

第4章 连续信号的复频域分析

【内容提要】

若信号因不满足绝对可积条件而难以求其傅里叶变换, 则无法对此类信号进行频域分析, 如 $f(t) = e^{2t}u(t)$ 。本章引入复频率 $s = \sigma + j\omega$, 以复指数信号 e^{st} 为基本信号, 将任意信号分解为不同复频率的复指数分量之和, 并以此对信号进行分析。这里用于信号分析的独立变量是复频率 s , 故称之为复频域分析或 s 域分析, 所采用的数学工具为拉普拉斯变换。

本章主要介绍拉普拉斯变换的定义和收敛域、拉普拉斯变换的性质以及拉普拉斯逆变换的求解方法。读者应重点掌握拉普拉斯变换的定义和性质, 并熟练掌握利用部分分式展开法求解拉普拉斯逆变换的方法。

【重点难点】

- ★ 拉普拉斯变换的定义和收敛域
- ★ 拉普拉斯变换的性质
- ★ 部分分式展开法求拉普拉斯逆变换

4.1 拉普拉斯变换

4.1.1 双边拉普拉斯变换

某些信号求解傅里叶变换困难的原因是: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 信号的幅度不衰减, 甚至增长, 即信号不满足绝对可积条件。为此, 可用一衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为实常数) 乘以此类信号 $f(t)$, 如果适当选取 σ 的值, 有可能使乘积信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时幅度趋近于 0, 即满足绝对可积条件, 从而使信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换容易求得。

由式 (3.3-2) 可知信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换 $F_b(\sigma + j\omega)$ 为:

$$F_b(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

由式 (3.3-4) 可知 $F_b(\sigma + j\omega)$ 的傅里叶逆变换为:

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

将上式两边同乘以 $e^{\sigma t}$, 有:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

令 $s = \sigma + j\omega$, 则有:

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.1-1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s) e^{st} ds \quad (4.1-2)$$

上述两式称为双边拉普拉斯变换对。其中, $F_b(s)$ 称为 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换或象函数, $f(t)$ 称为 $F_b(s)$ 的双边拉普拉斯逆变换或原函数。

也可简记为:

$$F_b(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_b(s)]$$

或:

$$f(t) \leftrightarrow F_b(s)$$

由上述求解双边拉普拉斯变换的过程可知, 只有选择适当的 σ 值才能使信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时幅度趋近于0, 即满足绝对可积条件, 从而使其双边拉普拉斯变换存在。因此, 规定使信号 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换存在的 σ 的取值范围称为双边拉普拉斯变换 $F_b(s)$ 的收敛域, 简记为 ROC (Region of Convergence)。下面举例说明 $F_b(s)$ 的收敛域问题。

例 4.1-1 求因果信号 $f_1(t) = e^{\alpha t}u(t)$ 的双边拉普拉斯变换。

解: 由式(4.1-1)得:

$$F_{1b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{(s-\alpha)} \left\{ 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t}] \right\} = \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha}, & \text{Re}[s] = \sigma > \alpha \\ \text{不定}, & \text{Re}[s] = \sigma = \alpha \\ \text{无界}, & \text{Re}[s] = \sigma < \alpha \end{cases}$$

可见, 对于因果信号, 仅当 $\text{Re}[s] = \sigma > \alpha$ 时积分收敛 (α 称为收敛坐标), 其双边拉普拉斯变换存在。即因果信号双边拉普拉斯变换的收敛域为 s 平面上 $\text{Re}[s] = \sigma > \alpha$ 的区域, 如图 4.1-1 (a) 阴影部分所示。

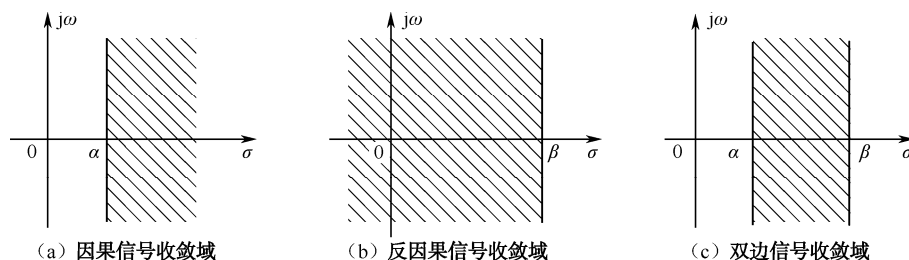


图 4.1-1 双边拉普拉斯变换的收敛域

例 4.1-2 求反因果信号 $f_2(t) = e^{\beta t}u(-t)$ 的双边拉普拉斯变换。

解: 由式(4.1-1)得:

$$F_{2b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t} u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{\beta t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)} \Big|_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{-(s-\beta)} \left\{ 1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} [e^{-(\sigma-\beta)t} e^{-j\omega t}] \right\} = \begin{cases} \text{无界}, & \text{Re}[s] = \sigma > \beta \\ \text{不定}, & \text{Re}[s] = \sigma = \beta \\ \frac{1}{-(s-\beta)}, & \text{Re}[s] = \sigma < \beta \end{cases}$$

可见, 对于反因果信号, 仅当 $\text{Re}[s] = \sigma < \beta$ 时积分收敛 (β 称为收敛坐标), 其双边拉普拉斯变换存在。即反因果信号双边拉普拉斯变换的收敛域为 s 平面上 $\text{Re}[s] = \sigma < \beta$ 的区域, 如图 4.1-1 (b) 阴影部分所示。

例 4.1-3 求双边信号 $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t) = e^{\alpha t}u(t) + e^{\beta t}u(-t)$ 的双边拉普拉斯变换。

解: 由式(4.1-1)得:

$$F_{3b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{\beta t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{-(s-\beta)} \left\{ 1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} [e^{-(\sigma-\beta)t} e^{-j\omega t}] \right\} + \frac{1}{(s-\alpha)} \left\{ 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t}] \right\}$$

由例 4.1-1 和 4.1-2 可知:

当 $\beta \leq \alpha$ 时, $F_{1b}(s)$ 和 $F_{2b}(s)$ 没有共同的收敛域, 因此 $F_{3b}(s)$ 不存在。

当 $\beta > \alpha$ 时, 其收敛域为 $\alpha < \text{Re}[s] = \sigma < \beta$ 的一个带状区域 (α 、 β 称为收敛坐标), 如图 4.1-1

(c) 阴影部分所示。

此时, 其双边拉普拉斯变换为:

$$F_{3b}(s) = F_{1b}(s) + F_{2b}(s) = \frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}$$

例 4.1-4 求下列信号的双边拉普拉斯变换。

$$1) f_1(t) = e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad 2) f_2(t) = -e^{-3t}u(-t) - e^{-2t}u(-t) \quad 3) f_3(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(-t)$$

解: 由于前面已经求过该类信号的双边拉普拉斯变换, 故可利用前述例题的结论求解以简化求解过程。

1) 由式 (4.1-1) 得:

$$F_{1b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t)]e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}u(t)e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2}$$

由于因果信号 $f_1(t)$ 由两部分信号求和而成, 故其双边拉普拉斯变换的收敛域应为此两个象函数收敛域的交集, 即 $\text{Re}[s] = \sigma > -2$ 。

2) 由式 (4.1-1) 得:

$$F_{2b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [-e^{-3t}u(-t) - e^{-2t}u(-t)]e^{-st} dt$$

$$= -\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}u(-t)e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(-t)e^{-st} dt \right] = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2}$$

由于反因果信号 $f_2(t)$ 由两部分信号求和而成, 故其双边拉普拉斯变换的收敛域应为此两个象函数收敛域的交集, 即 $\text{Re}[s] = \sigma < -3$ 。

3) 由式 (4.1-1) 得:

$$F_{3b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(-t)]e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}u(t)e^{-st} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(-t)e^{-st} dt = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2}$$

由于双边信号 $f_3(t)$ 由两部分信号求和而成, 故其双边拉普拉斯变换的收敛域应为此两个象函数收敛域的交集, 即 $-3 < \text{Re}[s] = \sigma < -2$ 。

由例 4.1-4 可见, 三个原函数拥有一个相同的象函数! 仔细观察, 能够发现其收敛域不同。由此可见, 双边拉普拉斯变换的象函数与收敛域一起与原函数才是一一对应的关系。因此, 不同的信号如果有相同的象函数, 则它们的收敛域必然不同; 不同的信号如果有相同的收敛域, 则它们的象函数必然不同。所以, 双边拉普拉斯变换必须标出收敛域。

4.1.2 单边拉普拉斯变换

通常遇到的信号是单边信号, 即都是有初始时刻的信号。如果设其初始时刻为 $t=0$, 则对于此类信号 $f(t)$ 有:

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = f(t)u(t) \quad (4.1-3)$$

对于式 (4.1-3) 所示信号, 由式 (4.1-1) 和式 (4.1-2) 有:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.1-4)$$

$$f(t) = \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \right] u(t) \quad (4.1-5)$$

上述两式称为单边拉普拉斯变换对, 简称拉普拉斯变换对, 本书主要讨论单边拉普拉斯变换, 在后续内容中若没有特别说明, 均指单边拉普拉斯变换。其中, $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换或象函数, $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的单边拉普拉斯逆变换或原函数。

也可简记为:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

或

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

需要特别注意的是:

① 式 (4.1-4) 积分下限取 0_- 是考虑到信号 $f(t)$ 中可能包含冲激函数及其各阶导数, 今后未注明的 $t=0$, 均指 0_- ;

② 因单边拉普拉斯变换的积分区间是由 0_- 到 ∞ , 故信号 $f(t)u(t)$ 与 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换相同, 简便起见, 时间函数中的 $u(t)$ 常省略不写;

③ 单边拉普拉斯变换只适用于研究因果信号。

为了保证单边拉普拉斯变换存在, 有如下定理:

若因果信号 $f(t)$ 满足:

(1) 在有限区间 $a < t < b$ ($0 \leq a < b < \infty$) 内可积;

(2) 对于某个 σ_0 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)|e^{-\sigma t} = 0$, $\sigma > \sigma_0$ 。

则对于 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$, 拉普拉斯积分式, 即式 (4.1-4) 绝对且一致收敛。

条件 (1) 说明 $f(t)$ 可以包含有限个间断点, 只要求它在有限区间内可积, 即 $f(t)$ 曲线下方的面积为有限值。

条件 (2) 说明 $f(t)$ 可以是随 t 增大而增大的, 即 $f(t)$ 可以是自变量 t 的递增函数, 只是要求它比某些指数函数增长得慢即可。

定理表明, 满足条件 (1) 和 (2) 的因果信号 $f(t)$ 存在拉普拉斯变换, 其收敛域为 s 平面上收敛坐标 σ_0 的右半平面, 即 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$, 而且积分是一致收敛的, 因而多重积分可以改变积分顺序, 微分、积分也可以交换次序。

由式 (4.1-1) 和式 (4.1-4) 可知:

① 对于因果信号 $f(t)$, 若其拉普拉斯变换存在, 则双边拉普拉斯变换和单边拉普拉斯变换具有相同的表达式: $F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$, 且收敛域相同, 均为 s 平面上收敛坐标 σ_{01} 的右半平面: $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_{01}$;

② 对于反因果信号 $f(t)$, 若其双边拉普拉斯变换 $F_b(s)$ 存在, 则其收敛域为 s 平面上收敛坐标 σ_{02} 的左半平面: $\text{Re}[s] = \sigma < \sigma_{02}$ 。任何反因果信号的单边拉普拉斯变换均为 0, 没有研究意义;

③ 对于双边信号 $f(t)$, 若其单、双边拉普拉斯变换均存在, 则单、双边拉普拉斯变换表达式不相同: $F_b(s) \neq F(s)$, 收敛域也不同。双边拉普拉斯变换的收敛域为 s 平面上两收敛坐标 σ_{01}, σ_{02} ($\sigma_{01} < \sigma_{02}$) 所包围的带状区域: $\sigma_{01} < \text{Re}[s] = \sigma < \sigma_{02}$, 单边拉普拉斯变换的收敛域为 s 平面上收敛坐标 σ_{01} 的右半平面: $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_{01}$ 。存在双边拉普拉斯变换的双边信号一定存在单边拉普拉

斯变换，但存在单边拉普拉斯变换的双边信号不一定存在双边拉普拉斯变换；

④ 单边拉普拉斯变换的收敛域只是双边拉普拉斯变换收敛域的一种特殊情况，而且单边拉普拉斯变换的象函数 $F(s)$ 与原函数 $f(t)$ 总是一对一的变换，故在以后各节的讨论中，经常不标注单边拉普拉斯变换的收敛域。

由以上讨论可知，与傅里叶变换相比，拉普拉斯变换对信号 $f(t)$ 的限制要宽松的多。单边拉普拉斯变换的象函数 $F(s)$ 是复变函数，它存在于 s 平面上收敛坐标的右半平面内，而傅里叶变换 $F(j\omega)$ 仅是 $F(s)$ 收敛域中虚轴 ($s=j\omega$) 上的函数。因此，在信号的复频域分析中就能用复变函数理论研究线性系统问题，从而扩大了人们的“视野”，使过去不易解决或不能解决的问题得到较为满意的结果。

作为本节的总结，表 4.1-1 列出了常用信号的拉普拉斯变换对。

表 4.1-1 常用信号的拉普拉斯变换对

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{sh}(\beta t)u(t)$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$\text{ch}(\beta t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$
$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$		
$\delta_T(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}}$	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$		

练习题

4.1-1 求下列信号的单边拉普拉斯变换。

1) $f_1(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t-2)]$ 2) $f_2(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$

4.1-2 求下列信号的双边拉普拉斯变换，并注明收敛域。

1) $f_1(t) = |t|e^{-2|t|}$ 2) $f_2(t) = te^{-2|t|}$

4.2 拉普拉斯变换的性质

本节介绍拉普拉斯变换的相关性质，利用常用信号的拉普拉斯变换对和拉普拉斯变换的性质，可以简化拉普拉斯变换及其逆变换的求解过程。读者在学习本节内容时，应与傅里叶变换的性质进行对比，从而加深对两类变换性质的理解。

4.2.1 线性性质

若：

$$\begin{aligned} f_1(t) &\leftrightarrow F_1(s), \text{Re}[s] = \sigma > \sigma_1 \\ f_2(t) &\leftrightarrow F_2(s), \text{Re}[s] = \sigma > \sigma_2 \end{aligned}$$

则对任意常数 a 和 b ，有：

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(s) + bF_2(s), \text{Re}[s] = \sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2) \quad (4.2-1)$$

式 (4.2-1) 称为拉普拉斯变换的线性性质，其收敛域应为两个收敛域的重叠部分。对于多个信号的情况，线性性质仍然适用。下面对其进行证明。

由式 (4.1-4) 可知信号 $af_1(t) + bf_2(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 为：

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-st} dt = a \int_{0_-}^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt + b \int_{0_-}^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt = aF_1(s) + bF_2(s)$$

对于上式, 若 $F_1(s)$ 的收敛域为 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_1$, $F_2(s)$ 的收敛域为 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_2$, 为了使 $aF_1(s) + bF_2(s)$ 也收敛, 则其收敛域为 $\text{Re}[s] = \sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$ 。

例 4.2-1 求信号 $f(t) = \delta(t) + u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 根据常用信号的拉普拉斯变换对 $\delta(t) \leftrightarrow 1$ 和 $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$, 利用式 (4.2-1), 有:

$$f(t) = \delta(t) + u(t) \leftrightarrow 1 + \frac{1}{s}, \quad \text{Re}[s] = \sigma > 0$$

4.2.2 尺度变换

若:

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \quad \text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

则:

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{Re}[s] = \sigma > a\sigma_0 \quad (4.2-2)$$

式 (4.2-2) 称为拉普拉斯变换的尺度变换性质, 式中 a 为实常数且 $a > 0$ 。下面对其进行证明。

由式 (4.1-4) 可知信号 $f(at)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 为:

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(at)e^{-st} dt$$

令 $at = x$, 则有:

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(x)e^{-\frac{s}{a}x} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_{0_-}^{\infty} f(x)e^{-\frac{s}{a}x} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

若 $F(s)$ 的收敛域为 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$, 则 $F\left(\frac{s}{a}\right)$ 的收敛域为 $\text{Re}\left[\frac{s}{a}\right] = \sigma > \sigma_0$, 即 $X(s)$ 的收敛域为

$\text{Re}[s] = \sigma > a\sigma_0$ 。

例 4.2-2 求阶跃信号 $u(at)$ 的拉普拉斯变换, 其中 a 为任意正实数。

解: 根据常用信号的拉普拉斯变换对 $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$, 利用式 (4.2-2), 有:

$$u(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\frac{s}{a}} \right) = \frac{1}{s}$$

由表 4.1-1 可知阶跃信号 $u(t)$ 的拉普拉斯变换也是 $\frac{1}{s}$, 似乎可以得出不同信号存在相同的单边

拉普拉斯变换这一明显错误的结论。实际上, 上述结论的错误在于忽视了这样一个事实: 对于任意正实数 a , $u(at) = u(t)$, 这可以按照如下思路理解。

令 $at = x$, 则 $u(at) = u(x)$, 根据阶跃信号的定义, 当 $x > 0$, 即 $at > 0$, 从而 $t > 0$ 时, $u(at) = u(x) = 1$; 当 $x = 0$, 即 $at = 0$, 从而 $t = 0$ 时, $u(at) = u(x) = \frac{1}{2}$; 当 $x < 0$, 即 $at < 0$, 从而 $t < 0$ 时, $u(at) = u(x) = 0$ 。因此, 对于任意正实数 a , $u(at) = u(t)$ 。

例 4.2-3 图 4.2-1 (a) 所示信号 $f_1(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F_1(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}(1 - e^{-s} - se^{-s})$, 求图 4.2-1

(b) 所示信号 $f_2(t)$ 的拉普拉斯变换。

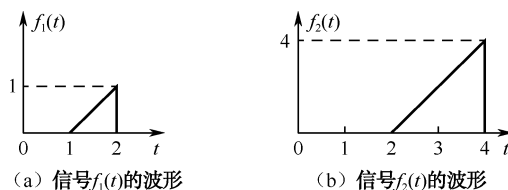


图 4.2-1 信号波形

解：由图 4.2-1 可知，信号 $f_2(t)$ 是信号 $f_1(t)$ 横坐标展宽为原来的 2 倍，且幅值增大为原来的 4 倍后得到的信号，即：

$$f_2(t) = 4f_1\left(\frac{t}{2}\right)$$

根据式 (4.2-1) 和式 (4.2-2)，有：

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s) = 4 \times 2F(2s) = \frac{8e^{-2s}}{(2s)^2} (1 - e^{-2s} - 2se^{-2s}) = \frac{2e^{-2s}}{s^2} (1 - e^{-2s} - 2se^{-2s})$$

4.2.3 时移特性

若：

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

则：

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 \quad (4.2-3)$$

式 (4.2-2) 与式 (4.2-3) 相结合，可得：

$$f(at-t_0)u(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{a} e^{-\frac{t_0}{a}s} F\left(\frac{s}{a}\right), \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0 \quad (4.2-4)$$

式 (4.2-3) 称为拉普拉斯变换的时移特性或延时特性。式 (4.2-3) 和式 (4.2-4) 中的 a 和 t_0 均为正实常数。下面对其进行证明。

先证明时移特性，即式 (4.2-3)。

由式 (4.1-4) 可知信号 $f(t-t_0)u(t-t_0)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 为：

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt$$

令 $t-t_0 = x$ ，有：

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(x)e^{-s(x+t_0)} dx = \int_{0_-}^{\infty} f(x)e^{-sx} e^{-st_0} dx = e^{-st_0} \int_{0_-}^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = e^{-st_0} F(s)$$

若 $F(s)$ 收敛，则 $X(s) = e^{-st_0} F(s)$ 也收敛，故其收敛域亦为 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$ 。

再证明式 (4.2-4)。

由式 (4.2-3) 并考虑式 (4.2-2)，有：

$$f(at-t_0)u(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{a} e^{-\frac{t_0}{a}s} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

对于上式，如果 $F(s)$ 的收敛域为 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$ ，则 $\frac{1}{a} e^{-\frac{t_0}{a}s} F\left(\frac{s}{a}\right)$ 的收敛域为 $\operatorname{Re}\left[\frac{s}{a}\right] = \sigma > \sigma_0$ ，

即 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > a\sigma_0$ 。

需要着重指出的是：时移特性中的延时信号 $f(t-t_0)u(t-t_0)$ 是指因果信号 $f(t)u(t)$ 延时 t_0 后得

到的信号，而非信号 $f(t-t_0)u(t)$ 。因此，在使用这一性质时，一定要注意 $f(t-t_0)u(t-t_0)$ 和 $f(t-t_0)u(t)$ 的区别。

例 4.2-4 求图 4.2-2 所示信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的拉普拉斯变换。

解：由图 4.2-2 可知：

$$f_1(t) = u(t) - u(t-1), \quad f_2(t) = u(t+1) - u(t-1)$$

根据常用信号的拉普拉斯变换对 $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ ，利用式

(4.2-3)，有：

$$u(t-1) \leftrightarrow \frac{e^{-s}}{s}$$

结合式 (4.2-1) 有：

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s) = \frac{1}{s} - e^{-s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

在求信号 $f_2(t)$ 的象函数时一定要注意，题目要求的是单边拉普拉斯变换，故由式 (4.1-4) 可知，其积分下限为 0，即：

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s) = \int_{0_-}^{\infty} [u(t+1) - u(t-1)]e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} [u(t) - u(t-1)]e^{-st} dt = F_1(s)$$

故：

$$F_2(s) = F_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

例 4.2-5 已知图 4.2-3 (a) 所示信号 $f_1(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F_1(s)$ ，求图 4.2-3 (b) 所示信号 $f_2(t)$ 的拉普拉斯变换 $F_2(s)$ 。

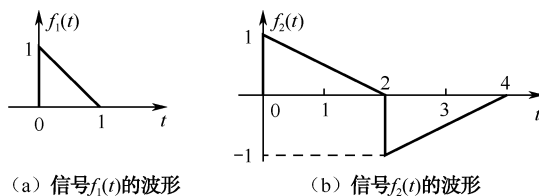


图 4.2-3 信号波形

解：根据图 4.2-3 列写由 $f_1(t)$ 表示 $f_2(t)$ 的信号表达式。

$t \in (0,2)$ 时， $f_2(t)$ 显然是对 $f_1(t)$ 的横坐标展宽 2 倍得到的，故：

$$f_{21}(t) = f_1\left(\frac{t}{2}\right)$$

$t \in (2,4)$ 时， $f_2(t)$ 显然是对 $f_1(t)$ 的横坐标展宽 2 倍并右移 2 个单位后，再沿横坐标反转得到的，故：

$$f_{22}(t) = -f_1\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

所以，有：

$$f_2(t) = f_{21}(t) + f_{22}(t) = f_1\left(\frac{t}{2}\right) - f_1\left(\frac{t-2}{2}\right) = f_1\left(\frac{1}{2}t\right) - f_1\left(\frac{1}{2}t-1\right)$$

由式 (4.2-4)，并考虑式 (4.2-1)，有：

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s) = 2F_1(2s) - 2e^{-2s}F_1(2s) = 2F_1(2s)(1 - e^{-2s})$$

4.2.4 复频移特性

若:

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

则:

$$f(t)e^{s_a t} \leftrightarrow F(s - s_a), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 + \sigma_a \quad (4.2-5)$$

式(4.2-5)称为拉普拉斯变换的复频移特性或 s 域平移特性, 式中, $s_a = \sigma_a + j\omega_a$ 为复常数。下面对其进行证明。

由式(4.1-5)可知:

$$F(s - s_a) \leftrightarrow \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s - s_a) e^{st} ds \right] u(t)$$

令 $s - s_a = x$, 有:

$$F(s - s_a) \leftrightarrow \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{(\sigma - \sigma_a) - j\infty}^{(\sigma - \sigma_a) + j\infty} F(x) e^{(x + s_a)t} dx \right] u(t) = e^{s_a t} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{(\sigma - \sigma_a) - j\infty}^{(\sigma - \sigma_a) + j\infty} F(x) e^{xt} dx \right] u(t) = e^{s_a t} f(t) u(t)$$

由于象函数 $F(s)$ 的收敛域是收敛坐标的右半平面, 故其原序列为因果序列, 所以, 上式中的 $u(t)$ 可以省略, 即:

$$F(s - s_a) \leftrightarrow e^{s_a t} f(t)$$

由于 $F(s)$ 的收敛域为 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$, 且 $F(s - s_a)$ 是由 $F(s)$ 在复平面上右移得到的, 故 $F(s - s_a)$ 的收敛域应为 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 + \sigma_a$ 。

例 4.2-6 已知因果信号 $f(t)$ 的象函数 $F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$, 求 $e^{-2t} f(4t - 6)$ 的象函数。

解: 由式(4.2-4)可知:

$$f(4t - 6) \leftrightarrow \frac{1}{4} F\left(\frac{s}{4}\right) e^{-\frac{3}{2}s}$$

根据式(4.2-5), 有:

$$\begin{aligned} e^{-2t} f(4t - 6) &\leftrightarrow \frac{1}{4} F\left(\frac{s+2}{4}\right) e^{-\frac{3}{2}(s+2)} = \frac{1}{4} \frac{\frac{s+2}{4}}{\left(\frac{s+2}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{s+2}{4}\right) + 1} e^{-\frac{3}{2}(s+2)} \\ &= \frac{s+2}{(s+2)^2 + 8(s+2) + 16} e^{-\frac{3}{2}(s+2)} = \frac{s+2}{s^2 + 12s + 36} e^{-\frac{3}{2}s - 3} \end{aligned}$$

4.2.5 共轭特性

若:

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

则:

$$f^*(t) \leftrightarrow F^*(s^*), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 \quad (4.2-6)$$

式(4.2-6)称为拉普拉斯变换的共轭特性。

当 $f(t)$ 为实函数时, 有:

$$F(s) = F^*(s^*)$$

上式表明, 如果 $F(s)$ 有一个极点或零点在 $s = s_0$ 处, 那么 $F(s)$ 也一定有一个共轭的极点或零

点位于 $s = s_0^*$ 处。

4.2.6 时域微分特性

若：

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

则：

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-) \quad (4.2-7)$$

$$f''(t) \leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-) \quad (4.2-8)$$

$$f'''(t) \leftrightarrow s^3 F(s) - s^2 f(0_-) - sf'(0_-) - f''(0_-) \quad (4.2-9)$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0_-) \quad (4.2-10)$$

若 $f(t)$ 为因果信号，则：

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 \quad (4.2-11)$$

式 (4.2-7) ~ 式 (4.2-11) 称为拉普拉斯变换的时域微分特性或时域微分定理，各象函数的收敛域至少是 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$ 。下面对其进行证明。

由式 (4.1-4) 可知：

$$f'(t) \leftrightarrow \int_{0_-}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} df(t) = e^{-st} f(t) \Big|_{0_-}^{\infty} + s \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - f(0_-) + sF(s)$$

由于 $f(t)$ 是指数阶函数，故在收敛域内 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$ ，故有：

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-)$$

由上式可知，在 $F(s)$ 的收敛域，即 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$ 内， $sF(s)$ 必收敛，故 $f'(t)$ 的象函数收敛。

由于上式中存在 $sF(s)$ 项，故其收敛域可能扩大。例如：若 $F(s) = \frac{1}{s}$ ，则其收敛域为 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > 0$ ，

而 $sF(s) = s \times \frac{1}{s} = 1$ ，显然其收敛域为整个复平面，因此，式 (4.2-7) 的收敛域至少是 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$ 。

重复应用式 (4.2-7) 可证得式 (4.2-8) ~ 式 (4.2-10)。

若 $f(t)$ 为因果信号，则 $f(0_-)$ 及其各阶导数 $f^{(n)}(0_-)$ 必为零，故式 (4.2-11) 成立。

例 4.2-7 已知 $f(t) = \sin(t)u(t)$ 的象函数为 $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ ，求 $y(t) = \cos(t)u(t)$ 的象函数。

解：根据导数的运算规则，并考虑式 (2.2-9)，有：

$$f'(t) = \cos(t)u(t) = y(t)$$

由题意可知 $f(t)$ 为因果信号，则利用式 (4.2-11)，得：

$$y(t) = \cos(t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 1}$$

4.2.7 时域积分特性

若：

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

则：

$$\left(\int_{0_-}^t f(x) dx \right) \leftrightarrow s^{-1} F(s) \quad (4.2-12)$$

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx \leftrightarrow s^{-1}F(s) + s^{-1}f^{(-1)}(0_-) \quad (4.2-13)$$

$$f^{(-2)}(t) = \left(\int_{-\infty}^t\right)^2 f(x)dx \leftrightarrow s^{-2}F(s) + s^{-2}f^{(-1)}(0_-) + s^{-1}f^{(-2)}(0_-) \quad (4.2-14)$$

$$f^{(-3)}(t) = \left(\int_{-\infty}^t\right)^3 f(x)dx \leftrightarrow s^{-3}F(s) + s^{-3}f^{(-1)}(0_-) + s^{-2}f^{(-2)}(0_-) + s^{-1}f^{(-3)}(0_-) \quad (4.2-15)$$

⋮

$$f^{(-n)}(t) = \left(\int_{-\infty}^t\right)^n f(x)dx \leftrightarrow s^{-n}F(s) + \sum_{m=1}^n s^{-(n-m+1)}f^{(-m)}(0_-) \quad (4.2-16)$$

式(4.2-12)～式(4.2-16)称为拉普拉斯变换的时域积分特性或时域积分定理,各象函数的收敛域至少是 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$ 和 $\text{Re}[s] = \sigma > 0$ 相重叠的部分。需要注意的是, $\left(\int_{0_-}^t\right)^n$ 和 $f^{(-n)}(t)$ 的积分下限不同。实际上,式(4.2-12)体现的是因果信号的时域积分特性。下面对其进行证明。

由式(4.1-4)可知:

$$\int_{0_-}^t f(x)dx \leftrightarrow \int_{0_-}^{\infty} \left[\int_{0_-}^t f(x)dx \right] e^{-st} dt$$

令 $u = \int_{0_-}^t f(x)dx$, $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$, 利用分部积分法,有:

$$\begin{aligned} \int_{0_-}^t f(x)dx &\leftrightarrow -\frac{1}{s} \int_{0_-}^{\infty} \left[\int_{0_-}^t f(x)dx \right] d e^{-st} = -\frac{1}{s} e^{-st} \int_{0_-}^t f(x)dx \Big|_{0_-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0_-}^{\infty} f(x) e^{-st} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \int_{0_-}^t f(x)dx \right] + \frac{1}{s} \int_{0_-}^{0_-} f(x)dx + \frac{1}{s} \int_{0_-}^{\infty} f(x) e^{-st} dx \end{aligned}$$

由于 $f(t)$ 为指数阶函数,故其积分也为指数阶函数,所以上式中第一项为零;第二项的积分区间为 $(0_-, 0_-)$,显然积分为零;第三项的积分部分恰好就是拉普拉斯变换的定义式,故其为 $\frac{1}{s}F(s)$ 。所以:

$$\int_{0_-}^t f(x)dx \leftrightarrow \frac{1}{s}F(s)$$

重复利用上式,可证得式(4.2-12)。

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx = \int_{-\infty}^{0_-} f(x)dx + \int_{0_-}^t f(x)dx = f^{(-1)}(0_-) - f^{(-1)}(-\infty) + \int_{0_-}^t f(x)dx$$

假定 $f^{(-1)}(-\infty) = 0$ 且考虑式(4.2-12),对上式求取拉普拉斯变换,有:

$$f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \int_{0_-}^{\infty} f^{(-1)}(0_-) e^{-st} dt + \frac{1}{s}F(s)$$

由于 $f^{(-1)}(0_-)$ 为常数,故上式为:

$$f^{(-1)}(t) \leftrightarrow f^{(-1)}(0_-) \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} dt + \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{(-1)}(0_-)$$

由上式可知,其收敛域至少是 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$ 和 $\text{Re}[s] = \sigma > 0$ 相重叠的部分。

重复利用上式,可证得式(4.2-14)～式(4.2-16)。

例 4.2-8 求 $f(t) = t^2 u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 由于:

$$\left(\int_{0_-}^t\right)^2 u(x)dx = \int_{0_-}^t x u(x)dx = \frac{t^2}{2} u(t)$$

根据常用信号的拉普拉斯变换对 $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ ，并利用式 (4.2-12)，得：

$$\frac{1}{2}t^2u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3}$$

考虑式 (4.2-1)，得：

$$f(t) = t^2u(t) \leftrightarrow \frac{2}{s^3}$$

例 4.2-9 已知因果信号 $f(t)$ 如图 4.2-4 (a) 所示，求其象函数 $F(s)$ 。

解：对 $f(t)$ 求导得 $f'(t)$ ，其波形如图 4.2-4 (b) 所示，信号表达式为：

$$f'(t) = u(t) - u(t-2) - \delta(t-2)$$

根据常用信号的拉普拉斯变换对，考虑式 (4.2-1) 和式 (4.2-3)，可知信号 $f'(t)$ 的象函数 $F_1(s)$ 为：

$$F_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-2s}) - e^{-2s}$$

由于 $f'(t)$ 为因果信号，故利用式 (4.2-12)，有：

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{s} = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-2s}) - \frac{1}{s}e^{-2s}$$

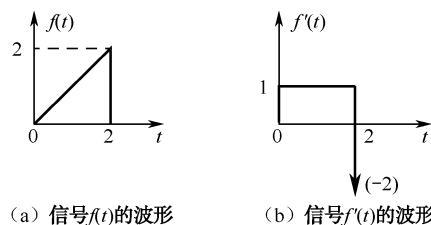


图 4.2-4 信号波形

4.2.8 卷积定理

拉普拉斯变换的卷积定理分为时域卷积定理和复频域卷积定理两个，其中前者的使用更为广泛。

时域卷积定理

若：

$$\begin{aligned} f_1(t) &\leftrightarrow F_1(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_1 \\ f_2(t) &\leftrightarrow F_2(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_2 \end{aligned}$$

则：

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s) \quad (4.2-17)$$

式 (4.2-17) 称为拉普拉斯变换的时域卷积定理，其收敛域至少应为两个象函数 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 收敛域的重叠部分。

复频域 (s 域) 卷积定理

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\eta)F_2(s-\eta)d\eta, \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 + \sigma_2, \sigma_1 < c < \operatorname{Re}[s] - \sigma_2 \quad (4.2-18)$$

式 (4.2-18) 称为拉普拉斯变换的复频域卷积定理。

需要注意的是，对于时域卷积定理，由于两个象函数 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 的收敛域均为收敛坐标的右半平面，因此，式 (4.2-17) 要求时域信号必须为因果信号，这是因为单边拉普拉斯变换的积分下限为 0_- ，即针对因果信号而言的，这一点与傅里叶变换不同。

由于拉普拉斯变换的时域卷积定理使用简便、应用广泛，而复频域卷积定理计算繁琐、应用较少，故在此只对时域卷积定理加以证明。

由式 (2.3-2) 并考虑到 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 均为因果信号，得：

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^\infty f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

由式 (4.1-4) 得:

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow \int_{0-}^{\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

交换上式的积分次序, 有:

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow \int_{0-}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_0^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-st} dt \right] d\tau$$

由式 (4.2-3), 得:

$$\int_0^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau} F_2(s)$$

所以:

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow \int_{0-}^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} F_2(s) d\tau = F_2(s) \int_{0-}^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F_1(s) F_2(s)$$

显然, 收敛域至少为两个象函数 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 收敛域的重叠部分。

例 4.2-10 若信号 $f_1(t) * f_2(t) = (1 - e^{-t})u(t)$, 且 $f_1(t) = u(t)$, 求信号 $f_2(t)$ 的时域表达式。

解: 本题在时域中求解比较困难, 故考虑在复频域中求解。

设信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的象函数分别为 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$, 根据常用信号的拉普拉斯变换对 $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$

和 $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$, 利用式 (4.2-17) 并考虑式 (4.2-1), 可得:

$$f_1(t) * f_2(t) = (1 - e^{-t})u(t) = u(t) - e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)} = F_1(s)F_2(s)$$

而 $f_1(t) = u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} = F_1(s)$, 故有:

$$F_2(s) = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$$

根据表 4.1-1 可得上式的拉普拉斯逆变换为:

$$f_2(t) = e^{-t}u(t)$$

4.2.9 复频域微分和积分特性

若:

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

则:

$$(-t)f(t) \leftrightarrow \frac{dF(s)}{ds}, \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 \quad (4.2-19)$$

$$(-t)^2 f(t) = t^2 f(t) \leftrightarrow \frac{d^2 F(s)}{ds^2}, \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 \quad (4.2-20)$$

$$(-t)^3 f(t) = -t^3 f(t) \leftrightarrow \frac{d^3 F(s)}{ds^3}, \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 \quad (4.2-21)$$

$$\vdots$$

$$(-t)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 \quad (4.2-22)$$

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} F(\eta) d\eta, \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 \quad (4.2-23)$$

式(4.2-19)~式(4.2-22)称为拉普拉斯变换的复频域(s 域)微分特性,式(4.2-23)称为拉普拉斯变换的复频域(s 域)积分特性。下面分别加以证明。

对式(4.1-4)求导,可得:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_{0_-}^{\infty} f(t) \frac{d e^{-st}}{ds} dt = \int_{0_-}^{\infty} (-t) f(t) e^{-st} dt \leftrightarrow (-t) f(t)$$

上式收敛域显然与象函数 $F(s)$ 的收敛域相同,即 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$,由此证得式(4.2-19)。重复利用式(4.2-19),可证得式(4.2-20)~式(4.2-22)。

根据式(4.1-4)改写式(4.2-23)右端象函数表达式,并交换积分顺序,得:

$$\int_s^{\infty} F(\eta) d\eta = \int_s^{\infty} \left[\int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-\eta t} dt \right] d\eta = \int_{0_-}^{\infty} f(t) \left[\int_s^{\infty} e^{-\eta t} d\eta \right] dt = \int_{0_-}^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt$$

显然,上式是 $\frac{f(t)}{t}$ 的拉普拉斯变换式,其收敛域与象函数 $F(s)$ 的收敛域相同,即 $\operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$,式(4.2-23)得证。

例 4.2-11 求信号 $f(t) = t^2 e^{-2t} u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解:根据常用信号的拉普拉斯变换对 $e^{-\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}$,有:

$$e^{-2t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + 2}$$

由式(4.2-20),得:

$$t^2 e^{-2t} u(t) \leftrightarrow \frac{d^2 \left(\frac{1}{s + 2} \right)}{ds^2} = \frac{2}{(s + 2)^3}$$

例 4.2-12 求信号 $f(t) = \frac{\sin t}{t} u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解:由常用信号的拉普拉斯变换对 $\sin t u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1}$,根据式(4.2-23),有:

$$\frac{\sin t}{t} u(t) \leftrightarrow \int_s^{\infty} \frac{1}{\eta^2 + 1} d\eta = \arctan \eta \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$$

4.2.10 初值定理和终值定理

初值定理和终值定理常用于由 $F(s)$ 直接求 $f(0_+)$ 和 $f(\infty)$ 的值,而不必求原函数 $f(t)$ 的情况。

初值定理

设信号 $f(t)$ 不含冲激信号 $\delta(t)$ 及其各阶导数,且:

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

则:

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad (4.2-24)$$

$$f'(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s [s F(s) - f(0_+)] \quad (4.2-25)$$

$$f''(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s [s^2 F(s) - s f(0_+) - f'(0_+)] \quad (4.2-26)$$

式(4.2-24)~式(4.2-26)称为拉普拉斯变换的初值定理。

需要说明的是,由于信号 $f(t)$ 不含 $\delta(t)$ 及其各阶导数,故 $F(s)$ 为真分式。这一结论可作如下解释。由常用信号的拉普拉斯变换对 $\delta(t) \leftrightarrow 1$ 及式(4.2-10)可知:

$$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n \times 1 - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} \delta^{(r)}(0_-), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

由于 $\delta(t)$ 为因果信号, 故 $\delta^{(r)}(0_-) = 0$, 于是:

$$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

因此, 当信号 $f(t)$ 含有 $\delta(t)$ 及其各阶导数时, 其拉普拉斯变换必然包含因式 ks^n (k 为常数, $n = 0, 1, 2, \dots$), 此时象函数 $F(s)$ 必为假分式。也就是说, 若信号 $f(t)$ 不含有 $\delta(t)$ 及其各阶导数, 则其象函数 $F(s)$ 必为真分式。

若 $F(s)$ 为真分式, 则可直接利用初值定理求得初值。若 $F(s)$ 为假分式, 则可将其转化为真分式与整式相加的形式:

$$F(s) = F_1(s) + \sum_{i=0}^n k_i s^i$$

式中, k_i 为常数, $F_1(s)$ 为真分式。将式 (4.2-24) ~ 式 (4.2-26) 中的 $F(s)$ 替换为 $F_1(s)$ 即可利用初值定理求取其初值。

下面解释为何在求信号初值时可用真分式 $F_1(s)$ 替换假分式 $F(s)$ 。由于 $\delta(t)$ 为因果信号, 且其在 0 时刻函数值为无穷大, 其余时刻为 0, 因此可知 $\delta^{(n)}(0_-) = \delta^{(n)}(0_+) = 0$, 即冲激信号及其各阶导数的初值为 0。所以, 利用真分式 $F_1(s)$ 求取信号 $f(t)$ 的初值是可行的。

终值定理

若信号 $f(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时存在, 且:

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \quad \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0, \quad \sigma_0 < 0$$

则:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4.2-27)$$

式 (4.2-27) 称为拉普拉斯变换的终值定理。

需要说明的是, 由于终值定理是取 $s \rightarrow 0$ 的极限, 因此, 在应用终值定理时需保证 $s=0$ 在 $sF(s)$ 的收敛域内, 否则不能应用终值定理。由于 $sF(s)$ 的收敛域可能比 $F(s)$ 的收敛域大, 因此, 若 $F(s)$ 的收敛域包含 $s=0$, 则 $sF(s)$ 的收敛域一定包含 $s=0$, 因此, 终值定理的条件中要求收敛坐标 $\sigma_0 < 0$ 。

下面对上述两个定理分别加以证明。

由式 (4.1-4) 可知:

$$f'(t) \leftrightarrow \int_{0_-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} f'(t) e^{-st} dt + \int_{0_+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

在区间 $(0_-, 0_+)$ 中, $e^{-st} = 1$, 故有:

$$f'(t) \leftrightarrow \int_{0_-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(0_+) - f(0_-) + \int_{0_+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

由式 (4.2-7), 得:

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-) = f(0_+) - f(0_-) + \int_{0_+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

故:

$$sF(s) = f(0_+) + \int_{0_+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

对上式取 $s \rightarrow \infty$ 的极限, 并考虑 $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$, 有:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0_+) + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0_+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(0_+)$$

式 (4.2-24) 得证。采用相同思路可证明式 (4.2-25) 和式 (4.2-26)。

由初值定理的证明过程可知:

$$sF(s) = f(0_+) + \int_{0_+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

对上式取 $s \rightarrow 0$ 的极限，并考虑 $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$ ，有：

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(0_+) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0_+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = f(0_+) + f(\infty) - f(0_+) = f(\infty)$$

由此可证得式 (4.2-27)。

例 4.2-13 已知象函数 $F(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 2}$ ，求 $f(0_+)$ 和 $f(\infty)$ 。

解：由于 $F(s)$ 为真分式，根据式 (4.2-24) 有：

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2}{s^2 + 2s + 2} = 2$$

由于 $sF(s)$ 的极点坐标为 $p_{1,2} = -1 \pm j$ ，故其收敛域为 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 = -1$ ，故 $s=0$ 在其收敛域内，根据式 (4.2-27) 有：

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^2}{s^2 + 2s + 2} = 0$$

例 4.2-14 已知象函数 $F(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 2}$ ，求 $f(0_+)$ 和 $f(\infty)$ 。

解：由于 $F(s)$ 为假分式，故将其转化为真分式 $F_1(s)$ 与整式相加的形式：

$$F(s) = 1 + F_1(s) = 1 + \left(-\frac{2s + 2}{s^2 + 2s + 2} \right)$$

根据式 (4.2-24) 并用 $F_1(s)$ 替换式中的 $F(s)$ ，得：

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-2s^2 - 2s}{s^2 + 2s + 2} = -2$$

由于 $sF(s)$ 的极点坐标为 $p_{1,2} = -1 \pm j$ ，故其收敛域为 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 = -1$ ，故 $s=0$ 在其收敛域内，根据式 (4.2-27) 有：

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{s^2 + 2s + 2} = 0$$

作为本节的总结，表 4.2-1 列出了单边拉普拉斯变换的性质。

表 4.2-1 单边拉普拉斯变换的性质（表中的 σ_0 为收敛坐标）

名 称	时域 $f(t) \leftrightarrow F(s)$	复频域
定义	$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \right] u(t)$	$F(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{0_+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \sigma > \sigma_0$
线性性质	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s), \text{Re}[s] = \sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \text{Re}[s] = \sigma > a\sigma_0$
时移特性	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-st_0} F(s), \text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$
	$f(at-t_0)u(at-t_0)$	$\frac{1}{a} e^{-\frac{t_0}{a}s} F\left(\frac{s}{a}\right), \text{Re}[s] > a\sigma_0$
复频移特性	$f(t)e^{st}$	$F(s-s_a), \text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0 + \sigma_a$
共轭特性	$f^*(t)$	$F^*(s^*), \text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$
时域微分特性	$f'(t)$	$sF(s) - f(0_-)$
	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$
	$f'''(t)$	$s^3 F(s) - s^2 f(0_-) - sf'(0_-) - f''(0_-)$

续表

名 称	时域 $f(t) \leftrightarrow F(s)$	复频域
时域微分特性	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0_-), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$
时域积分特性	$\left(\int_{0_-}^t f(x) dx \right)$	$s^{-1} F(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \max(\sigma_0, 0)$
	$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$	$s^{-1} F(s) + s^{-1} f^{(-1)}(0_-)$
	$f^{(-2)}(t) = \left(\int_{-\infty}^t \right)^2 f(x) dx$	$s^{-2} F(s) + s^{-2} f^{(-1)}(0_-) + s^{-1} f^{(-2)}(0_-)$
	$f^{(-3)}(t) = \left(\int_{-\infty}^t \right)^3 f(x) dx$	$s^{-3} F(s) + s^{-3} f^{(-1)}(0_-) + s^{-2} f^{(-2)}(0_-) + s^{-1} f^{(-3)}(0_-)$
	$f^{(-n)}(t) = \left(\int_{-\infty}^t \right)^n f(x) dx$	$s^{-n} F(s) + \sum_{m=1}^n s^{-(n-m+1)} f^{(-m)}(0_-), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \max(\sigma_0, 0)$
时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s), \operatorname{Re}[s] = \sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$
s 域卷积定理	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\eta) F_2(s-\eta) d\eta$ $\operatorname{Re}[s] > \sigma_1 + \sigma_2, \sigma_1 < c < \operatorname{Re}[s] - \sigma_2$
s 域微分特性	$(-t)^n f(t)$	$\frac{d^n F(s)}{ds^n}, \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$
s 域积分特性	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\eta) d\eta, \operatorname{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$
初值定理	$f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s), F(s) \text{ 为真分式}$ $f'(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sF(s) - f(0_+)], F(s) \text{ 为真分式}$ $f''(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[s^2 F(s) - sf(0_+) - f'(0_+)], F(s) \text{ 为真分式}$	
终值定理	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s), s=0 \text{ 在 } sF(s) \text{ 的收敛域内}$	

练习题

4.2-1 已知信号 $f(t) = \sin(2t)u(t)$ ，求下列信号的拉普拉斯变换。

1) $f_1(t) = f\left(\frac{1}{5}t - \frac{1}{5}\right)$ 2) $f_2(t) = tf\left(\frac{1}{5}t\right)$ 3) $f_3(t) = e^{-2t}f(5t)$

4.2-2 已知信号 $f(t) = t[u(t) - u(t-1)] + (2-t)[u(t-1) - u(t-2)]$ ，求其拉普拉斯变换。

4.2-3 求下列信号的单边拉普拉斯变换。

1) $f_1(t) = \int_0^t \sin(\pi x) dx$ 2) $f_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}[\sin(\pi t)u(t)]$

4.2-4 根据下列象函数求相应原函数 $f(t)$ 的初值 $f(0_+)$ 。

1) $F(s) = \frac{1}{s+2}$ 2) $F(s) = \frac{s^2 + s}{2s^2 + 2s + 1}$

4.2-5 根据下列象函数求相应原函数 $f(t)$ 的终值 $f(\infty)$ 。

1) $F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2(s^2 + 4)}$ 2) $F(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{(s+1)(s+3)(s+5)}$

4.3 拉普拉斯逆变换

求取拉普拉斯逆变换的方法主要有定义法、性质法、查表法、部分分式展开法、留数法以及数学软件法。

定义法是利用拉普拉斯逆变换的定义式直接求取拉普拉斯逆变换。该方法思路清晰，但由于

积分路径较为复杂，求解过程较为困难，一般很少采用。

性质法是利用拉普拉斯变换的性质和常用信号的拉普拉斯变换对求解拉普拉斯逆变换，该方法求解思路灵活，但适用范围有限，有时可能因为条件不满足而无法使用。

查表法是利用拉普拉斯逆变换表直接求解拉普拉斯逆变换，该方法求解方法简单，但适用范围有限，对于部分象函数无法采用此种方法求解。

留数法是根据复变函数理论，将拉普拉斯逆变换定义式中的积分运算转化为复变函数极点上的留数计算，从而简化求取原函数的计算过程。它比部分分式展开法应用范围更广，留数法不仅能够处理有理象函数，还能处理无理象函数，但该方法的求解过程较为繁琐。

数学软件法是利用 MATLAB 或 Mathematics 等数学软件求取拉普拉斯逆变换。该方法使用方便，但需要熟悉相关软件使用方法。

本节主要介绍部分分式展开法。需要说明的是，任何假分式均可分解为整式和真分式两部分，而利用冲激信号及其各阶导数的变换对即可求解整式部分的拉普拉斯逆变换。下面举例说明假分式如何分解为整式和真分式，以及如何求解整式的拉普拉斯逆变换。

现有有理分式：

$$X(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_m s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \cdots + d_1 s + d_0}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0} \quad (4.3-1)$$

式 (4.3-1) 中的系数 $c_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$ 和 $d_j, j = 0, 1, 2, \cdots, m$ 均为实数，其分母多项式 $C(s)$ 称为象函数 $X(s)$ 的特征多项式，方程 $C(s)=0$ 称为特征方程，它的根 p_i 称为特征根或 $X(s)$ 的极点，也称为 $X(s)$ 的固有频率或自然频率。

对于式 (4.3-1)，若 $m < n$ ，则为真分式；若 $m \geq n$ ，则为假分式，此时可利用多项式除法将其分解为整式和真分式之和的形式：

$$X(s) = E(s) + F(s) = E(s) + \frac{B(s)}{A(s)} \quad (4.3-2)$$

式 (4.3-2) 中， $E(s)$ 为整式， $F(s)$ 为真分式。

下面举例说明假分式分解为整式和真分式的过程及整式部分拉普拉斯逆变换的求解方法。

如：

$$X(s) = \frac{2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 10}{s^2 + 6s + 6}$$

可见，该分式为假分式，故可利用多项式除法将其分解为整式和真分式：

$$\begin{array}{r} 2s^2 - 9s + 46 \\ s^2 + 6s + 6 \overline{) 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 10} \\ \underline{2s^4 + 12s^3 + 12s^2} \\ -9s^3 - 8s^2 + 5s \\ \underline{-9s^3 - 54s^2 - 54s} \\ 46s^2 + 59s + 10 \\ \underline{46s^2 + 276s + 276} \\ -217s - 266 \end{array}$$

故象函数可分解为：

$$X(s) = \frac{2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 10}{s^2 + 6s + 6} = 2s^2 - 9s + 46 + \frac{-217s - 266}{s^2 + 6s + 6} = E(s) + F(s)$$

显然，上式中 $E(s)$ 为整式， $F(s)$ 为真分式。