

第3章 一阶电路的时域分析

在前面介绍的电阻电路分析方法中，通常采用代数方程，反映各元件伏安关系，描述电路中激励和响应之间的关系，这类电路统称为静态电路。静态电路在某一时刻的响应只与该时刻的激励有关，而与过去时刻的激励无关，因此也是“无记忆”电路。

然而，许多实际电路并不只含有电阻和电源。电路中也可能包含储能元件，即电容和电感，它们的伏安特性具有微分或积分的特征。因此，在电路的连接结构或元件的参数发生变化时，将导致这些储能元件的原有能量发生变化。由于“存储”或“释放”能量不可能在一瞬间完成的，因此，电路需要经过一定的时间才能到达一个新的稳定状态。通常将这种具有过渡过程的电路称为动态电路。动态电路的阶数与描述电路的微分方程的阶数有关。用一阶微分方程描述的电路称为一阶电路。

本章主要介绍一阶电路的时域分析方法，详细介绍了一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应，以及一阶电路的三要素公式；最后介绍电路的阶跃响应和冲激响应，以及卷积积分。

3.1 电路的过渡过程及换路定则

3.1.1 电路的过渡过程

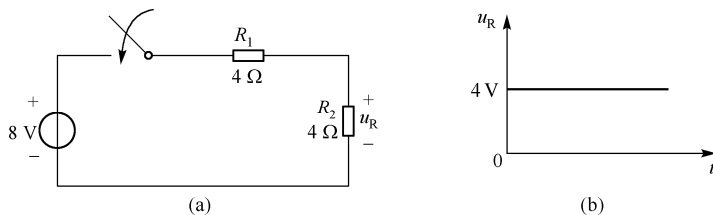
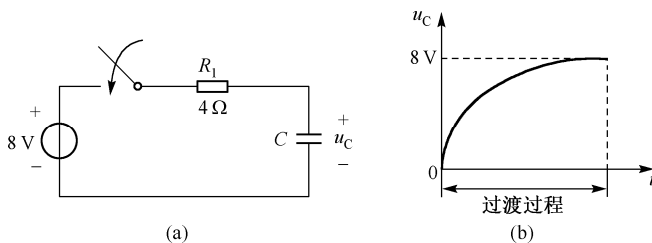
一般来说，当电路接通、断开或者电路元件的参数变化，抑或是电路结构发生变化时，电路中的电流、电压等都在发生改变，电路从一个稳定状态变化到另一个稳定状态，这个过程称为电路的过渡过程。由于这一过程是在极短暂的时间内完成的，所以又称电路的暂态过程。电路在过渡过程中的工作状态也称为暂态。

电路产生过渡过程的原因不外乎有内因和外因两种。

内因是指电路中有电感、电容等储能元件的存在。事实上，许多实际电路并不仅仅由电阻和电源元件构成。电路中不可避免地要包含电容元件和电感元件。由于这两类元件的伏安关系都体现了对电压或电流的微分或积分，因此也可称它们为动态元件。这些动态元件也是储能元件，对应于电路的一定工作状态，电容和电感都会储存一定的能量，而当电路的连接方式或元件参数发生改变的，将导致这些储能元件发生充放电的过程，即这些储能元件的能量将发生改变，而能量的“存储”和“释放”是连续、逐渐的，不能瞬间完成，所以需要有一个过程，这就是过渡过程。

外因是指电路进行了换路。所谓换路，是指电路的状态发生了改变，如作用于电路的电源的接入和撤除，电路元件的接入或其参数的变化，以及电路结构的变动等。

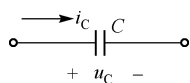
以图 3.1 所示电路为例。图 3.1(a)是一电阻电路，开关闭合后电阻电压 u_R 立即从开关闭合前的零跳变到新的稳态电压值 4 V，变化过程如图 3.1(b)所示。而图 3.2(a)所示的电路是一个动态电路，开关合下后，电容电压 u_C 从零逐渐变化到新的稳态电压 8 V，变化过程如图 3.2(b)所示。可以看出，电容电压 u_C 从开关闭合前的稳定状态 0 V 变化到开关闭合后的稳定状态 8 V，并不是瞬间完成的，而要经历一个过渡过程。

图 3.1 一个纯电阻电路, 开关闭合后 u_R 立即达到稳态图 3.2 RC 串联电路, 开关闭合后 u_C 经历的过渡过程

3.1.2 电路的换路定则

在分析动态电路中, 由于电路中含有电容或电感, 而这些储能元件的伏安特性是微分特性, 因此所列写的电路方程是微分方程。当对微分方程进行求解时, 需要依据初始条件来确定其积分常数。所以确定动态电路中电压、电流的初始值, 即确定换路后电压、电流是从什么初始值开始变化的, 成为分析动态电路过渡过程的一个重要环节。

设电路在 $t=0$ 时刻瞬间换路, 由于在换路前后的状态可能不同, 可将换路前一瞬间用 $t=0_-$ 表示, 换路后的一瞬间用 $t=0_+$ 表示。由此, 确定电路的初始状态就是确定在换路后的一瞬间 $t=0_+$, 电路中某条支路的电流值或某两点间的电压值, 可用 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 表示。



以图 3.3 为例, 电容元件的电压 u_C 和电流 i_C 在关联参考方向下, 其相应的伏安特性为

图 3.3 电容元件

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

其积分形式为

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt$$

令 $t_0 = 0_-$, 得

$$u_C(t) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_C dt$$

式中 $u_C(0_-)$ ——换路前一瞬间的电容电压值, 为求取换路后一瞬间电容电压的初始值, 取 $t = 0_+$ 代入上式, 得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (3.1)$$

如果换路(开关动作)是理想的, 即不需要时间, 则有 $0_- = 0 = 0_+$; 且在换路瞬间电容电流 i_C 为有限值, 则式(3.1)的积分项为零, 有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (3.2)$$

式(3.2)表明,换路虽然使电路的工作状态发生改变,但只要换路瞬间电容电流为有限值,则电容电压值在换路前后瞬间保持不变,这也是电容惯性特性的体现。

以图3.4为例,电感元件的电压 u_L 和电流 i_L 在关联参考方向下,其相应的伏安特性为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

其积分形式为

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt$$

同理,令 $t_0 = 0_-$ 、 $t = 0_+$,则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L dt \quad (3.3)$$

式(3.3)中, $i_L(0_-)$ 为换路前一瞬间的电感电流值, $i_L(0_+)$ 为换路后一瞬间电感电流的初始值。

如果换路(开关动作)是理想的,即不需要时间,则有 $0_- = 0 = 0_+$;且在换路瞬间电感电压 u_L 为有限值,则式(3.3)的积分项为零,有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (3.4)$$

式(3.4)表明,只要换路瞬间电感电压为有限值,则电感电流值在换路前后瞬间保持不变,这也是电感惯性特性的体现。

式(3.2)和式(3.4)统称为换路定则。当 $t = 0$ 时,换路定则表示为

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases} \quad (3.5)$$

当 $t = t_0$ 时,换路定则可进一步表示为

$$\begin{cases} u_C(t_{0+}) = u_C(t_{0-}) \\ i_L(t_{0+}) = i_L(t_{0-}) \end{cases} \quad (3.6)$$

需要指出的是,换路定则只揭示了换路前后电容电压 u_C 和电感电流 i_L 不能发生突变的规律,但对于电路中其他的电压和电流,如电容电流 i_C 和电感电压 u_L 在换路瞬间都是可以突变的。

3.1.3 初始值的确定

在电路过渡过程期间,电路中电压、电流的变化起始于换路后瞬间 $t = 0_+$ 的初始值,终止于达到一个新的稳态值。电路中电压、电流初始值可以分为两类:一类是电容电压和电感电流的初始值,它们可以直接利用换路定则 $u_C(t_{0+}) = u_C(t_{0-})$ 和 $i_L(t_{0+}) = i_L(t_{0-})$ 求取;另一类则是电路中其他电压、电流的初始值,如电容电流、电感电压、电阻电流和电压等。这类初始值在换路瞬间是可以发生跳变的,在求出 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 后,可以根据基尔霍夫定律、欧姆定律计算 $t = 0_+$ 时刻的电路,求出相应的数值,其步骤如下所述。

(1) 先求换路前一瞬间的电容电压值 $u_C(0_-)$ 和电感电流值 $i_L(0_-)$ 。在换路前,电路处于稳定状态,此时电容视为开路,电感视为短路,将电路转化为 $t = 0_-$ 时刻的等效电路,从而求出 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。

(2) 根据换路定则确定 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。

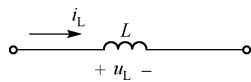


图3.4 电感元件

(3) 以 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 为依据, 将电容等效为电压值为 $u_C(0_+)$ 的电压源, 电感等效为电流值为 $i_L(0_+)$ 的电流源, 将电路转化为 $t=0_+$ 时刻的等效电路, 再利用欧姆定律、基尔霍夫定律和直流电路的分析方法确定电路中其他电压、电流的初始值。

例 3.1 如图 3.5 所示电路, 已知 $U_S = 8\text{ V}$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$, 开关闭合前电路处于稳态, 当 $t=0$ 时开关 S 闭合。试求 $t=0_+$ 时的 u_C 及各支路电流值。

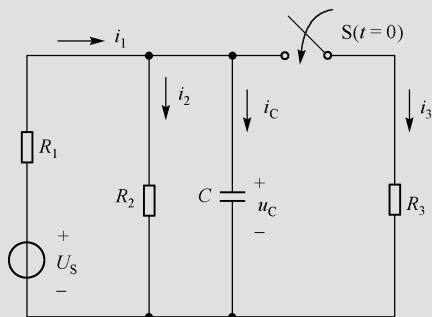


图 3.5 例 3.1 图

解: 换路前电路处于稳态, 在直流稳态下电容相当于开路, 等效电路如图 3.6(a)所示, 则

$$u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S = 4\text{ V}$$

根据换路定则有

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 4\text{ V}$$

将此值代入 $t=0_+$ 时刻的等效电路, 此时可以将电容用电压值为 4 V 的理想电压源替代, 如图 3.6(b)所示。则

$$i_1(0_+) = \frac{U_S - U_C(0_+)}{R_1} = 1\text{ A}$$

$$i_2(0_+) = \frac{U_C(0_+)}{R_2} = 1\text{ A}$$

$$i_3(0_+) = \frac{U_C(0_+)}{R_3} = 1\text{ A}$$

$$i_C(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) = -1\text{ A}$$

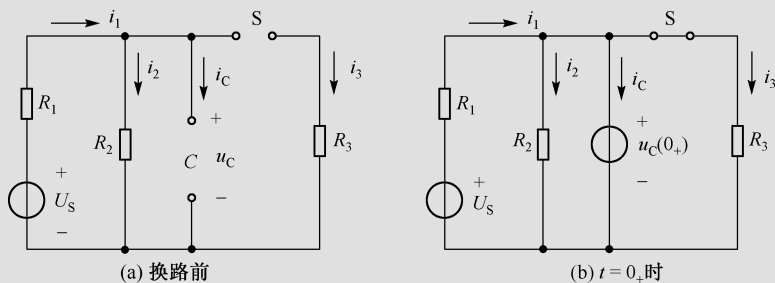


图 3.6 例 3.1 的等效电路

例 3.2 如图 3.7 所示电路, 已知 $U_S = 20 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, 开关 S 闭合前, 电路处于稳态。当 $t = 0$ 时开关闭合, 进行换路, 试求 S 闭合瞬间各电流的初始值和 u_L 。

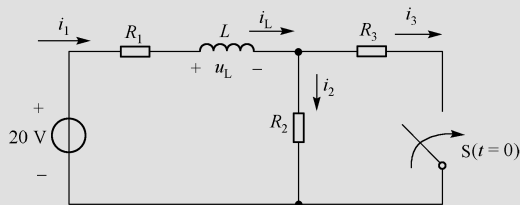


图 3.7 例 3.2 图

解: 在换路前的直流稳态电路中, 电感元件相当于短路, 等效电路如图 3.8(a)所示, 则

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = 0.5 \text{ A}$$

$t = 0$ 时进行换路, 根据换路定则, 有

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0.5 \text{ A}$$

代入换路后 $t = 0_+$ 时的等效电路, 此时可以将电感用一个数值为 0.5 A 的理想电流源所替代, 如图 3.8(b)所示, 则

$$i_1(0_+) = i_L(0_+) = 0.5 \text{ A}$$

$$i_2(0_+) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_L(0_+) = 0.2 \text{ A}$$

$$i_3(0_+) = i_L(0_+) - i_2(0_+) = 0.3 \text{ A}$$

$$u_L(0_+) = U_S - i_2(0_+)R_2 - i_1(0_+)R_1 = 9 \text{ V}$$

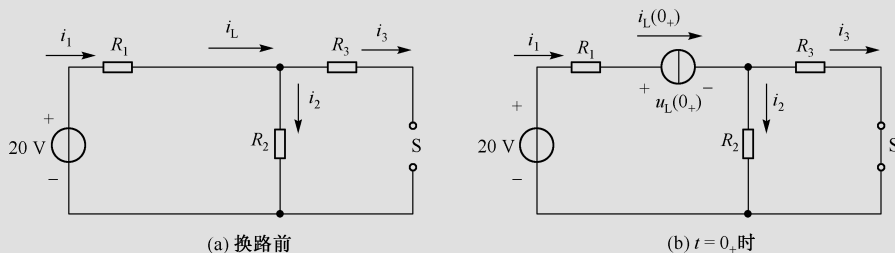


图 3.8 例 3.2 的等效电路

3.2 一阶电路的过渡过程

电路中含有储能元件(动态元件)是引起电路过渡过程的根本原因。若该电路仅包含有一个动态元件(电容或电感), 且动态元件的伏安特性是微分关系, 则描述电路状态的方程是一阶微分方程, 这样的电路称为一阶动态电路, 简称一阶电路。

3.2.1 一阶电路的零输入响应

对于一阶电路而言, 即使电路中没有外加电源, 但由于换路前储能元件已经储存了能量, 因此在

换路后电路中仍可出现电压、电流。这种没有外加输入的电路, 仅由初始时刻的电容的电场储能或电感的磁场储能所引起的响应称为零输入响应。

1. RC 电路的零输入响应

分析 RC 电路的零输入响应实际上就是分析它的放电过程。已知电路如图 3.9(a)所示, 原先开关 S 在位置 1 上, 直流电源 U_S 给电容充电, 达到稳态时, 电容相当于开路。当 $t = 0$ 时, 开关 S 由位置 1 转到位置 2, 此时电容与电源断开, 与电阻 R 构成了闭合回路, 如图 3.9(b)所示。此时, 根据换路定则, 有 $u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_0$, 即使此时在 RC 串联回路没有外加电源, 电路中的电压、电流依然可以靠电容放电产生。由于 R 是耗能元件, 且电路在零输入条件下没有外加激励的能量补充, 电容电压将逐渐下降, 放电电流也将逐渐减小。直至电容的能量全部被电阻耗尽, 电路中的电压、电流也趋向于零, 由此放电完毕, 电路进入到一个新的稳态。

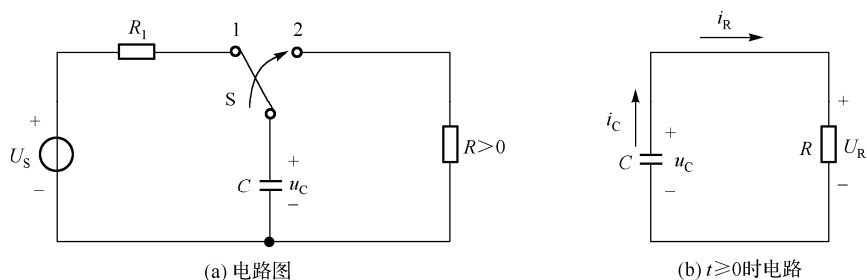


图 3.9 RC 电路的零输入响应

下面进行定量的数学分析。

无论是电阻电路还是动态电路, 各支路的电流和电压均受到基尔霍夫定律和元件的伏安特性的约束。对于图 3.9(b), 有

$$u_R - u_C = 0$$

$$u_R = Ri_R$$

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt}$$

将以上三式联立, 可求出换路后电容电压 u_C 的变化规律, 它由一阶常系数线性微分方程表示为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (3.7)$$

由换路定则, 换路后电容的初始值为

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_0$$

由高等数学可知, 一阶齐次微分方程通解形式为

$$u_C(t) = Ae^{St} \quad t > 0 \quad (3.8)$$

其中, S 为特征方程 $RCS + 1 = 0$ 的解, 因此得

$$S = S_1 = -\frac{1}{RC}$$

故得

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \quad (3.9)$$

待定常数 A 由初始条件确定, 有

$$u_C(0_+) = A e^{-\frac{1}{RC}t} \Big|_{t=0_+} = U_0$$

$$A = U_0$$

所以电容电压的零输入响应为

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad t > 0$$

它是一个随时间衰减的指数函数。当 $t=0$ 时, 即进行换路时, u_C 是连续的, 没有跳变。因此表达式 $u_C(t)$ 的时间定义域可以延伸至原点, 即

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad t \geq 0 \quad (3.10)$$

其波形如图 3.10(a) 所示。可见, 换路后电路中的电压、电流均按照相同的指数规律变化。

与电容电压所不同的是, $i(t)$ 和 $u_R(t)$ 在 $t=0$ 时发生了跳变, 其波形如图 3.10(b) 所示, 电路中电阻的电压为

$$u_R(t) = u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad t > 0$$

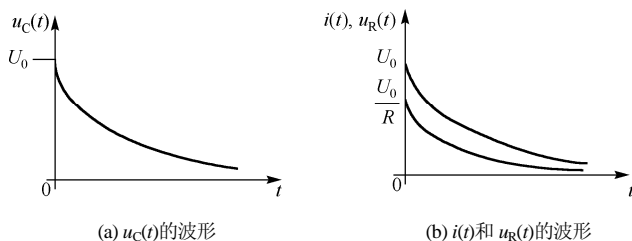


图 3.10 RC 零输入电路的电压、电流波形

电路电流 i 可由电阻的伏安特性求得

$$i(t) = \frac{u_R}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad t > 0$$

式 (3.10) 中, 令 $\tau = RC$, τ 称为 RC 电路的时间常数, 具有时间的量纲。当 R 单位为欧、 C 单位为法时, 欧·法 = $\frac{\text{伏}}{\text{安}} \cdot \frac{\text{安秒}}{\text{伏}} = \text{秒}$, τ 的单位为秒。于是, 式 (3.10) 可推广写为

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (3.11)$$

式 (3.11) 为 RC 电路零输入响应时电容电压 u_C 变化规律的通式。

显然, 时间常数 τ 是表征动态电路过渡过程进行快慢的物理量。 τ 越大, 过渡过程进行得越慢。由表达式 $\tau = RC$ 可以看出, τ 仅由电路的参数 R 和 C 来决定。当 C 一定时, R 越大, 电路中放电电流越小, 放电时间就越长; 当 R 一定时, C 越大, 电容储存的电场能量越大, 放电时间也就越长。

现以电容电压 u_C 为例, 来说明时间常数 τ 的物理意义, 参见表 3.1。

表 3.1 u_C 随时间衰减的情况

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	∞
$u_C(t)$	U_0	$0.368 U_0$	$0.135 U_0$	$0.050 U_0$	$0.018 U_0$	$0.007 U_0$	0

从表 3.1 中可以看出:

(1) 当 $t = \tau$ 时, $u_C = 0.368U_0$ 。也就是说, 时间常数 τ 是电容电压 u_C 衰减到初始值的 0.368 倍时所需要的时间。

(2) 从理论上讲, 当 $t = \infty$ 时, u_C 才衰减到 0, 过渡过程才结束。但当 $t = 3\tau \sim 5\tau$ 时, u_C 已衰减到初始值的 0.05 倍以下。因此, 在工程中一般认为从换路开始经过 $3\tau \sim 5\tau$ 的时间, 过渡过程便基本结束了。

2. RL 电路的零输入响应

对于 RL 电路, 其过渡过程分析与 RC 电路类似。

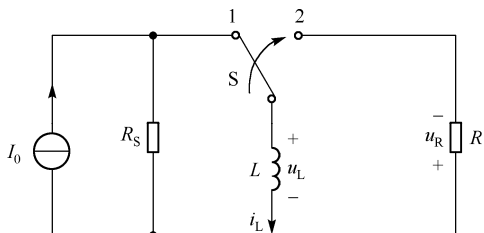


图 3.11 RL 零输入电路

已知电路如图 3.11 所示, 换路前, 开关 S 在位置 1, 电路处于稳态, 此时电感电流表示为 $i_L(0_-) = I_0$ 。当 $t = 0$ 时, 开关 S 由位置 1 倒向位置 2。根据换路定则, 有 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$ 。电感电流在换路后的回路中流动, 由于电阻 R 是耗能元件, 电感电流将逐渐减小。最后, 电感中储存的能量被电阻耗尽, 电路中的电流、电压也趋向于零。由此放电完毕, 电路进入到一个新的稳态。

下面做定量的数学分析。

对换路后的电路, 由约束关系和初始值得

$$u_L + u_R = 0 \quad (t > 0)$$

$$u_R = Ri_L$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_L(0_+) = I_0$$

可得一阶常系数线性微分方程为

$$\begin{cases} \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = 0 & t > 0 \\ i_L(0_+) = I_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

方程解的形式为

$$i_L(t) = Ae^{St} \quad t > 0$$

其中, S 为特征方程 $\frac{L}{R}S + 1 = 0$, 因此得

$$S = S_1 = -\frac{R}{L}$$

待定常数 A 由初始条件确定, 有

$$i_L(0_+) = Be^{\frac{R}{L}t} \Big|_{t=0} = I_0$$

得

$$A = I_0$$

所以电感电流的零输入响应为

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t > 0$$

由于电感电流在换路瞬间连续, 表达式的时间定义可延续至原点, 即

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0 \quad (3.13)$$

从式 (3.13) 可以看出, 换路后, 电感电流从初始值 I_0 开始, 按照指数规律递减, 直到最终 $i_L \rightarrow 0$, 电路达到新的稳态, 其波形如图 3.12(a) 所示。

与电感电流不同的是, $u_L(t)$ 和 $u_R(t)$ 在 $t=0$ 处发生突变, 其波形如图 3.12(b) 所示, 电路中电感电压为

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t > 0$$

电阻电压为

$$u_R(t) = Ri_L = RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t > 0$$

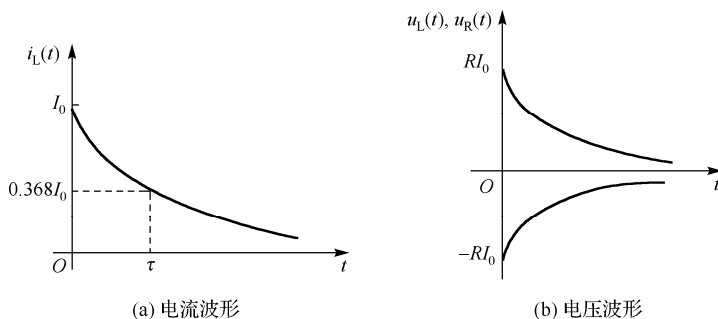


图 3.12 RL 零输入电路的电压、电流波形

与 RC 零输入电路类似, RL 零输入电路各变量具有相同的变化规律, 都是以初始值为起点, 按指数规律 $e^{-\frac{R}{L}t}$ 衰减到零。令 RL 电路的时间常数为 $\tau = \frac{L}{R} = GL$, 当 R 单位为欧, L 单位为亨时, τ 的单位为秒。于是, 式 (3.13) 可推广写为

$$i_L(t) = i_L(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (3.14)$$

式 (3.14) 为 RL 电路零输入响应时电感电流 i_L 变化规律的通式。

显然, 零输入响应的衰减快慢也可用 τ 来衡量。 τ 越大, 衰减越慢, 过渡过程进行得越长。当 L 一定时, R 越小, 消耗能量越小, 电流下降慢; 反之, 则衰减得越快。

3.2.2 一阶电路的零状态响应

所谓零状态, 是指电路的初始状态为零, 即电路中储能元件的初始能量为零。换句话说, 就是电容元件在换路的瞬间电压 $u_C(0) = 0$, 或电感元件在换路的瞬间电流 $i_L(0) = 0$, 在此条件下, 电路在外激励的作用下产生的响应称为零状态响应。零状态响应也可称为零初始状态响应。

1. RC 电路的零状态响应

RC 电路的零状态响应实际上就是它的充电过程。已知电路如图 3.13 所示, 当 $t < 0$ 时, 开关 S 在位

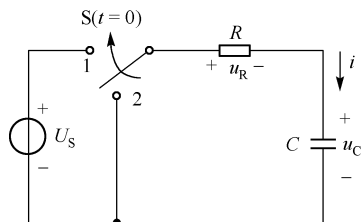


图 3.13 RC 零状态响应

下面做定量的数学分析。

对于图 3.13 换路后的电路, 由 KVL 定律和电路元件的伏安特性可得

$$u_R + u_C = U_S \quad t > 0$$

$$u_R = Ri$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

以上三式联立, 可得一阶常系数线性非齐次微分方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad t > 0 \quad (3.15)$$

且

$$u_C(0_+) = 0$$

由高等数学知识可知, 该微分方程的完全解由齐次方程的通解 u_C'' 和非齐次方程的特解 u_C' 构成, 可以表示为

$$u_C = u_C' + u_C'' \quad (3.16)$$

原方程所对应的齐次方程为

$$RC \frac{du_C''}{dt} + u_C'' = 0$$

在前面分析零输入响应时已知, 此方程的通解为

$$u_C'' = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.17)$$

特解是满足原方程的任意一个解, 由于方程是对换路后的电路列出的, 所以方程可以描述电路换路以后的所有状态。为了简便起见, 可以把电路达到新的稳态后的状态作为特解。则对于 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $u_C \rightarrow U_S$, 即

$$u_C' = U_S \quad (3.18)$$

由式 (3.16)、式 (3.17) 和式 (3.18) 得式 (3.15) 的通解为

$$u_C = u_C' + u_C'' = U_S + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.19)$$

为确定积分常数 A , 把初始条件 $u_C(0_+) = 0$ 代入式 (3.19), 可得

$$A = -U_S$$

最后可得式 (3.15) 的解为

置 2 时, 电路已经处于稳态, 即电容电压 $u_C(0_-) = 0$, 电容元件的两极板上没有电荷, 电容没有储存电能。当 $t = 0$ 时, 开关 S 由位置 2 倒向位置 1。根据换路定则, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 可见在 $t = 0_+$ 时刻电容相当于短路, 由 $t = 0_+$ 时刻的等效电路可以看出, 电源电压 U_S 全部施加于电阻 R 两端, 此时的电流达到最大值 $i(0_+) = \frac{U_S}{R}$ 。随着电源流经电阻 R 对电容充电, 充电电流逐渐减小, 直至 $u_C = U_S$ 时, 充电过程结束, 此时电流 $I = 0$, 电容相当于开路, 电路进入新的稳态。

$$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0 \quad (3.20)$$

其中 $\tau = RC$ 称为 RC 电路的时间常数, 反映电容充电的快慢, 也就是说反映电路过渡过程的长短。时间常数 $\tau = RC$ 越大, 充电时间越长。在零状态响应下, 电路电压和电流随时间 t 变化的曲线如图 3.14 所示。 u_C 的初始值为零, 按指数规律上升, 当 $t = \infty$ 时 u_C 的稳态值是电源电压 U_S ; 电流 i 和电阻电压 u_R 的初始值分别为 $\frac{U_S}{R}$ 和 U_S , 均按指数规律衰减到零。

2. RL 电路的零状态响应

已知电路如图 3.15 所示, $t < 0$ 时, 开关 S 闭合, 电路已经稳定, 即电感的初始状态 $i_L(0_-) = 0$ 。当 $t = 0$ 时, 开关 S 打开, 根据换路定则, 有

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0$$

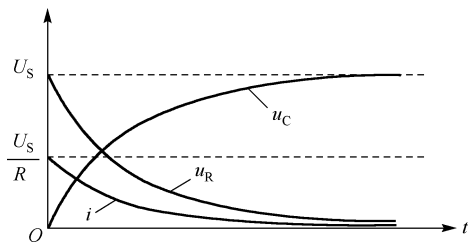


图 3.14 电压和电流的波形

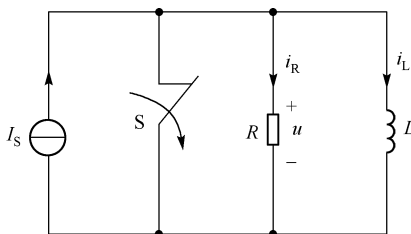


图 3.15 RL 零状态电路

对于图 3.15 换路后的电路, 根据 KCL 定律和元件的约束关系可得

$$i_R + i_L = I_S \quad t > 0$$

$$i_R = \frac{u}{R}$$

$$u = L \frac{di_L}{dt}$$

由此得到一阶常系数线性非齐次微分方程为

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_S \quad t > 0 \quad (3.21)$$

且

$$i_L(0_+) = 0$$

类似 RC 电路零状态响应的求解过程, 可知方程的解由两部分组成, 即

$$i = i' + i'' \quad (3.22)$$

式 (3.21) 所对应的齐次方程为

$$\frac{L}{R} \frac{di_L''}{dt} + i_L'' = 0$$

此方程的通解为

$$i_L'' = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad t > 0 \quad (3.23)$$

同时, 把电路达到新的稳态后的状态作为特解。则对于 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $i_L \rightarrow I_S$, 即

$$i_L' = I_S \quad (3.24)$$

由式 (3.22)、式 (3.23) 和式 (3.24) 得式 (3.21) 的通解为

$$i = i' + i'' = I_S + Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.25)$$

为确定积分常数 A , 把初始条件 $i_L(0_+) = 0$ 代入式 (3.25), 可得

$$A = -I_S$$

最后可得式 (3.21) 的解为

$$i_L(t) = I_S - I_S e^{-\frac{R}{L}t} = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad t \geq 0 \quad (3.26)$$

令 $\tau = \frac{L}{R}$ 为电路的时间常数, 则

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = RI_S e^{-\frac{R}{L}t} \quad t > 0$$

RL 零状态响应的电压和电流波形如图 3.16 所示。

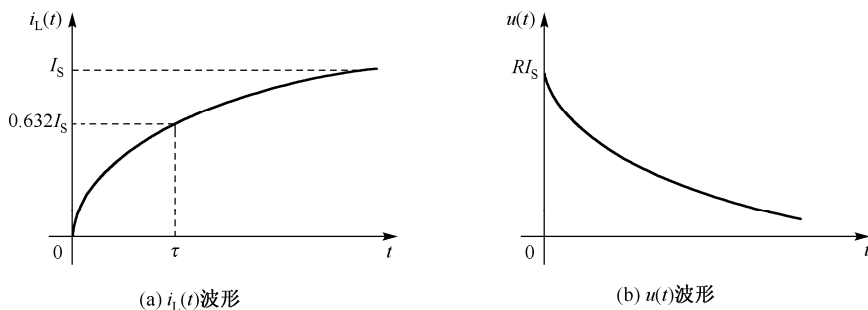


图 3.16 RL 零状态电路 $i_L(t)$ 和 $u(t)$ 的波形

3.3 一阶电路的全响应

3.3.1 一阶电路全响应的求解

前面讨论了一阶电路在两种特殊情况下的响应, 即零输入响应和零状态响应。当电路的初始状态不为零且外激励也不为零时, 电路的响应称为电路的全响应。

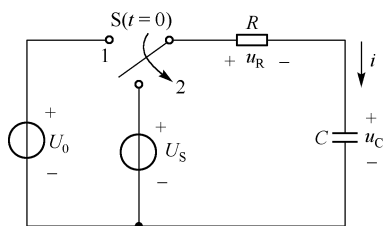


图 3.17 RC 电路的全响应图

如图 3.17 所示, 当 $t < 0$ 时, 开关 S 在位置“1”已久, 电容电压 $u_C(0_-) = U_0 \neq 0$ 。当 $t = 0$ 时, 开关 S 倒向位置“2”, 换路后的电路中仍有电源 U_S 作为整个电路的外加激励, 所以当 $t \geq 0$ 时电路发生的过渡过程是全响应。

根据基尔霍夫电压定律和伏安特性, 换路后的电路方程为

$$u_R + u_C = U_S$$

$$u_R = Ri$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

联立三个方程求解，可得电路全响应的微分方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad t > 0 \quad (3.27)$$

式(3.27)的解由两部分构成

$$u_C = u_C' + u_C'' \quad (3.28)$$

式中 u_C' ——式(3.27)的特解，这里仍选用电路的稳态解为特解，即 $u_C' = U_S$ ；

u_C'' ——原方程所对应齐次方程的通解。

由零状态响应的分析可知

$$u_C'' = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.29)$$

则有

$$u_C = U_S + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.30)$$

式(3.30)中常数 A 由初始条件确定，将

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_0$$

代入式(3.30)可得

$$A = U_0 - U_S$$

式(3.27)表示的方程的解为

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.31)$$

或

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.32)$$

暂态过程中电容电压随时间的变化曲线如图 3.18 所示。

式(3.31)中第一项(即特解)与外加激励具有相同的函数形式，称为强制响应。第二项的函数形式由特征根确定，与激励的函数形式无关(它的系数与激励有关)，称为固有响应或自然响应。因此，按电路的响应形式，全响应可分解为固有响应和强制响应。第一项在任何时候都保持稳定，与输入有关，当输入为直流时，则稳态响应为常数，所以第一项又称为稳态响应，它是当 t 趋于无穷大，后一项衰减为零时的电路响应。第二项按指数规律衰减，当 t 趋于无穷大时，该分量将衰减至零，所以又称暂态响应。因此按电路的响应特性，全响应又可分解为稳态响应和暂态响应。换路后激励恒定且在 $R > 0$ 的情况下，一阶电路的固有响应就是暂态响应，强制响应就是稳态响应。

式(3.32)表示了电路全响应的另外一种形成方法。电路的响应 u_C 由两部分组成，第一项是初始状态为零，由外激励 U_S 产生的零状态响应 $U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ ；第二项是外激励 U_S 为零时，由初始状态 U_0 产

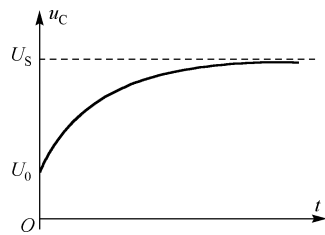


图 3.18 电容电压 u_C 的变化曲线

生的零输入响应 $U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。因此,全响应是零输入响应与零状态响应的和,这也符合线性电路的叠加定理。

3.3.2 三要素法

通过前面对一阶动态电路过渡过程的分析可以看出,换路后电路中的电压、电流都是从一个初始值 $f(0_+)$ 开始,按照指数规律递变到新的稳态 $f(\infty)$,递变的快慢取决于电路的时间常数 τ 。 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 称为一阶电路的三要素,由其可以求出换路后的电路中任意电压、电流的解析式 $f(t)$ 。

从3.2节的分析可知,描述一阶线性电路的电路方程是一阶线性微分方程,它的解由两部分构成,即

$$f(t) = f'(t) + f''(t)$$

式中 $f(t)$ —— 一阶线性微分方程的解;

$f'(t)$ —— 原方程的一个特解,一般选用稳态解来作为特解,即 $f'(t) = f(\infty)$;

$f''(t)$ —— 对应齐次方程的通解,即 $f''(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

所以

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.33)$$

为了确定积分常数 A ,把初始条件代入式(3.33)后得

$$f(0_+) = f(\infty) + A$$

解得

$$A = f(0_+) - f(\infty)$$

所以一阶电路全响应的一般表达式为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.34)$$

由式(3.34)可见,要求解一阶线性电路的响应,只需求出稳态值 $f(\infty)$ 、初始值 $f(0_+)$ 和电路的时间常数 τ ,就可以根据式(3.34)直接写出响应函数 $f(t)$,避免了列电路方程、解微分方程等运算。求出三要素,并直接由式(3.34)求解电路响应的方法称为三要素法。

利用三要素法求解一阶电路的暂态问题,关键是求得三个要素 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 。求解步骤如下所述。

(1) 求初始值 $f(0_+)$ 。在换路前的电路中求出 $u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_-)$,由换路定则有 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$,得到 $u_C(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ 。将电容元件用电压为 $u_C(0_+)$ 的直流电压源替代,电感元件用电压为 $i_L(0_+)$ 的直流电流源替代,得出 $t = 0_+$ 时刻的等效电路,用电路分析方法求出所需的初始值 $f(0_+)$ 。

(2) 求稳态值 $f(\infty)$ 。电路在 $t \rightarrow \infty$ 时达到新稳态,此时将电容元件视为开路,将电感元件视为短路,这样可以做出稳态电路,求出 $f(\infty)$ 。

(3) 求电路的时间常数 τ 。一阶 RC 电路的时间常数 $\tau = RC$,一阶 RL 电路的时间常数 $\tau = \frac{L}{R}$ 。

而对于一般一阶电路来说,将换路后电路中的动态元件(电容或电感)从电路中取出,求出剩余电路的戴维南(或诺顿)等效电路的电阻 R_0 。也就是说, R_0 等于电路中独立源置零时从动态元件两端看进去的等效电阻。

(4) 将初始值 $f(0_+)$ 、稳态值 $f(\infty)$ 和时间常数 τ 代入三要素公式 $f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$, 写出一阶电路的全响应。

例3.3 已知电路如图 3.19 所示, 当 $t=0$ 时开关 S 由 1 倒向 2, 开关换路前电路已经稳定。试求 $t > 0$ 时的响应 $u_C(t)$ 。

解: (1) 求取 $u_C(0_+)$ 。首先求取 $u_C(0_-)$, 已知开关 S 换路前电路已经稳定, 则电容相当于开路, 得到 $t=0_-$ 等效电路, 如图 3.19(b) 所示, 有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 8 \times \frac{12}{12+4} = 6 \text{ V}$$

(2) 求取 $u_C(\infty)$ 。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 电路达到新的稳定, 此时电容相当于开路, 得到 $t \rightarrow \infty$ 等效电路如图 3.19(c) 所示, 有

$$u_C(\infty) = 4 \times \frac{12}{12+4} = 3 \text{ V}$$

(3) 求取 τ 。动态元件所接电阻电路如图 3.19(d) 所示, 有

$$R_0 = 4 // 12 = 3 \Omega$$

$$\tau = R_0 C = 3 \times 0.1 = 0.3 \text{ s}$$

(4) 将三要素代入式 (3.34), 得

$$u_C(t) = 3 + (6 - 3)e^{-\frac{10}{3}t} = 3 + 3e^{-\frac{10}{3}t} \text{ V} \quad t \geq 0$$

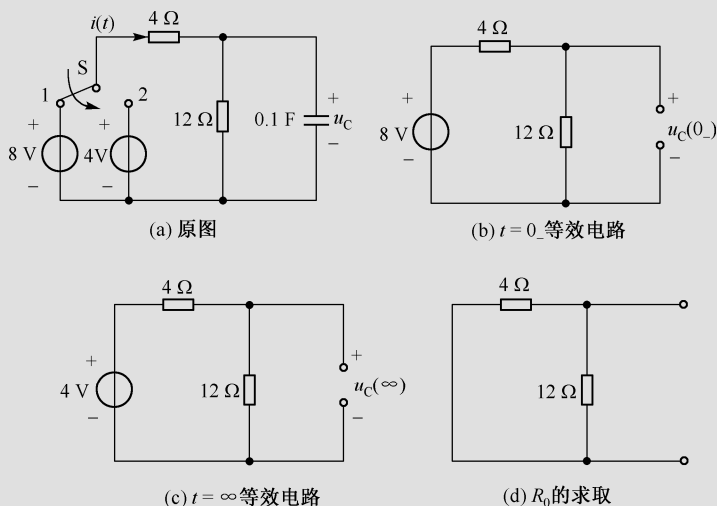


图 3.19 例 3.3 图

例 3.4 已知电路如图 3.20 所示, 开关 S 在 $t=0$ 时闭合, S 闭合前电路处于稳定状态。试求 $t > 0$ 时的 $i_L(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

解: (1) 求取 $i_L(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。首先求取 $i_L(0_-)$, 已知开关 S 换路前电路已经稳定, 则电感相当于短路, 得到 $t=0_-$ 等效电路, 如图 3.20(b) 所示, 有

$$i_L(0_-) = \frac{36}{8+6+6} = 1.8 \text{ A}$$

根据换路定则有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1.8 \text{ A}$$

做 $t = 0_+$ 时刻的等效电路, 如图 3.20(c)所示, 此时电感被一个电流为 1.8 A 的直流电流源替代, 由此可得响应的初始值为

$$u_L(0_+) = 36 - (6+6)i_L(0_+) = 36 - 12 \times 1.8 = 14.4 \text{ V}$$

(2) 求取 $i_L(\infty)$ 和 $u_L(\infty)$ 。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 电路达到新的稳定, 此时电感相当于短路, 得到 $t \rightarrow \infty$ 等效电路如图 3.20(d)所示, 有

$$i_L(\infty) = \frac{36}{6+6} = 3 \text{ A}$$

$$u_L(\infty) = 0$$

(3) 求取 τ 。如图 3.20(e)所示, 由此可得时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.4}{6+6} = \frac{1}{30} \text{ s}$$

(4) 将三要素代入式 (3.34), 得

$$i_L(t) = 3 + (1.8 - 3)e^{-30t} = 3 - 1.2e^{-30t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

$$u_L(t) = 0 + (1.44 - 0)e^{-30t} = 1.44e^{-30t} \text{ V} \quad t > 0$$

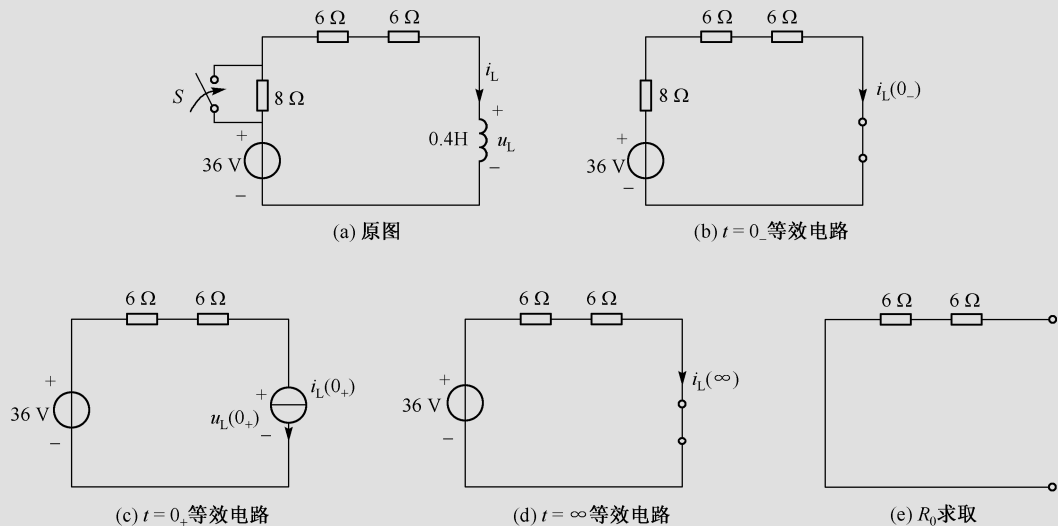


图 3.20 例 3.4 图

3.4 一阶电路的阶跃响应

3.4.1 单位阶跃信号

在动态电路中, 常采用阶跃信号来描述电路的激励和响应。单位阶跃信号的定义是:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

其波形如图 3.21(a)所示, 在跃变点 $t=0$ 处, 函数值未定义。

若单位阶跃信号跃变点在 $t=t_0$ 处, 则称其为延迟单位阶跃信号, 可表示为:

$$\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

其波形图如图 3.21(b)所示。

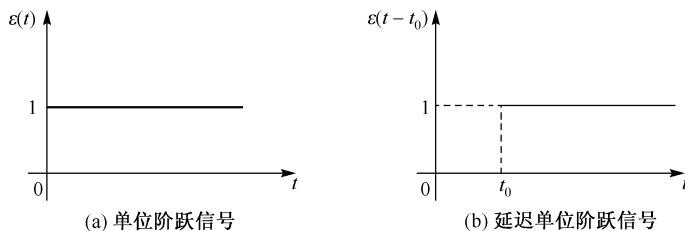


图 3.21 阶跃信号

单位阶跃信号的物理意义是: 当用 $\varepsilon(t)$ 作为电路的电源时, 相当于该电路在 $t=0$ 时刻接入单位直流源, 且不再变化, 其示意图如图 3.22 所示。

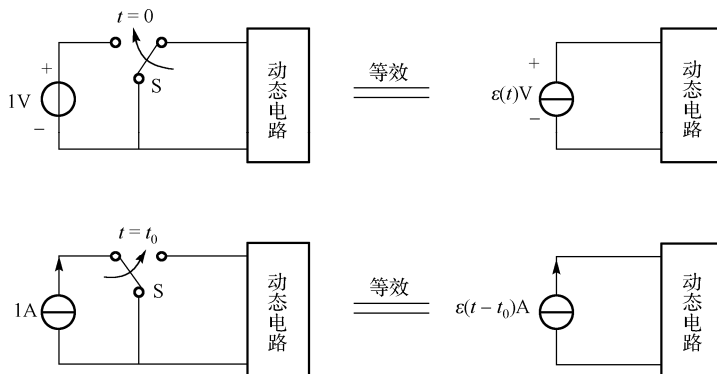


图 3.22 用阶跃信号表示开关电路

利用单位阶跃信号和延时阶跃信号, 可以将一些阶梯状波形表示为若干阶跃函数的叠加。如图 3.23(a)所示的矩形脉冲信号, 可以看成是图 3.23(b)、(c)所示两个阶跃信号的叠加, 即

$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t-t_0)$$

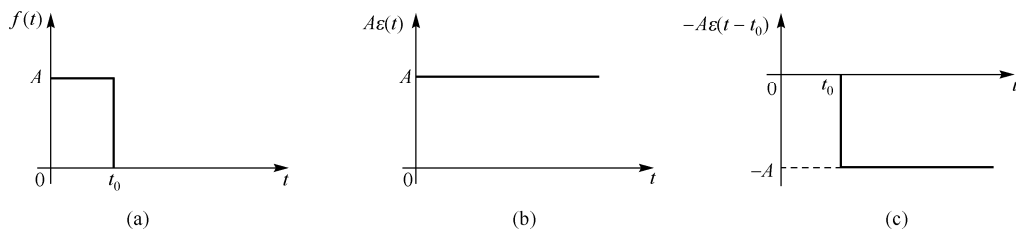


图 3.23 矩形脉冲信号的分解

另外, 以 $\varepsilon(t-t_0)$ 乘以某一对所有 t 都有定义的函数, 得到的是一个在 $t < t_0$ 时为零, 而在 $t > t_0$ 等于 $f(t)$ 的函数, 其表达式为

$$f(t)\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ f(t) & t > t_0 \end{cases}$$

其波形如图 3.24 所示。

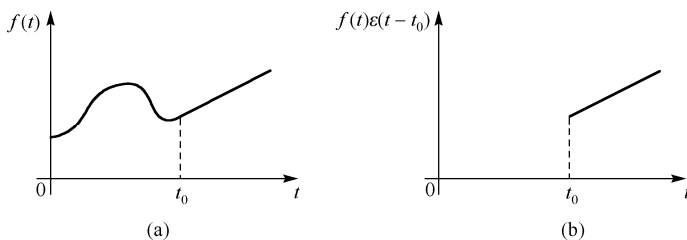


图 3.24 函数 $f(t)$ 与单位阶跃函数相乘的结果示意图

3.4.2 阶跃响应

电路对于阶跃激励的零状态响应称为电路的阶跃响应。当激励为单位阶跃函数时电路的响应称为单位阶跃响应，用 $s(t)$ 表示。单位阶跃响应可按直流一阶电路分析，即用三要素法进行分析。

例 3.5 试求图 3.25(a) 所示电路在图 3.25(b) 所示脉冲电流作用下的零状态响应 $i_L(t)$ 。

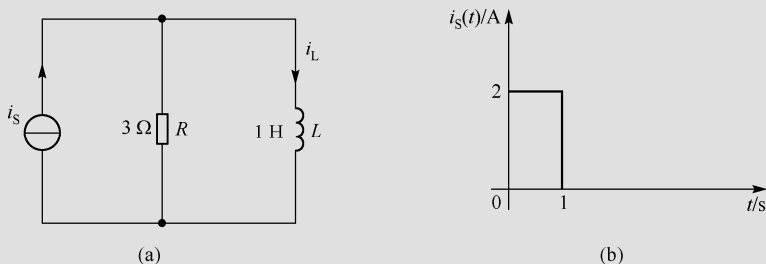


图 3.25 例 3.5 图

解: 该电路对应的阶跃响应 $s(t)$ ，得

$$s(t) = (1 - e^{-3t})\varepsilon(t)$$

将脉冲电流 $i_s(t)$ 看作两个阶跃电流之和，即

$$i_s(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)$$

由电路的零状态线性，可得 $2\varepsilon(t)$ 作用下的零状态响应为 $2s(t)$ ； $-2\varepsilon(t)$ 作用下的零状态响应为 $-2s(t)$ ，可得 $-2\varepsilon(t-1)$ 作用下的零状态响应为 $-2s(t-1)$ 。根据叠加原理，可得 $i_s(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)$ 作用下的零状态响应为

$$2s(t) - 2s(t-1)$$

即

$$i_L(t) = 2(1 - e^{-3t})\varepsilon(t) - 2(1 - e^{-3(t-1)})\varepsilon(t-1)$$

在本例中，首先将图 3.25(b) 所示的分段常量信号分解为阶跃信号，根据叠加原理，将各阶跃信号分量单独作用于电路的零状态响应相加得到该分段常量信号作用下电路的零状态响应。如果电路的初始状态不为零，则需要再叠加上电路的零输入响应，就得到该电路在分段常量信号作用下的全响应。