第 3 章

技术经济学分析基础

本章学习目的：

1. 全面理解资金时间价值的含义。
2. 明晰利息与利率、单利与复利、名义利率与实际利率、现值与终值等概念。
3. 掌握一次性支付和等额支付类型的资金等值计算的各种方法，并能根据需要加以运用。
4. 了解等差系列、等比系列现金流量的等值计算。

【开篇案例】

玫瑰花的时间价值

拿破仑 1797 年 3 月在卢森堡第一国立小学演讲时说了这样一番话:“为了答谢贵校对我，尤其是对我夫人约瑟芬的盛情款待，我不仅今天呈上一束玫瑰花，并且在未来的日子里，只要我们法兰西存在一天，每年的今天我将亲自派人送给贵校一束价值相等的玫瑰花，作为法兰西与卢森堡友谊的象征。”

时过境迁，拿破仑穷于应付连绵的战争和此起彼伏的政治事件，最终惨败而流放到圣赫勒拿岛，把卢森堡的诺言忘得一干二净。可卢森堡这个小国对这位“欧洲巨人与卢森堡孩子亲切、和谐相处的一刻”念念不忘，并载入他们的史册。

1984 年底，卢森堡旧事重提，向法国提出违背“赠送玫瑰花”诺言案的索赔：要么从 1797 年起，用 3 路易作为一束玫瑰花的本金，以 5 厘复利(即利滚利)计息全部清偿这笔玫瑰案；要么法国政府在法国各大报刊上公开承认拿破仑是个言而无信的小人。起初，法国政府准备不惜重金赎回拿破仑的声誉，但却被电脑算出的数字惊呆，原本 3 路易的许诺，本息竟高达 1 375 596 法郎。经过冥思苦想，法国政府斟词酌句地答复：“以后，无论在精神上还是物质上，法国将始终不渝地对卢森堡大公国的中小学教育事业予以支持与赞助，来兑现我们的拿破仑将军那一诺千金的玫瑰花信誉。”这一措辞最终得到了卢森堡人民的谅解。

资料来源：根据网络资料整理。

技术经济学的核心是进行经济评价。资金的时间价值和资金等值的概念是进行经济评价的一个核心内容。本章的重点是掌握资金时间价值这一重要概念，并通过学习利息与利率的计算，掌握如何计算资金的时间价值以及理解资金的等额和等值的普通复利公式。

3.1　资金的时间价值

3.1.1　问题的导入

生产实践活动中必须考虑时间因素，让我们来看看以下两个问题。

① 今天的 1 000 元与明年今日的 1 000 元是否具有相同价值？

② 有两个投资方案 A 与 B，它们的初始投资都是 12 000 元。在寿命期 4 年中总收益一样，但每年的收益值不同，具体数据列入表 3-1 中。通常人们直观上会认为方案 A 的经济效果比方案 B 好，为什么？

表 3-1　两个投资方案的投资额和年收益情况

单位：元

年　末	方　案　A	方　案　B
0	−12 000	−12 000
1	8 000	2 000
2	6 000	4 000
3	4 000	6 000
4	2 000	8 000

以上两个问题的答案都与资金的时间价值有关。今天可以用来投资的一笔资金，即使不考虑通货膨胀因素，比起将来同等数量的资金也更有价值。因为当前可用的资金能够立即用来投资，并在项目投产后获得更多的资金。而将来可取得的资金，则不能在今天投资，也就不能适时获得更多的资金。

3.1.2　资金时间价值表现形式

资金是社会再生产过程中财产物资的货币表现。任何项目的建设和运行，任何技术方案的实施，都要求投入一定量的资金，而且这些资金的投入都有一个时间上的延续过程。也就是说，对于投资者，资金的投入与收益的获得往往构成一个时间上有先后的现金流量序列。资金是具有“时间价值”的，因为在不同的时间付出或得到同样数额的资金在价值上是不等的。也就是说，资金的价值会随时间发生变化。资金时间价值的表现形式，可以从两个方面来理解。

第一，从投资者的角度来看，资金的增值特征使资金具有时间价值。资金随着时间的推移，也就是和时间的结合(当然，离不开人的参与)，其价值会增加，这种现象称为资金增值。资金是一种社会资源，是属于商品经济范畴的概念，在市场经济条件下，资金在社会生产过程中处于循环、周转的变化、运动中。资金的运动伴随着生产与交换的进行，生产与交换活动会给投资者带来利润，表现为资金的增值。资金增值的实质是劳动者在生产过程中创造了剩余价值。

第二，从消费者的角度来看，资金的时间价值体现为对放弃现期消费的损失所应做的必要补偿。例如，资金一旦用来投资(例如，消费者用自己的收入去购买各种有价证券，或将收入存入银行，从消费者的角度讲，是一种投资行为)，就不能用于现期消费。牺牲目前消费的目的是为了能在将来的消费中得到比现期消费更大的效用，个人储蓄及投资的动机和国家积累的目的都是如此。因此，从消费者的角度讲，资金的时间价值体现为对放弃现期消费的损失的一种必要补偿。

资金时间价值的大小取决于多方面因素，从投资角度来看主要有以下几个方面。

① 投资利润率，即单位投资所能取得的利润。这是支配投资行为的诱因，投资利润率高，资金时间价值就大，反之就小。

② 通货膨胀率，即对因货币贬值造成的损失所应做的补偿。

③ 风险因素，即对因投资风险的存在可能带来的损失所应做的补偿。

因此，资金的时间价值表明，在不同时点上对投资项目所投入的资金和所取得的收益，它们的价值是不同的。为了获得经济效果的正确评价，就必须把不同时点的资金换算成同一时点上的资金，然后在相同的时间基础上进行比较。

在技术经济分析、评价中，对资金时间价值的计算方法与银行利息的计算方法基本相同。实际上，银行利息也是一种资金时间价值的表现形式。

3.1.3 现金流量

1．现金流量的概念

一个投资机会所有的资金支出，称为现金支出(–)；所有的资金收入，称为现金收入(＋)。而现金流量就是实际发生的现金支出和现金收入所组成的资金运动。

企业各年度现金流量的计算公式为

$$\text{现金流量} = (\text{年销售收入} - \text{年销售成本}) \times (1 - \text{税率}) + \text{年折旧费} \tag{3-1}$$

【例 3-1】 一设备投资额为 130 万元，使用年限 6 年，假定使用年限终了时固定资产残值为 10 万元，每年折旧费为 20 万元，每年销售收入 100 万元，年经营成本 50 万元，所得税率 50%，试计算各年现金流量与整个投资使用年限中的现金流量。

解：因为，0 年年末只有方案投资额 130 万元，它是现金的支出，所以该年末的现金流量为–130 万元。

由式(3-1)计算可得 1 至 5 年年末的现金流量为

① 年销售收入　(+)100 万元

② 年经营成本　(–)50 万元

③ 年折旧费(支出)　(–) 20 万元(② ＋ ③：年销售成本)

④ 年需纳税的收入　(+)30 万元(①–②–③)

⑤ 年税金　(–)15 万元(④×50%)

⑥ 年折旧费(收入)　(+) 20 万元

⑦ 年净利　(+)15 万元(④–⑤)

⑧ 年现金流量　(+)35 万元(⑥ ＋ ⑦(利用式(3-1)也可计算)

第 6 年年末的现金流量等于 35 万元加上残值 10 万元的回收，即为 45 万元。

整个投资使用年限中的现金流量计算结果如表 3-2 所示。表中第 1 年至第 6 年年末的现金支出为：年经营成本 ＋ 年税金。年折旧费在分析时既作了支出，也作了收入，所以，在表中收、支均可不考虑。

表 3-2　投资使用年限中的现金流量计算表

单位：万元

年　末	现金支出	现金收入	现金流量
第 0 年年末	–130		–130
第 1 年年末	–65	100	35
第 2 年年末	–65	100	35
第 3 年年末	–65	100	35
第 4 年年末	–65	100	35
第 5 年年末	–65	100	35
第 6 年年末	–65	110	35 + 10 = 45

2．现金流量图

一个投资方案的实施，往往要延续一段时间。在方案使用年限内，各种现金的收入和支出的数额和发生的时间都不尽相同，为了便于分析不同时点上的现金收入和现金支出情况，计算其现金流量，常常借助于现金流量图这一简洁有效的工具。

现金流量图，就是将日常投资方案在使用年限内所发生的现金收入和现金支出，按其所发生的时间顺序及一定的规则，用图的形式表达出来。主要有以下几种作图的规则。

① 以横轴作为时间坐标，将它等分成若干间隔，每一间隔代表一个计息周期，即时间单位，它可以是年、月、日等。0 代表方案使用年限的开始，表示第 0 年年末，即第 1 年年初，1 代表第 1 年年末即第 2 年年初，其他以此类推。

② 以纵向的箭线作为现金的收入和支出情况。

③ 箭线纵向上表示现金收入（流入），箭线纵向下表示现金支出（流出），一般要求箭线的长短要与现金流量绝对值的大小成比例。

④ 借、贷方的现金流量图正好相反。

为了计算上的方便和统一，画现金流量图时规定，若无特别说明，计息期单位为年，投资的发生在第一年年初即第 0 年年末，销售收入、经营成本、折旧、税收和残值等发生在各年年末。

绘制【例 3-1】的现金流量图，如图 3-1 所示（单位：万元）。

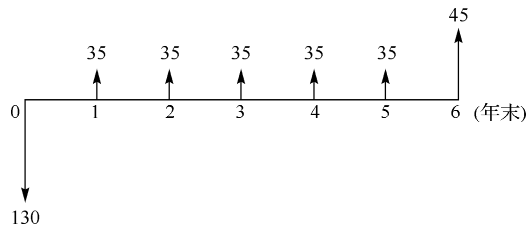

图 3-1　【例 3-1】现金流量图

3.1.4　利息与利率

1．利息和利率的含义

（1）利息

利息是指占用资金所付的代价（或放弃使用资金所得的补偿）。例如，将一笔资金存入银行，这笔资金就称为“本金”，经过一段时间之后，储户可以在本金之外再获得一笔资金，这笔除本金之外另获得的资金，就是利息。

（2）利率

利率是在一个计息周期内所得的利息额（I）与借贷资金（即本金 P）之比，一般用百分数表示。用 i 表示利率，其表达式为 $i = I/P \times 100\%$。利息是单位本金经过一个计息周期后的增值额。

2．利息的计算

资金利息的大小取决于利率的高低和资金占用时间的长短。在同等利率的情况下，占用的时间越长，则利息越多。计算利息的方法有单利和复利两种。

（1）单利

仅以本金计算利息，且所支付的利息与占用资金的时间、本金及利率成正比时，此利息就是单利。如果 I 表示利息，P 为本金，i 为利率，n 为计息周期数，则利息为

$$I = Pni \tag{3-2}$$

本利和 F 为

$$F = P + Pni = P(1 + ni) \tag{3-3}$$

【例 3-2】 某人有现金 5 000 元，存 3 年定期，年利率 5%，试计算第三年末的本利和为多少？

解：$F = P(1 + ni) = 5\,000(1 + 3\times5\%) = 5\,750$(元)

我国现行的银行利率和国库券的利息就是以单利计算的，计算周期为“年”。

(2)复利

所谓复利是指用本金和前期累计利息总额之和进行计息，即除最初的本金要计算利息外，每一计息周期的利息都要并入本金进行计息，俗称“利滚利”。下面举例说明复利计算的原理。

【例 3-3】 某企业以 6%的年利率向银行贷款 1 000 万元，贷款期 5 年，以复利计算，问 5 年后企业应支付多少利息？如果以单利计算，情况又会如何？

解：根据复利的定义，其计算过程如表 3-3 所示。

表 3-3　年本利和计算表

单位：万元

年	年初欠款	年末利息额	年末欠额(本利和)
1	1 000.00	1 000.00×6% = 60.00	1 000.00 + 60.00 = 1 060.00
2	1 060.00	1 060.00×6% = 63.60	1 060.00 + 63.60 = 1 123.60
3	1 123.60	1 123.60×6% = 67.42	1 123.60 + 67.42 = 1 191.02
4	1 191.02	1 191.02×6% = 71.46	1 191.02 + 71.46 = 1 262.48
5	1 262.48	1 262.48×6% = 75.75	1 262.48 + 75.75 = 1 338.23

故所求的利息为：1 338.23−1 000.00 = 338.23(万元)

以单利计算时的利息为：$Pni = 1\,000.00\times5\times6\% = 300.00$(万元)

从上例可以看到，当单利和复利计算的利率相等时，资金的复利的利息大于单利的利息，且时间越长，差别越大。由于利息是资金时间价值的表现，而时间是连续不断的，所以利息也是不断发生的。从这个意义上来说，复利比单利更能反映资金的时间价值。因此在技术经济分析中，绝大多数情况采用复利计算。在本教材中，除特别指出外，所讨论的利息问题都采用复利计算方法。

(3)普通复利和连续复利

复利分为普通复利和连续复利两大类。它们的区别在于：普通复利是按期(年、季、月)计息；而连续复利则是按瞬时计息。在实际应用中通常采用普通复利计息方法。其中又因支付利息方式的不同有若干种计算方法。例如，某企业向银行借贷了一笔款，偿还本利的方式可以有以下几种：到期本利一次偿还；每期(年、季、月)偿还相同数额的资金；每期(年、季、月)偿还利息，贷款期末将本一次还清；每期(年、季、月)偿还等差数额的资金，等等。

下面将详细讨论普通复利公式，以解答这些不同的偿还情况。

(4)名义利率和实际利率

通常习惯的利息期都是以年来划分的，而且为了讨论方便，在以上复利公式的讨论中，其利息期都是以年为时间单位的，即按年复利计算。但在实际工作中，有时利息期更短些，如半年、1 季度、1 月等。因此，利息期短于 1 年的利率一般通过下述方式将其转化为年利率。

例如，利息期为半年，每期的利率为 3%，那么通常称此利率为“年利率 6%，半年复利一次”。这里的年利率 6%就叫年名义利率，实际发生的年利率不是 6%，而是比 6%要大一些。

1）实际利率

实际利率是指在规定的最小计息周期数的计息利率。例如，银行活期存款的年利率 2.4%，它的周期为年，最小计息周期为 1 年。也有的贷款规定的最小计息周期为半年或 1 季度等，这时的实际利率就是指半年或 1 季度的利率。

【例 3-4】 如果利息期为半年，利率为 3%，那么 1 年的实际利率为多少？

解：如果现有资金为 P 元，最小计息周期是半年，即半年的实际利率为 3%，要求折算成计息期为 1 年的利率。

在单利情况下：

年末的终值 $F = P(1 + 2\times3\%) = 1.06P$

所获利息额 $I = 1.06P - P = 0.06P$

年利率 $i = (I/P)\times100\% = (0.06P/P\times100\%) = 6\%$

可见 6%就是单利的实际年利率。

在复利情况下：

年末的终值 $F = P(1 + 3\%)^2 = 1.060\ 9P$

所获利息额 $I = 1.060\ 9P - P = 0.060\ 9P$

年利率 $i = (I/P)\times100\% = (0.060\ 9P/P)\times100\% = 6.09\%$

可见 6.09%就是利息期为半年，利率为 3%复利的年实际利率。

2）名义利率

利息期的实际利率与计息期次数的乘积称为名义利率。如果设名义利率为 r，利息期的实际利率为 i，计息次数为 n，那么名义利率 $r = in$。

如**【例 3-4】**中利息期的实际利率 $i = 3\%$，计算其年利率的次数 $n = 2$，那么年名义利率 $r = 3\%\times2 = 6\%$。可见以单利计算时年实际利率就等于年名义利率，而以复利计算时实际利率会大于名义利率。

以后除特别说明外，实际利率都用年利率表示。

3）实际利率与名义利率的关系

假设年名义利率 r 和一年中的计息次数 n 已知，那么一个计息期内的实际利率为 r / n。

此时 1 年年末的终值 $F = P(1 + r/n)^n$，年利息 $I = F - P$

故年实际利率 $i = I/P = (1 + r/n)^n - 1$

当 $n = 1$，即每年复利一次时，名义利率等于实际利率（$i = r$）。

当 $n = \infty$，即相邻两次复利计算的时间间隔趋于零时，这时的复利计算就是连续复利计算。那么此时的实际利率为

$$i = \lim_{n\to\infty}+\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1 = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r - 1 = \mathrm{e}^r - 1$$

e 为无理数，其值为 2.718 28…

在技术经济分析中，一般总是采用实际利率，而不是名义利率。

3.1.5 普通复利公式

1．普通复利公式符号规定及意义

普通复利公式符号有以下几种规定：

i——每一利息期的利率，常指年利率；

n——利息期数，一般指年数；

P——资金的现值，即本金；

F——资金的未来值，也称终值，即本利和；

A——年金，也称年值，表示在计息期内，每期期末等额支出或收入的资金额；

C——等差额，也称梯度，指每期的支出或收入的资金是均匀递增或均匀递减，相邻两期的资金支出额或收入额之差相等。

另外规定，除非特殊说明，各项资金的支出或收入都发生在计息期初或期末。普通复利公式是指以规定的时距(一年、一季等)复利计息，按规定的时距进行支付的复利计算公式。根据资金的支付方式，可将利息公式分为三类来讨论。

2．一次支付利息公式

所谓一次支付，简单地说就是借款在借款期终时本利一次还清。其现金流量图如图 3-2 所示。

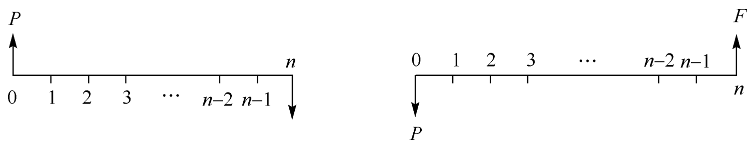

图 3-2　一次支付的现金流量图

(1)一次支付复利公式

假设已知现值为 P，利率为 i，期数为 n，求终值 F。根据复利的定义可将一次支付复利公式推导如表 3-4 所示。

表 3-4　一次支付复利公式的建立

年	年　初　额	年末利息额	年末本利和
1	P	Pi	$F_1=P+Pi=P(1+i)$
2	$F_1=P(1+i)$	$F_1i=P(1+i)i$	$F_2=F_1+F_1i=F_1(1+i)=P(1+i)(1+i)=P(1+i)^2$
3	$F_2=P(1+i)^2$	$F_2i=P(1+i)^2$	$F_3=F_2+F_2i=F_2(1+i)=P(1+i)^2(1+i)=P(1+i)^3$
…	…	…	…
n	$F_{n-1}=P(1+i)^{n-1}$	$F_{n-1}i=P(1+i)^{n-1}i$	$F_n=F_{n-1}+Fi=F_{n-1}(1+i)=P(1+i)^{n-1}(1+i)=P(1+i)^n$

从表 3-4 可以得出一次支付复利公式为

$$F=P(1+i)^n \tag{3-4}$$

称 $(1+i)^n$ 为一次支付复利因子，记为 $(F/P, i, n)$。它的含义表示已知现值 P、利率 i 和期数 n，求终值 F。所以，式(3-4)可写为

$$F = P(F/P, i, n) \tag{3-5}$$

为了便于计算，将一次支付复利因子及后面介绍的各复利因子在不同的 i 和 n 情况下的值，预先算好列成表，此表称为间歇复利表(见附录)，以供计算时查阅。

将【例 3-3】用式(3-4)和式(3-5)查表计算可得

$$P = 1\,000\text{ 万元}，n = 5\text{ 年}，i = 6\%$$
$$F = P(1+i)^n = 1\,000\times(1+6\%)^5 = 1\,338.23(\text{万元})$$

查表得$(F/P, 6\%, 5) = 1.338$

所以 $F = P(F/P, 6\%, 5) = 1\,000\times1.338 = 1\,338.00$(万元)

可以发现，两者存在着一定的误差。但是，对于技术经济分析来说，其精度是足够的。

(2)一次支付现值公式

如果已知终值 F，且利率 i 和期数 n 为已知，求现值 P，则由式(3-4)可以推得

$$P = F[1/(1+i)^n] \tag{3-6}$$

称$[1/(1+i)^n]$为一次支付现值因子，记为$(P/F，i，n)$。因此，式(3-6)可写为

$$P = F(P/F，i，n) \tag{3-7}$$

【例 3-5】 如果银行利率为 4%，为了在 5 年末得到 10 万元，现应存入银行多少钱?

解：已知 $F = 10$ 万元，$i = 4\%$，$n = 5$ 年

由式(3-6)可得

$$P = F[1/(1+i)^n] = 10\times(1+4\%)^{-5}$$
$$= 10\times0.821\,9 = 8.219(\text{万元})$$

即现在需存入银行 8.219 万元。

3．等额多次支付利息公式

等额多次支付是指在某年一次借入或借出一笔资金，而在今后的计息期内，每年年末偿还或收回相等数额的资金，并在计息期的最后一年年末提取剩余的全部本利；或者在每年年末借入或借出等额资金，并在规定期的期末一次偿还或收回全部的本利等。其现金流量图如图 3-3 和图 3-4 所示。

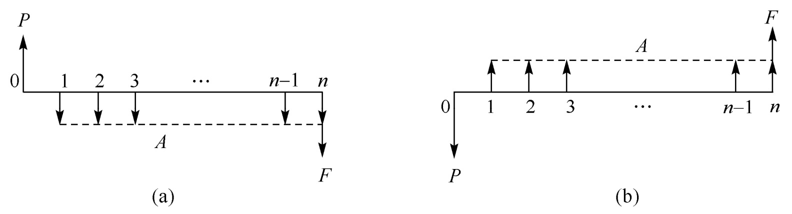

图 3-3　等额多次支付的现金流量图

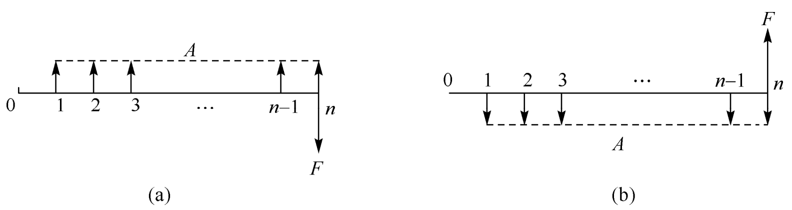

图 3-4　等额多次支付的现金流量图

(1)等额多次支付复利公式

等额多次支付复利公式反映的是每年年末等额支出或收入相同的资金，在期末一次性收回或支出全部的资金。现金流量图参见图 3-4。等额多次支付复利计算是已知年值 A、期数 n 和利率 i，求终值 F。终值 F 的求得，可利用一次支付复利式(3-4)分别计算各年年末到 n 年年末的终值，然后求其和就是所求的终值 F，如表 3-5 所示。

表 3-5　等额多次支付复利公式的建立

年　末	年　值	期 末 终 值
1	A	$F_1 = A(1+i)^{n-1}$
2	A	$F_2 = A(1+i)^{n-2}$
3	A	$F_3 = A(1+i)^{n-3}$
:	:	:
:	:	:
$n-1$	A	$F_{n-1} = A(1+i)$
n	A	$F_n = A$

那么期末本利和(终值)为

$$F = \sum_{j=1}^{n} F_i = A(1+i)n-1 + A(1+i)n-2 + A(1+i)n-3 + \cdots + A(1+i) + A$$

$$= A[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \cdots + (1+i) + 1] \tag{A}$$

(A)式两端同乘$(1+i)$得

$$iF = A[(1+i)^n - 1] \tag{B}$$

即

$$F = A[(1+i)^n - 1]/i \tag{3-8}$$

称$[(1+i)^n-1]/i$ 为等额多次支付复利因子，记为$(F/A，i，n)$。所以式(3-8)也可写为

$$F = A(F/A，i，n) \tag{3-9}$$

【例 3-6】 某建设项目总投资额为 20 亿元，计划在每年年末投资 5 亿元，分 4 年投资完，资金借贷年利率为 10%。问第 4 年年末应偿还总投资的本利和为多少？如果在第 5 年年末偿还，那么应偿还总投资的本利和又是多少？

解：根据题意绘制项目的现金流量图，如图 3-5 和图 3-6 所示。

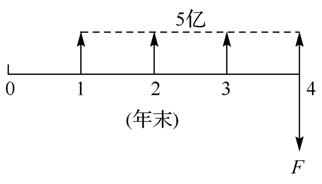

图 3-5　第 4 年年末还款的项目现金流量图

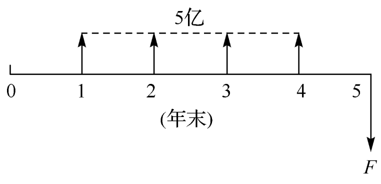

图 3-6　第 5 年年末还款的项目现金流量图

① $A = 5$ 亿元，$n = 4$ 年，$i = 10\%$

$$F = A[(1+i)^n - 1]/i = 5[(1+10\%)^4 - 1]/10\% = 23.21(亿元)$$

根据式(3-9)，查复利表可得

$$F=A(F/A,\ i,\ n)=5(F/A,\ 10\%,\ 4)=5\times4.641$$
$$=23.21（亿元）$$

② 在第一问的基础上，利用式(3-4)，从第4年折到第5年计算得

$$F=A(F/A,\ 10\%,\ 4)(F/P,\ 10\%,\ 1)=5\times4.641\times1.1$$
$$=25.53（亿元）$$

(2)等额多次支付偿债基金公式

基金指的是具有专门用途的资金，那么，从词义上理解，等额多次支付偿债基金就是指，为了在期末偿还债务 F 而预先准备的年金。如果已知终值 F，期数 n，利率 i，根据式(3-8)得

$$A=F\{i/[(1+i)^n-1]\} \tag{3-10}$$

称 $i/[(1+i)^n-1]$ 为等额多次支付偿债基金因子，记为 $(A/F,\ i,\ n)$。于是式(3-10)可写为

$$A=F(A/F,\ i,\ n) \tag{3-11}$$

【例 3-7】 某企业欲积累一笔福利基金，用于5年后改善职工的物质生活条件。此项投资总额为2 000万元，如果银行利率为8%，问每年至少要存款多少？

解：已知 $F=2\ 000$ 万元，$i=8\%$，$n=5$ 年

由式(3-10)可得每年存款额为

$$A=F\{i/[(1+i)^n-1)]\}=2\ 000\times\{8\%/[(1+8\%)^5-1]\}$$
$$=340.9（万元）$$

由式(3-11)查表可得

$$A=F(A/F,\ i,\ n)=2\ 000\times(A/F,\ 8\%,\ 5)=2\ 000\times0.170\ 46$$
$$=340.92（万元）$$

(3)等额多次支付现值公式

若在计算期内的每年年末等额的收入或支出的资金，在利率不变的条件下，其经济等值的现值为多少？即已知 F、n、i，求 A，其现金流量图如图3-7所示。

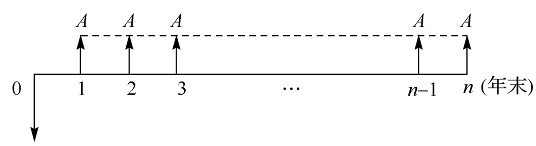

图 3-7 等额多次支付现金流量图

利用等额多次支付复利公式 $F=A(F/A, i, n)$ 和一次支付现值公式 $P=F[1/(1+i)^n]$，可推得等额多次支付现值公式。

将前式代入后式得

$$P=\{A[(1+i)^n-1]/i\}[1/(1+i)^n]$$
$$=A[(1+i)^n-1]/[i(1+i)^n] \tag{3-12}$$

称 $[(1+i)^n-1]/[i(1+i)^n]$ 为等额多次支付现值因子，记为 $(P/A,\ i,\ n)$。于是，式(3-12)可写为

$$P=A(P/A,\ i,\ n) \tag{3-13}$$

【例 3-8】 采用某项专利技术，每年平均可获利200万元，在年利率10%的情况下，第5年年末即可连本带利全部收回，问期初的一次性投入额为多少？

解：根据题意可绘制问题的现金流量图(请读者练习绘制)。

已知 $A=200$ 万元，$n=5$ 年，$i=10\%$

根据式(3-12)，该问题期初的一次性投入额为

$$\begin{aligned}P&=A[(1+i)^n-1]/[i(1+i)^n]\\&=200[(1+10\%)^5-1]/[10\%(1+10\%)^5]\\&=200\times3.790\,8=758.16(\text{万元})\end{aligned}$$

或根据式(3-13)查表得

$$\begin{aligned}P&=A(P/A，i，n)=200(P/A，10\%，5)\\&=200\times3.791=758.2(\text{万元})\end{aligned}$$

(4)等额多次支付资本回收公式

等额多次支付资本回收公式是等额多次支付现值公式的逆运算，也就是期初的一笔资金(如借入)，在规定期内，每期末应等额偿还多少资金。即已知现值 P，利率 i，期数 n，求与之等值的等额年金。由式(3-12)可直接导出

$$A=P\{i(1+i)^n/[(1+i)^n-1]\}\tag{3-14}$$

称$\{i(1+i)^n/[(1+i)^n-1]\}$为等额多次支付资本回收因子，记为$(A/P，i，n)$。于是式(3-14)可写成

$$A=P(A/P，i，n)\tag{3-15}$$

【例 3-9】 某工程项目一次投入 3 000 万元，设年利率为 8%，分 5 年，每年年末等额回收，问每年至少应回收多少资金才能收回全部投资？

解：根据题意可绘制问题的现金流量图(请读者练习绘制)。

已知 $P=3\,000$ 万元，$i=8\%$，$n=5$ 年

由式(3-14)可得

$$\begin{aligned}A&=P\{i(1+i)^n/[(1+i)^n-1]\}\\&=3\,000\times\{0.08\times(1+0.08)^5/[(1+0.08)^5-1]\}\\&=3\,000\times0.250\,46=751.4(\text{万元})\end{aligned}$$

也可查表得等额多次支付资本回收因子$(A/P，8\%，5)=0.250\,46$，再利用式(3-15)计算。

4．等差支付系列利息公式

在许多实际的技术经济问题中，资金的支付在各年经常是不等的，如设备的维修费用逐年增加。如果资金支付额的年增加值或年减少值相等时，就称其为等差支付。这种情况如果用前面介绍的 6 个公式就不适用了，当然可以用一次支付的公式逐年计算，但这样既烦琐，工作量也大。图 3-8 是两种典型的等差支付系列的现金流量图。

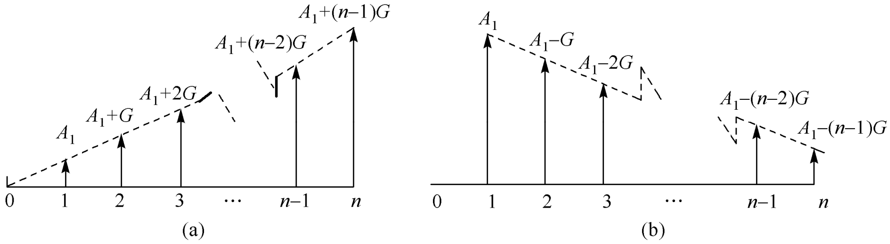

图 3-8　等差支付现金流量图

现在的问题是：已知 A_1(第一年年末的支付额)、G、n、i，求与等差支付系列等值的等额多次支付的年金 A。如果先令 $A_1 = 0$，则图 3-8 左图可变为图 3-9。设 A_2 为与图 3-9 表示的等差支付系列等值的等额多次支付的年金，则由式(3-10)可得

$$A_2 = F\{i/[(1+i)^n-1]\} \tag{3-16}$$

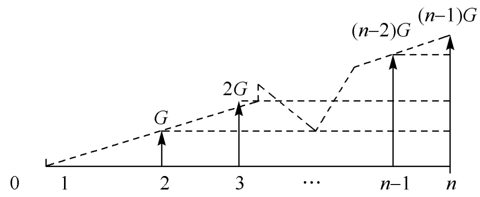

图 3-9　等差支付现金流量图($A_1 = 0$)

这里，F 为图 3-9 的等差支付的终值。

由于这一支付系列可以看成(n–1)个独立的等额多次支付(年金为 G，期数不等)，所以有

$$\begin{aligned}F &= G(F/A,\ i,\ n-1) + G(F/A,\ i,\ n-2) + \cdots + G(F/A,\ i,\ 2) + G(F/A,\ i,\ 1)\\ &= G\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}\right] + G\left[\frac{(1+i)^{n-2}-1}{i}\right] + \cdots + G\left[\frac{(1+i)^{2}-1}{i}\right] + G\left[\frac{(1+i)^{1}-1}{i}\right]\\ &= \frac{G}{i}[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) - (n-1)]\\ &= \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] - \frac{nG}{i}\end{aligned} \tag{3-17}$$

将式(3-17)代入式(3-16)，得

$$A_2 = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n-1}\right] \tag{3-18}$$

若 $A_1 \neq 0$，那么与等差支付系列相应的等额多次支付的年金 A 为

$$A = A_1 + A_2 \tag{3-19}$$

将式(3-18)代入式(3-19)，则有

$$A = A_1 + G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n-1}\right] \tag{3-20}$$

或

$$A = A_1 + G(A/G,\ i,\ n) \tag{3-21}$$

称 $\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n-1}\right]$ 为等差系列均匀支付因子，记为(A/G，i，n)。

式(3-20)同样适用于图 3-8 中(b)的情况，只不过这时的 G 为负值而已，即

$$A = A_1 - G(A/G,\ i,\ n)$$

【例 3-10】 某设备在投入使用的头 5 年里，每年消耗的维修费用成等差数列。第一年的维修费为 3 000 元，以后每年递增 800 元。设各年的维修费都发生在年末，如果利率为 10%，求 5 年里平均每年要提取多少维修费？

解：根据题意可绘制问题的现金流量图(请读者练习绘制)。

已知：$A_1 = 3\,000$ 元，$n = 5$ 年，$G = 800$ 元，$i = 10\%$

$$A = A_1 + G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$= 3\ 000 + 800\left[\frac{1}{10\%} - \frac{5}{(1+10\%)^5 - 1}\right]$$

$$= 4\ 448.08(元)$$

即 5 年里平均每年要提取 4 448.08 元的维修费。

以上介绍的 7 个公式是技术经济分析中进行资金等值计算的基本公式，每个公式都含有一个复利函数(对应的因子)。技术经济学是应用性学科，根据表 3-6 公式查复利系数表可直接计算出结果。

表 3-6　常用的普通复利公式

公 式 名 称	公　　式
一次支付复利公式	$F = P(F/P，i，n)$
一次支付现值公式	$P = F(P/F，i，n)$
等额多次支付复利公式	$F = A(F/A，i，n)$
等额多次支付偿债基金公式	$A = F(A/F，i，n)$
等额多次支付现值公式	$P = A(P/A，i，n)$
等额多次支付资本回收公式	$A = P(A/P，i，n)$
等差支付系列利息公式	$A = A_1 + G(A/G，i，n)$

3.2　资金等值的概念与计算

3.2.1　资金等值的概念

在对多个现金流量方案进行比较中，由于每个方案的资金支出或收入发生的时间和数量各不相同，因此我们就必须在价值相等的前提下，将每个方案的所有资金支出或收入折算到某一规定的时间，再进行比较。这种折算就是所谓的等值计算。实际上，等值计算就是前几节所讲的利息公式的应用。

例如，某人现在有 100 万元，另外一个人 3 年后的此时有 110 万元，您能说后者一定比前者的资金多吗？显然，要经过等值计算后才能进行比较。前者可将 100 万元存入银行，年利率为 5%，那么 3 年后他有的资金为 $100\times(1 + 5\%)^3 = 115.8$(万元)；或后者的 110 万元按等值原理折现为现值：$110/(1 + 5\%)^3 = 95.02$(万元)。前者也可用 100 万元进行投资来获取一定的投资回报。

因此，资金等值的概念中有两点值得注意：第一，等值是以特定的利率为前提；第二，在利率相同的情况下，总存在着一笔资金与另一笔资金等值。所以，资金的等值与资金的多少、资金发生的时间和利率三个因素有关。

3.2.2　付款间隔等于复利期(如一年)的等值计算

【例 3-11】 某节能设备需投资 10 万元，分两年等额付清。采用此设备后每年可节约能耗开支 2 万元，设备可使用 6 年，若年利率为 10%，问购买此设备是否有利？

解：绘制该投资项目的现金流量图，如图 3-10 所示。

将投资额和节约额分别折现为等值的现值。

投资额的现值

$P_1 = 5 + 5(P/F, 10\%, 1) = 5 + 5\times0.909\,1 = 9.545\,5$（万元）

节约额的现值

$P_2 = 2(P/A, 10\%, 6) = 2\times4.355\,2 = 8.710\,4$（万元）

由此可见，投资的现值大于节约额的现值，故此投资方案不可取。

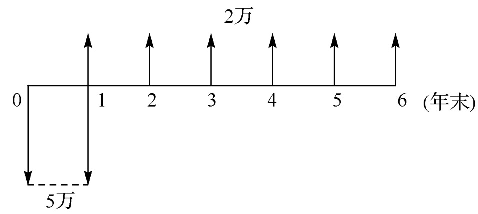

图 3-10　设备投资项目现金流量图

（单位：万元；$i = 10\%$）

【例 3-12】 某企业向银行贷款 16 万元，偿还期为 8 年，若贷款的年利率为 12%，有多种偿还贷款方式，现分析以下 5 种情况：

(1) 每年年末只偿还所欠利息，第 8 年末一次还清本金；

(2) 在第 8 年末一次还清本息；

(3) 在 8 年中每年年末等额偿还；

(4) 每年年末等额偿还本金，并付清当年的全部利息；

(5) 每年年末等额偿还本金，利息在第 8 年年末付清。

解：按题意分别计算如下：

(1) 由于本金不变，所以每年所还的利息为 $160\,000\times12\% = 19\,200$（元）

故 8 年共偿还金额为 $160\,000 + 8\times19\,200 = 313\,600$（元）

(2) 由一次支付复利公式得第 8 年年末一次偿还的本息为

$$F = P(F/P, i, n) = 160\,000(F/P, 12\%, 8)$$
$$= 160\,000\times2.476 = 396\,160\text{（元）}$$

(3) 将现值 16 万元折算成 8 年的等额年值为

$$A = P(A/P, i, n) = 160\,000(A/P, 12\%, 8)$$
$$= 160\,000\times0.2013 = 32\,208\text{（元）}$$

即每年等额偿还 32 208 元，所以 8 年共偿还金额为 $8\times32\,208 = 257\,664$（元）

(4) 每年等额偿还本金，即 8 年中每年偿还本金 $160\,000/8 = 20\,000$（元）。

由于每年本金减少 20 000 元，故每年利息减少 $20\,000\times12\% = 2\,400$ 元。第一年年末应偿还的利息为 $160\,000\times12\% = 19\,200$ 元；第二年年末应偿还的利息为 16 800 元；以此类推，第 8 年年末应偿还的利息为 $19\,200-2\,400\times7 = 2\,400$ 元。

故 8 年共偿还的利息为 $19\,200 + 16\,800 + \cdots + 2\,400 = 86\,400$（元）

所以，8 年共偿还的金额为 $20\,000\times8 + 86\,400 = 246\,400$（元）

(5) 每年等额偿还 20 000 元，由第 (4) 问的解答知每年的利息逐年减少 2 400 元。

其偿还利息的现金流量如图 3-11 所示。这是一等差支付资金形式，但又不能直接使用等差支付的复利公式，因此，将图 3-11 分解成图 3-12。

由图 3-12 中 (a) 可计算出第 8 年年末的终值为

$$F_1 = 19\,200(F/A, 12\%, 8) = 19\,200\times12.300 = 236\,160\text{（元）}$$

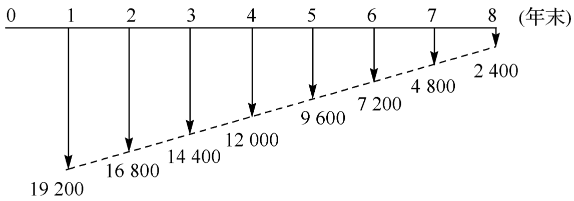

图 3-11　每年应付利息的现金流量图(单位：元)

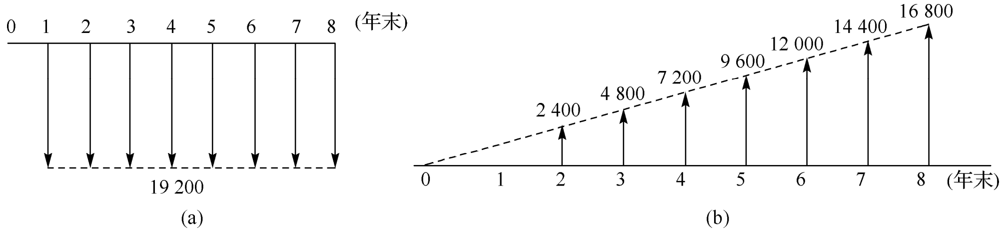

图 3-12　图 3-11 的分析图(单位：元)

由图 3-12 中(b)利用等差支付公式和一次支付终值公式得到第 8 年年末的终值为

$$F_2 = G(A/G，12\%，8)(P/A，12\%，8)(F/P，12\%，8)$$

$$= 2\,400\times2.902\times4.968\times2.476 = 85\,689(元)$$

因此，第 8 年年末一次总付利息为 236 160–85 689 = 150 471(元)

故 8 年共偿还的金额为 160 000 + 150 471 = 310 471(元)

上述 5 种贷款偿还方式的计算告诉我们，尽管利率 i 是一定的，由于计息方式不同，每年偿还金额就不同，8 年中偿还的总额也不同，但不管按哪种方式偿还，其偿还金额与原贷款额 160 000 元在经济上是等值的。

3.2.3　付款间隔期长于计息期(复利期)的问题

这一问题是指在规定的支付期限内，每期末支付或收入相等数额的资金(等额)，而实际计息期(复利期)短于支付间隔期的问题。其本质就是如何处理名义利率与实际利率的问题。

【例 3-13】 某企业贷款 10 000 万元进行投资，贷款 10 年后一次偿还，年利率为 6%，每季度计息一次，10 年后应偿还多少钱？

解 1：绘制现金流量图，见图 3-13。

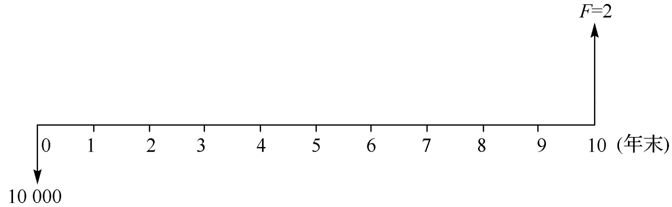

图 3-13　**解 1** 的现金流量图(单位：万元)

由公式 $i = (1 + r/n)^n–1$ 计算年实际利率得

$$i = (1 + 6\%/4)4–1 = 6.136\,4\%$$

再利用一次支付终值公式计算 10 年后的终值

$$F = P(F/P，6.136\,4\%，10)$$
$$= 10\,000 \times 1.814 = 18\,140（万元）$$

$(F/P，6.136\,4\%，10)$可用插值法求得。

解 2：将年名义利率除以年计息周期数，得计息期的实际利率

$$i = \frac{6\%}{4} = 1.5\%$$

总计息周期数为

$$n = 10 \times 4 = 40（季）$$

再利用一次支付终值公式可得

$$F = P(F/P，1.5\%，40) = 10\,000 \times 1.814 = 18\,140（万元）$$

【例 3-14】 设有 10 笔年终付款，年金为 1 000 元，如果年利率为 12%，每季复利一次，求第 10 年年末付款的等值资金。

解 1：现金流量图请读者练习绘制。求年实际利率

$$i = (1 + 12\%/4)^4 - 1 = 12.55\%$$

利用等额多次支付终值公式求第 10 年年末的等值终值

$$F = A(F/A，12.55\%，10) = 1\,000 \times 18.028 = 18\,028（元）$$

解 2：利用年实际利率，将年末支付转换为等值的每一季度末支付，再利用等额多次支付终值公式计算 F 值。

先求等值的季度付款 A。

$F' = 1\,000$ 元，$n = 4$ 季，$i = 3\%$，则

$$A = F'(A/F，3\%，4)$$
$$= 1\,000 \times 0.239\,0 = 239（元）$$

然后，再利用等额多次支付公式求 F 值

$A = 239$ 元，$n = 40$ 季，$i = 3\%$，则

$$F = A(F/A，3\%，40) = 239 \times 75.401 = 18\,021（元）$$

解法 1 与解法 2 的结果不一致的原因是查表所造成的误差。这在技术经济分析中是允许的。

3.2.4 复利计算期长于支付间隔的问题

在经济生活中，经常会遇到一些的问题，例如，在一个复利期里发生多次资金支付情况，或者说资金的支付不是发生在期初或期末，而是发生在期中。在银行业务中，大多数的处理方法是计息期中发生的存款在本期不计息，而从本期末开始计息，而对于贷款业务则将计息期内的所有贷款从本期初开始计算利息。在技术经济分析中，为了更好地反映资金的时间价值，也将某计息期内发生的资金收入在本期不计息，而从本期末开始计息，对于某计息期内发生的资金支出则全部从本期初开始计算利息。

3.2.5 资金等值的应用

中国逐渐步入市场经济环境之中，住房改革已基本完成。现在人们要得到一套住房就必须经过市场，但由于一次性付款数量巨大，不少购房者望而却步。经国务院批准，从 2015 年 10 月 24 日开始，中国人民银行重新调整个人住房公积金贷款利率水平，其中 5 年以内(含 5 年)的个人住房公积金贷款利率为 2.75%，5 年以上的为 3.25%。个人住房商业性贷款的利率为 5 年以内(含 5 年)是 4.75%(其中第一年为 4.35%)，5 年以上是 4.90%。

现在假设我们要购买一套住房，采用个人住房公积金贷款或者个人住房商业性贷款的方式借贷 10 万元人民币，贷款期限为 1～30 年，银行要求每月等额偿还。为了能量力而行，得算算在这 30 年内的每个月需要偿还多少资金?

这里特别要注意的是以上所指利率的实际含义。这些公布的年利率其实都是年名义利率 r，因此，在计算时要特别注意。要知道每个月需偿还银行多少资金的方法有以下两种。

方法一：利用公式 r/n 求出月实际利率，再用式(3-14)求之。

(1)个人住房公积金贷款(以 10 年为例)

年名义利率：$r = 3.25\%$，$n = 12$ 个月

月实际利率：$i = 3.25\% \div 12 = 2.708‰$

这时是以月为付款间隔，所以期数为 $n = 120$ 个月。

$$A_{月} = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] = 10\times10\ 000\times\left[\frac{2.708‰\times(1+2.708‰)^{120}}{(1+2.708‰)^{120}-1}\right]\quad 10 = 977.19(元/月)$$

(2)个人住房商业性贷款(以 10 年为例)

年名义利率：$r = 4.90\%$，$n = 12$ 个月

月实际利率：$i = 4.90\% \div 12 = 4.08‰$

这时是以月为付款间隔，所以期数为 $n = 120$ 个月。

$$A_{月} = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] = 10\times10\ 000\times\left[\frac{4.08‰\times(1+4.08‰)^{120}}{(1+4.08‰)^{120}-1}\right] = 1\ 055.77(元/月)$$

方法二：先求出年实际利率，再利用式(3-14)求出各年末等额资金，然后利用式(3-10)求出每月需偿还的等额资金。下面以 8 年为例加以说明。

(1)个人住房公积金贷款

年实际利率：$i_{年} = (1 + r/n)^{12}-1 = (1 + 3.25\%/12)^{12}-1 = 3.299\%$

$$A_{8年} = P\left[\frac{i(1+i)^8}{(1+i)^8-1}\right] = 10\times\left[\frac{3.299\%\times(1+3.299\%)^8}{(1+3.299\%)^8-1}\right] = 1.269(万元)$$

$$A_{月} = F\frac{i_{月}}{(1+i_{月})^{12}-1} = 1.269$$

$$= 0.105\ 593(万元) = 1\ 055.93(元/月)$$

(2)个人住房商业性贷款

年实际利率：$i_{年} = (1 + r/n)^{12}-1 = (1 + 4.90\%/12)^{12}-1 = 5.012\%$

$$A_{8年} = P\left[\frac{i(1+i)^8}{(1+i)^8-1}\right] = 10\times\left[\frac{5.012\%\times(1+5.012\%)^8}{(1+5.012\%)^8-1}\right] = 1.278\ 36(万元)$$

$$A_{月} = F\frac{i_{月}}{(1+i_{月})^{12}-1} = 1.278\,36 \times \left[\frac{4.08‰}{(1+4.08‰)^{12}-1}\right]$$

$$= 0.106\,29（万元）= 1\,062.90（元/月）$$

下面将不同贷款年度的月偿还金额和所付利息总额计算结果列入表 3-7。

表 3-7　住房公积金贷款与个人住房商业性贷款还款付息计算对照表

单位：元

年　限	住房公积金贷款		住房商业性贷款		利　息　差
	月均还款额	总利息	月均还款额	总利息	
1	一次性还本付息	1 495.83	一次性还本付息	2 371.88	876.05
2	4 287.07	2 899.72	4 375.95	5 022.83	2 123.11
3	2 897.12	4 296.19	2 985.88	7 491.61	3 195.42
4	2 202.40	5 715.24	2 291.62	9 997.85	4 282.61
5	1 785.78	7 146.86	1 875.69	12 541.47	5 394.61
6	1 530.58	10 201.60	1 605.86	15 621.83	5 420.23
7	1 332.63	11 940.70	1 408.70	18 330.53	6 389.83
8	1 184.35	13 697.30	1 261.24	21 078.71	7 381.41
9	1 069.18	15 471.35	1 146.91	23 866.21	8 394.86
10	977.19	17 262.83	1 055.77	26 692.87	9 430.04
11	902.06	19 071.72	981.50	29 558.54	10 486.82
12	839.57	20 897.95	919.88	32 462.99	11 565.04
13	786.80	22 741.51	867.99	35 406.04	12 664.53
14	741.68	24 602.33	823.73	38 387.44	13 785.11
15	702.67	26 480.38	785.59	41 406.96	14 926.58
16	668.62	28 375.59	752.42	44 464.33	16 088.74
17	638.67	30 287.92	723.33	47 559.27	17 271.35
18	612.12	32 217.31	697.65	50 691.50	18 474.19
19	588.44	34 163.68	674.83	53 860.71	19 697.03
20	567.20	36 126.98	654.44	57 066.57	20 939.59
21	548.04	38 107.14	636.15	60 308.76	22 201.62
22	530.70	40 104.09	619.65	63 586.92	23 482.83
23	514.92	42 117.74	604.71	66 900.69	24 782.95
24	500.51	44 148.03	591.14	70 249.71	26 101.68
25	487.32	46 194.87	578.78	73 633.58	27 438.71
26	475.19	48 258.17	567.47	77 051.92	28 793.75
27	464.01	50 337.86	557.11	80 504.31	30 166.45
28	453.67	52 433.83	547.59	83 990.34	31 556.51
29	444.10	54 546.00	538.82	87 509.59	32 963.59
30	435.21	56 674.27	530.73	91 061.62	34 387.35

本 章 小 结

1. 资金时间价值是资金在生产经营过程中随着时间的延长而产生的增值。资金时间价值是一种客观存在，由此同等数量的资金在不同时点会表现出不同的价值。