积由非负函数来完成，仍然用式(3.56)定义的 $\chi(f)$，并且$|F[g]|\leqslant 1$，对于每一个 f 值，可以写成：

$$(|F[g]|(*)^{2m}|F[g]|)(f)\leqslant(\chi(*)^{2m}\chi)(f) \tag{3.71}$$

利用式(3.71)，式(3.70)可写为：

$$|F[A](f)|\leqslant\sum_{m=0}^{M}|c_m|v_{sat}^{2m+1}\varepsilon^{2m+1}(\chi(*)^{2m}\chi)(f) \tag{3.72}$$

再利用式(3.58)，式(3.72)能变为与(3.59)相同。

式(3.64)由式(3.59)而来，参见图 3.6 所示，式(3.64)对于一般带限信号是一个严格的约束条件，此处的“严格”意味着能找到一些包含这种约束条件的函数(例如 sinc(x)脉冲)。因此，一个严格约束条件是一个“好的”条件(虽然可能不是唯一的)。

当需要精确估算输出信号的频谱密度(见 5.3 节)时，实用的方法如下所示。对于一些 $T>1/B$

时间段：

- 通过直接测量放大器，计算所需要的一系列系数$\{c_m\}$(在 3.3 节介绍如何完成这项工作)。
- 以一个足够高的采样率计算 $v(t)$和 $e^{j\theta(t)}$的时域采样值，其采样率应该能够满足所需输出带宽，这里面包括了频谱再生。
- 在缺乏信号特征的情况下，按照式(3.2)，对正态分布的 $v(t)$和均匀分布的 $\theta(t)$进行随机采样。
- 用式(3.48)计算 $V(v(t))$的采样。
- 用式(3.47)计算 $A(t)$的采样。
- 用 FFT 在若干时间段上计算$|F[A(t)]|^2/T$。
- 每个频点上的$|F[A(t)]|^2/T$ 期望值构成了频谱密度。

例 1：图 3.7 表示当归一化值 c_0=1，c_1=−0.05，c_2=0.003，c_3=−0.0005 且输入驱动峰值电平大约为 1V 时，采用以上过程得出的结果。由式(3.55)可以得到：

$$v_{sat} \approx 0.33\left|\frac{1}{0.05}\right|^{\frac{1}{2}} \approx 1.48$$

由于输入电平大约为 1V，在式(3.57)中设定$\varepsilon=O(1)$。

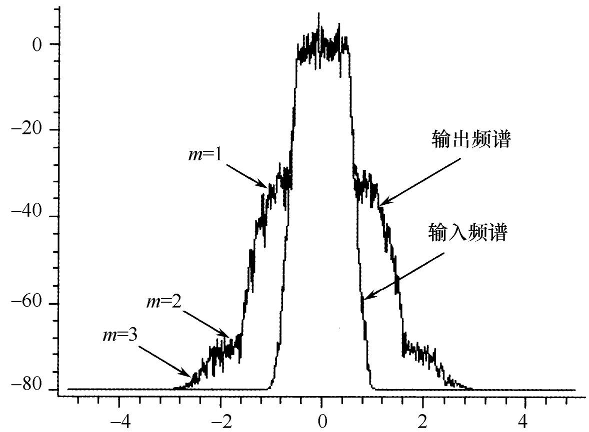

图 3.7　叠加的输入和输出频谱

由此我们应当期望 2m+1 阶失真项相对于带宽中心近似为 $O(c_m)$，即：

$$m=1 \Leftrightarrow O(c_1)=O(10^{-2}) \approx -40\text{dB}$$

$$m=2 \Leftrightarrow O(c_2)=O(10^{-3}) \approx -60\text{dB}$$

$$m=3 \Leftrightarrow O(c_3)=O(10^{-4}) \approx -80\text{dB}$$

此结果确实与图 3.7 是一致的。还应注意到频谱再生的形状与图 3.6 中的界限有很好的一致性。

例 2：给定一个非反向放大器的 1dB 压缩点，在 50Ω 负载下为+10dBm，计算其扩展 Saleh 模型振幅部分(式(3.37)的模型，为方便起见再次重复一遍)：

$$\tilde{V}(r)=\frac{V(v)}{c_0 v_{sat}}=\frac{\alpha r}{\beta r^2+1}, \qquad r=\frac{v}{v_{sat}} \tag{3.73}$$

此处负载 50Ω 时的+10dBm 对应于电压：

$$v_{sat} = v_{1\text{dB}} = \sqrt{50 \cdot 10^{-2}} \approx 0.71\,\text{V} \tag{3.74}$$

正如之前所做的一样，首先假设只有三阶失真项是主要的，并且$(\beta r^2)^2 \ll 1$(后面证明)。那么：

$$1/(\beta r^2+1) \approx 1-\beta r^2+(\beta r^2)^2-\cdots$$

并且：

$$V(v) \approx c_0 v_{sat}(\alpha r - \alpha\beta r^3) + O((\beta r^2)^2) \tag{3.75}$$

比较式(3.75)和式(3.53)，利用式(3.55)，因为$|r|<1$，可以得到：

$$\alpha \approx 1,\quad \beta \approx \left|\frac{c_1}{c_0}\right| v_{sat}^2 = 0.109 \Rightarrow (\beta r^2)^2 < 0.01 \ll 1 \tag{3.76}$$

这就验证了之前假设的$(\beta r^2)^2 \ll 1$，并且计算的模型为：

$$\tilde{V}(r(t)) = \frac{r(t)}{0.109 r^2(t)+1},\qquad r(t) = \frac{v(t)}{0.71} \tag{3.77}$$

如果必须考虑高阶失真，可在不同压缩电平上的压缩点，利用最小二乘法估计出α和β来构建一个优化模型。例如，假设已测得 1dB，0.5dB，0.25dB 压缩点的电平值分别对应为+10dBm，+8dBm，+6dBm，那么：

$$\begin{aligned} v_{1\text{dB}} &= v_{sat} \approx 0.71 \Rightarrow r_{1\text{dB}} = 1 \\ v_{0.5\text{dB}} &= 0.56V \Rightarrow r_{0.5\text{dB}} = 0.56/0.71 \approx 0.79 \\ v_{0.25\text{dB}} &= 0.355V \Rightarrow r_{0.5\text{dB}} = 0.355/0.71 = 0.5(\text{译者注：应该是}r_{0.25\text{dB}}) \end{aligned} \tag{3.78}$$

注意：对于 r 的所有值，失真的输出相对于线性增益满足：

$$\frac{V(v)}{c_0 v} = \frac{V(v)}{c_0 v_{sat} r} = \frac{\tilde{V}(r)}{r} = \frac{\alpha}{\beta r^2+1} \tag{3.79}$$

还需同时满足方程：

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \frac{\tilde{V}(r_{1\text{dB}})}{r_{1\text{dB}}} = \frac{\alpha}{\beta (r_{1\text{dB}})^2+1},\quad C_1 = 10^{-\frac{1}{20}} = 0.891 \\ C_{0.5} &\equiv \frac{\tilde{V}(r_{0.5\text{dB}})}{r_{0.5\text{dB}}} = \frac{\alpha}{\beta (r_{0.5\text{dB}})^2+1},\quad C_{0.5} = 10^{-\frac{0.5}{20}} = 0.944 \\ C_{0.25} &\equiv \frac{\tilde{V}(r_{0.25\text{dB}})}{r_{0.25\text{dB}}} = \frac{\alpha}{\beta (r_{0.25\text{dB}})^2+1},\quad C_{0.25} = 10^{-\frac{0.25}{20}} = 0.971 \end{aligned} \tag{3.80}$$

因为条件比自由度多，因此在通常情况下，式(3.80)不可能得到精确的结果，α和β可形成一个超定系统(行比列多)：

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -C_1(r_{1\text{dB}})^2 \\ 1 & -C_{0.5}(r_{0.5\text{dB}})^2 \\ 1 & -C_{0.25}(r_{0.25\text{dB}})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_{0.5} \\ C_{0.25} \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

“求解”一个超定系统$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的最佳方法就是找到一个矢量$\boldsymbol{x}$，满足最小平方误差(Gohberg和Goldberg，1981年)，即：

$$\|\boldsymbol{e}\|_2 = \|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2 \to \min \tag{3.82}$$

当误差矢量与矩阵的所有列正交时(称之为“最小二乘条件”)，通过解下面方程可得最小误差，即：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{3.83}$$

此处的 T 表示矩阵的转置。因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是一个较小维数的方阵(等于列数)，此例中为 2×2，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 是一个维数与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 相等的矢量，那么式(3.83)是一个方阵，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 不是奇异阵，那么只有唯一解。将式(3.80)的值代入式(3.81)，具体的计算细节留给读者作为练习，本例子的解为：

$$\alpha=1.0167，\beta=0.1380 \tag{3.84}$$

其模型为：

$$\tilde{V}(r(t)) = \frac{1.0167r(t)}{0.1380r^2(t)+1},\quad r(t)=\frac{v(t)}{0.71} \tag{3.85}$$

在给定的压缩点代入 $\tilde{V}(r)/r$ 的值检查结果，利用最小二乘法全局拟合，得到−0.985dB、−0.578dB 和−0.226dB。在 0<r<1 时，用 dB 表示的压缩值($20\log[\tilde{V}(r)/r]$)如图 3.8(a)所示。在 0<r<5 时，归一化输出 $\tilde{V}(r)$ 如图 3.8(b)所示。

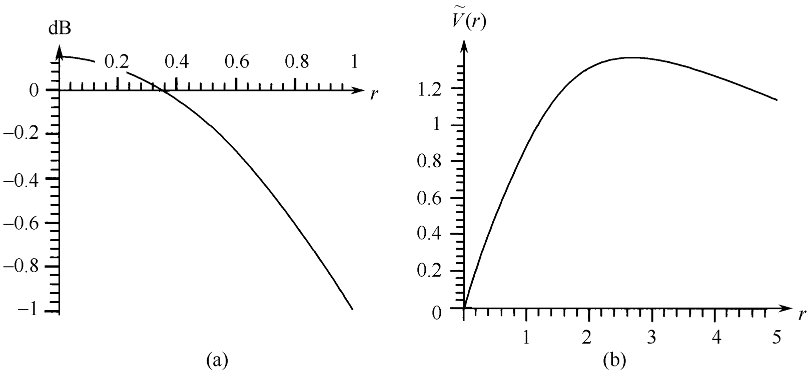

图 3.8 (a) 压缩[dB]与归一化幅度 (b) 归一化输出与归一化幅度

3.3 功率放大器的非线性特性

下面来研究和了解设计者和制造商经常用来描述功率放大器非线性特性的一些定量参数。首先，看一下如何测量系数$\{c_m\}$。

最简单且最方便的方法是使用两个正弦信号作为放大器的输入，它们的幅度相等而且为常数 v、频率相近，即：

$$S_{in}(t) = v[\cos(\omega-\Delta\omega)t+\cos(\omega+\Delta\omega)t],\quad \frac{\Delta\omega}{\omega}\to 0 \tag{3.86}$$

根据式(3.21)，对 $\cos^n(x)$再次使用式(3.22)的二项展开式，经变换，输出结果为：

$$\begin{aligned}S_{out}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (v[\cos(\omega-\Delta\omega)t+\cos(\omega+\Delta\omega)t])^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2v)^n \cos^n(\Delta\omega t)\cos^n(\omega t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{v}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega t(2k-n)}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t(2l-n)}\end{aligned} \tag{3.87}$$

当 $\Delta\omega/\omega\to 0$ 且 n 有限时，只有当 $2l-n=\pm 1$ 时，式(3.87)才会产生带内成分(在角频率 ω 附近)，由此得出 n 必须为奇数。令 $n=2m+1$，得到条件：

$$l=\{m, m+1\}$$

用式(3.26)替换式(3.87)后面的部分，可得带内信号 $S(t)$ 为：

$$\begin{aligned}S(t) &= \sum_{m=0}^{M} a_{2m+1}\left(\frac{v}{2}\right)^{2m+1}\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}\times\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega t(2(k-m)-1)}2\binom{2m+1}{m}\cos(\omega t) \\ &= \sum_{m=0}^{M} v^{2m+1}2^{-2m}a_{2m+1}\binom{2m+1}{m}\times\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega t(2(k-m)-1)}\cos(\omega t) \\ &= \sum_{m=0}^{M} c_m v^{2m+1}\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega t(2(k-m)-1)}\cos(\omega t)\end{aligned} \tag{3.88}$$

令 $k=2m+1-l$，分离式(3.88)中最后的和式为：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2m+1}(\cdot) &= \sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega t(2(k-m)-1)}+\sum_{l=m}^{0}\binom{2m+1}{2m+1-l}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega t(2(m+1-l)-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{m}\left[\binom{2m+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega t(2(k-m)-1)}+\binom{2m+1}{2m+1-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Delta\omega t(2(k-m)-1)}\right]\end{aligned} \tag{3.89}$$

在式(3.89)中应用二项式系数的性质：

$$\binom{p}{q}=\binom{p}{p-q} \tag{3.90}$$

代入以上结果到式(3.88)中并令 $u=m-k$，最终得到：

$$\begin{aligned}S(t) &= \sum_{m=0}^{M} c_m v^{2m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{k}\times 2\cos(\Delta\omega t(2(k-m)-1))\cos(\omega t) \\ &= \sum_{m=0}^{M} c_m v^{2m+1}\sum_{u=0}^{m}\binom{2m+1}{m-u}\times[\cos(\omega t-(2u+1)\Delta\omega t)+\cos(\omega t+(2u+1)\Delta\omega t)]\end{aligned} \tag{3.91}$$

式(3.91)表明，由于 $2k+1$ 阶的非线性，在 $\omega\pm(2u+1)\Delta\omega$ ($u=0, 1, 2,\cdots,k$)处产生了边带信号。

注意：c_{k-1} 对于第 k 个边带没有任何影响，如果 v 取得足够小，可以满足下面条件：

$$c_m v^{2m+1}\ll c_k v^{2k+1}\binom{2k+1}{0}\Rightarrow\frac{c_m}{c_k}v^{2(m-k)}\ll\binom{2m+1}{m-k},\quad k<m\leqslant M \tag{3.92}$$

式(3.91)表明了 c_m 对于第 k 个边带的影响。与 c_k 相比，当 $m>k$ 时 c_m 的影响是可以忽略不计的。由此可通过估计 $|c_k|$ 来得到频谱图，似乎它是仅有的非零系数。

具体来说，用 s_k 表示所观测的第 k 边带的振幅，其值等于一个常数乘法器：