第二章　极限与连续

高等数学所研究的主要是变量及变量之间的依赖关系，而函数正是这种依赖关系的体现．极限方法是研究变量之间依赖关系的基本方法，极限的思想与理论还是整个高等数学的基础．

本章主要介绍函数极限的概念及其运算，讨论函数的连续性，并简要说明极限的经济应用．

第一节　数列的极限

这里先强化一下数列的极限，并作适当的拓展．

引例 2-1　中国魏晋时期的刘徽在其《九章算术注》（公元 263 年）中，对于计算圆的面积提出了著名的“割圆术”：“割之弥细，所失弥少．割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣．”意思是说，圆内接正 n 边形的边数 n 越大，正 n 边形的面积 S_n 就越接近圆的面积 S；当 n 充分大时，S_n 就等于 S．这就是原始的极限方法．

引例 2-2　观察下面按一定次序排列的一列数的变化情况．

（1）$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots$；　（2）$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \cdots,\ \dfrac{n}{n+1},\ \cdots$；

（3）$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots$；　（4）$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ \dfrac{1+(-1)^n}{2},\ \cdots$

对于数列（1），如图 2-1 所示，随着数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$的项数 n 越来越大，数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$的项越来越趋近 0；当 n 无限增大时，数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$的项无限趋近于 0．

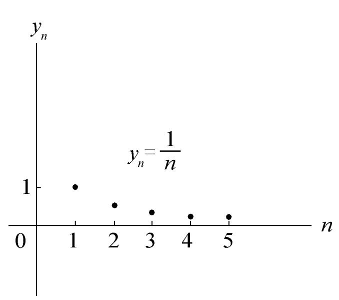

图 2-1

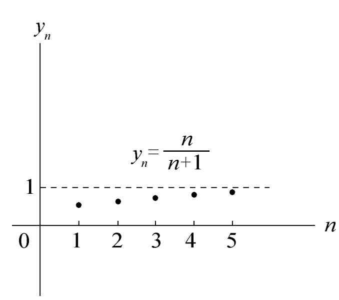

图 2-2

对于数列（2），如图 2-2 所示，随着数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的项数$n$越来越大，数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的项越来越趋近 1；当$n$无限增大时，数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的项无限趋近于 1.

对于数列（3），如图 2-3 所示，随着数列$\{n\}$的项数n越来越大，数列$\{n\}$的项亦越来越大；当n无限增大时，数列$\{n\}$的项无限增大，并不趋近于任何一个常数.

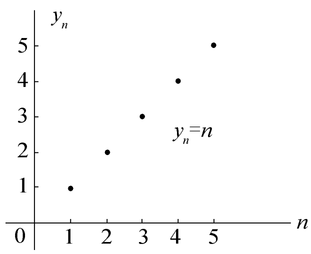

图 2-3

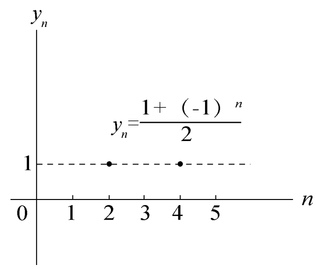

图 2-4

对于数列（4），如图 2-4 所示，随着数列$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$的项数$n$越来越大，数列$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$的项在 0 与 1 之间摆动；当$n$无限增大时，数列$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$的项始终在 0 与 1 之间摆动，并不趋近于任何一个常数.

于是，可以提炼出数列极限的概念.

数列的极限　对于数列$\{x_n\}$，如果当项数n无限增大时，x_n无限趋近于某个确定的常数A，那么称A为数列$\{x_n\}$的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n \to A\ (n\to\infty)$$

这时亦称数列$\{x_n\}$**收敛于**A；如果数列$\{x_n\}$没有极限，那么称数列$\{x_n\}$是**发散**的.

由**引例 2-2** 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}n$与$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$均不存在．因此，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$收敛于 0，数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$收敛于 1，而数列$\{n\}$与$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$均是发散的.

例 2-1　观察下面数列的变化趋势，并写出它们的极限.

（1）$x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$；　　（2）$x_n=\frac{n+1}{n}$；

（3）$x_n=\frac{1}{(-3)^n}$；　　（4）$x_n=4$

解　（1）数列$x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$的项依次为 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，当n无限增大时，x_n无限趋近于 0，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$；

（2）数列 $x_n=\frac{n+1}{n}$ 的项依次为 2，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$，…，当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于 1，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$；

（3）数列 $x_n=\frac{1}{(-3)^n}$ 的项依次为 $-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$-\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$，…，当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于 0，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(-3)^n}=0$；

（4）数列 $x_n=4$ 为常数数列，无论 n 取怎样的正整数，x_n 始终为 4，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}4=4$.

一般地，一个常数数列的极限等于这个常数本身，即

$$\lim_{n\to\infty}c=c\text{（}c\text{ 为常数）}$$

【基础训练 2-1】

1. 观察下面数列的变化趋势，并判断极限是否存在；若存在，写出它们的极限值.

（1）$y_n=\frac{1}{2^{n-1}}$；

（2）$y_n=\frac{n+1}{n}$；

（3）$y_n=\sqrt[n]{3}$；

（4）$y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$；

（5）$y_n=2^n$；

（6）$y_n=(-1)^n$

第二节　函数的极限

显然，数列是定义在自然数集上的一类特殊函数．下面就将数列极限的概念推广到一般函数上来，即介绍函数的极限．

一、函数在无穷大处的极限

首先，讨论函数 $y=f(x)$ 当自变量趋于无穷大时的极限．自变量 x 趋于无穷大记作 $x\to\infty$，它表示 x 的绝对值无限增大，其中包括两种特殊情形：x 取正值无限增大，记作 $x\to+\infty$；x 取负值而绝对值无限增大，记作 $x\to-\infty$．

引例 2-3　森林木材积累之一.

范围一定的森林，在没有人工砍伐和自然灾害的情况下，就一段时间而言，其木材的积累是越来越多的．但是由于其面积固定，容量有限，当木材积累到一定程度之后，其增加的速度就会很慢很慢，并且越来越慢．当时间 t 无限增加时，该森林的木材积累总量 L 就会充分接近于一个固定的数值 A．这时，称 t 无限增加时，木材总量 L 的极限为 A.

引例 2-4　反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像如图 2-5 所示，观察函数在无穷远处的变化情况.

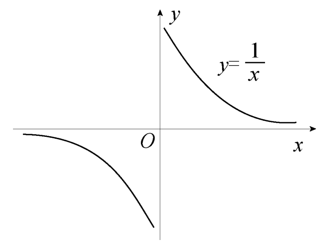

图 2-5

由图 2-5 可看出，当自变量 x 沿着 x 轴正向无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于常数 0，也就是说函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当自变量 x 趋于正无穷时的极限为 0. 当自变量 x 沿着 x 轴负向绝对值无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于常数 0，也就是说函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当自变量 x 趋于负无穷时的极限为 0. 如果不考虑自变量 x 的符号，当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 也无限地接近于常数 0，也就是说函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当自变量 x 趋于无穷时的极限为 0.

将上述情况归纳起来，有：

$x\to+\infty$ 时函数的极限　设函数 $f(x)$ 在区间（a，$+\infty$）有定义. 如果存在常数 A，当自变量 x 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于常数 A，那么称这个常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to+\infty)$$

$x\to-\infty$ 时函数的极限　设函数 $f(x)$ 在区间（$-\infty$，a）有定义. 如果存在常数 A，当自变量 x 无限减小时，相应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于常数 A，那么称这个常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to-\infty)$$

$x\to\infty$ 时函数的极限　设函数 $f(x)$ 在区间（$-\infty$，$-a$）$\cup$（a，$+\infty$）有定义（$a>0$ 为常数）. 如果存在常数 A，当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于常数 A，那么称这个常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to\infty)$$

三个极限的关系　如果函数 $f(x)$ 在（$-\infty$，$-a$）$\cup$（a，$+\infty$）（$a>0$ 为常数）有定义，那么

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

由**引例 2-4** 可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0，\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0，\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

例 2-2　讨论下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限.

（1）$y=2^x$；　　　　（2）$y=\arctan x$

解　（1）由指数函数的图像及性质可知

$$\lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}2^x=0$$

于是，$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$．所以，极限$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$不存在．

（2）如图 2-6 所示，由反正切函数的图像及性质可知

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

于是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$．所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在．

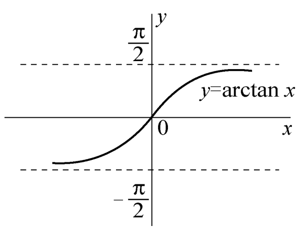

图 2-6

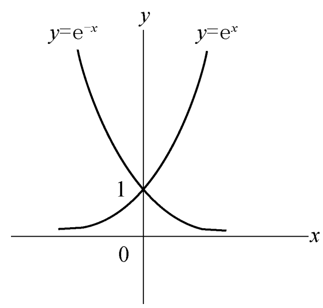

图 2-7

例 2-3　求$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}$和$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}$．

解　如图 2-7 所示，可知

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$$

二、函数在有限点处的极限

现在，讨论函数$y=f(x)$当自变量趋于有限值时的极限．自变量x趋于有限值x_0记作$x\to x_0$，其中包含两种特殊情形：x从x_0的右侧无限趋近于x_0，记作$x\to x_0^+$，此时有$x>x_0$；x从x_0的左侧无限趋近于x_0，记作$x\to x_0^-$，此时有$x<x_0$．

引例 2-5　森林木材积累之二．

当时间t无限地趋近某一固定的时间点t_0时，该森林的木材积累总量L，就会充分接近于该时间点的总量A_0．这时，称t无限趋近于t_0时，木材总量L的极限为A_0．

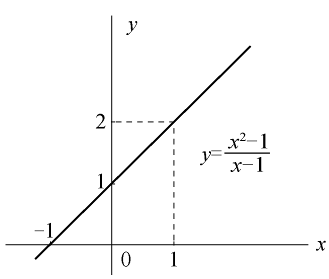

图 2-8

引例 2-6　考察当$x\to1$时，函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势．

注意到当$x\neq1$时，函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，作出函数的图像（如图 2-8 所示），易见当$x\to1$时函数$f(x)$的值无限接近于常数 2．

将 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势进行归纳，有：

$x \to x_0$ 时函数的极限　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义．如果存在常数 A，当自变量 x 无限趋近于点 x_0（x 不等于 x_0）时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 x_0 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (x \to x_0)$$

从**引例 2-6** 可以看出，虽然 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 处没有定义，但当 $x \to 1$ 时函数 $f(x)$ 的极限却是存在的．所以，当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限与函数在 $x = x_0$ 处是否有定义无关．

例 2-4　观察图 2-9，求极限 $\lim\limits_{x \to 1}(x+1)$．

解　如图 2-9 所示，当 x 无限趋近于 1 时，函数 $f(x) = x + 1$ 无限趋近于 2，所以有

$$\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

有时，我们只需要讨论或只能考虑当 $x \to x_0^+$ 或 $x \to x_0^-$ 时，函数的变化趋势．

右极限　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域有定义．如果存在常数 A，当自变量 x 从右侧无限趋近于点 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{或} f(x_0 + 0) = A$$

左极限　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域有定义．如果存在常数 A，当自变量 x 从左侧无限趋近于点 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{或} f(x_0 - 0) = A$$

左极限、右极限统称为**单侧极限**．

函数的极限与单侧极限的关系　如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，那么

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

例 2-5　设 $f(x) = \begin{cases} 2 & x \leqslant 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$，试判断 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 是否存在．

解　依题意，易知

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2 = 2, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

于是

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在．

例 2-6　讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$，当 $x \to 0$ 时的极限（如图 2-10 所示）．

解 依题意，易知

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^2=0$$

由于 $f(0-0)\neq f(0+0)$，因此 $\lim_{x\to0}f(x)$ 不存在.

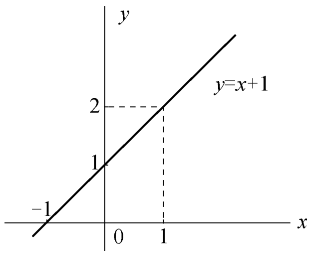

图 2-9

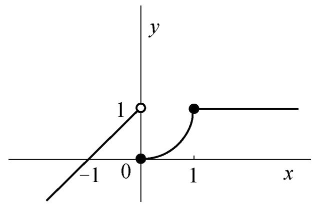

图 2-10

以上两例表明，在求分段函数在分界点的极限时，通常要分别考察其左右极限.

【基础训练 2-2】

1. 根据函数的图像，讨论下列各函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x}$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}5^x$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$；

（5）$\lim\limits_{x\to1}\left(2+x^2\right)$；（6）$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to0}\sin x$ ；（8）$\lim\limits_{x\to0^+}\lg x$

2. 观察下列函数当 $x\to2$ 时以的变化趋势，并求出其当 $x\to2$ 时的极限.

（1）$y=2x+1$；（2）$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

3. 作出函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x\leqslant3\\ 2x-1 & 3<x<5\end{cases}$ 的图像，并求出当 $x\to3$ 时 $f(x)$ 的左、右极限.

4. 讨论下列函数当 $x\to0$ 时的极限.

（1）$f(x)=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$；（2）$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant0\\ 1-x & x<0\end{cases}$；

（3）$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

第三节　无穷小量与无穷大量

在实际问题中，会经常遇到极限为零的变量．这里，就来介绍这类无穷小量以及与其相对应的无穷大量．为了叙述方便，以 $x \to X$ 代表上第二节所提出的六个极限过程，而不一一复述．

一、无穷小的概念

引例 2-7　洗涤效果．

在用洗衣机清洗衣物时，清洗的时间 t 越长，衣物上残留污质的数量 m 就越少；当清洗时间 t 无限增大时，衣物上残留污质的数量 m 就无限地趋近于零．

无穷小　如果当 $x \to X$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称 $f(x)$ 为当 $x \to X$ 时的**无穷小量**，简称**无穷小**．

如，函数 $f(x)=(x-1)^2$ 是当 $x \to 1$ 时的无穷小；函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小．

注意：

（1）说一个函数是无穷小，必须指明自变量的变化趋势．如，$f(x)=(x-1)^2$ 是当 $x \to 1$ 的无穷小；而当 x 趋向其他数值时，$f(x)=(x-1)^2$ 就不是无穷小．

（2）常数中只有“0”可以看成无穷小，其他无论绝对值多么小的常数都不是无穷小．

根据定义，无穷小具有以下性质：

性质 1　有限个无穷小的代数和仍然是无穷小；

性质 2　有限个无穷小的乘积仍然是无穷小；

性质 3　有界函数与无穷小的乘积仍然是无穷小．

例 2-7　求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$．

解　因 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}=0$，知 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小．又 $|\sin x| \leqslant 1$，知 $\sin x$ 是有界函数．所以根据无穷小的性质知，$\dfrac{1}{x}\sin x$ 仍为当 $x \to \infty$ 时的无穷小，即

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}=0$$

二、无穷大的概念

无穷大　如果当 $x \to X$ 时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么称 $f(x)$ 为当 $x \to X$ 时

的无穷大量，简称无穷大，记作

$$\lim_{x\to X} f(x)=\infty \quad 或 \quad f(x)\to\infty \ （x\to X）$$

如果当 $x\to X$ 时，函数 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 无限增大，那么称 $f(x)$ 为当 $x\to X$ 时的正无穷大，记作

$$\lim_{x\to X} f(x)=+\infty \quad 或 \quad f(x)\to+\infty \ （x\to X）$$

如果当 $x\to X$ 时，函数 $f(x)<0$ 且 $|f(x)|$ 无限增大，那么称 $f(x)$ 为当 $x\to X$ 时的负无穷大，记作

$$\lim_{x\to X} f(x)=-\infty \quad 或 \quad f(x)\to-\infty \ （x\to X）$$

注意：

（1）说一个函数是无穷大时，必须要指明自变量变化的趋向.

（2）任何一个不论多大的常数，都不是无穷大.

（3）这里采用极限记号只为方便起见，并不表明极限存在.

如，当 $x\to\infty$ 时，x^2 是正无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$；又如，当 $x\to 0^-$ 时，$\ln x$ 是负无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to 0^-}\ln x=-\infty$.

三、无穷小与无穷大的关系

设函数 $f(x)$ 在相关区间内有定义，于是：

（1）如果函数 $f(x)$（$x\to X$）是无穷大，那么函数 $\dfrac{1}{f(x)}$（$x\to X$）是无穷小；

（2）如果函数 $f(x)$（$x\to X$）是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，那么函数 $\dfrac{1}{f(x)}$（$x\to X$）是无穷大.

例 2-8 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$.

解 易知 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，即当 $x\to 1$ 时，$x-1$ 是无穷小，那么 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 是 $x\to 1$ 时的无穷大，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

四、无穷小与函数极限的关系

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，那么

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中，$\alpha(x)$（$x\to x_0$）是无穷小.

事实上，由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 无限趋近于 A（$x\to x_0$）$\Leftrightarrow$ $f(x)-A$ 无限趋近于 0（$x\to x_0$）$\Leftrightarrow$ $f(x)-A$ 是无穷小（$x\to x_0$）．如果记 $f(x)-A=\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$（$x\to x_0$）是无穷小，那么 $f(x)=A+\alpha(x)$．

这里的每一步都等价推理，因此说明上述关系是成立的．

五、无穷小的比较

无穷小虽然都是以零为极限的量，但不同的无穷小趋近于零的“速度”却不一定相同．如，当 $x\to 0$ 时，x，$2x$，x^2 都是无穷小，但它们趋向于零的速度不一样．现列表 2-1 如下．

表 2-1　三个无穷小的比较

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001	…
$2x$	2	1	0.2	0.02	0.002	…
x^2	1	0.25	0.01	0.0001	0.000001	…

可以看出 x^2 比 x，$2x$ 趋于零的速度都快得多，而 x 和 $2x$ 趋于零的速度大致相同．根据无穷小的性质，两个无穷小的代数和与乘积仍然是无穷小．但是，两个无穷小的商却不能确定．如

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$$

无穷小比较　设两个函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是 $x\to X$ 时的无穷小．

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，那么称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 相比是**高阶无穷小**，记作 $\beta(x)=o(\alpha(x))$；

（2）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，那么称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 相比是**低阶无穷小**；

（3）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=c\neq 0$，那么称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是**同阶无穷小**；

（4）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，那么称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是**等价无穷小**，记作 $\beta(x)\sim\alpha(x)$．

此外，从定义中可以看出，等价无穷小是 $c=1$ 时的同阶无穷小．

如，当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 x 高阶的无穷小，即 $x^2=o(x)$；反过来，x 是比 x^2 低阶的无穷小；而 $2x$ 与 x 是同阶无穷小，但不是等价无穷小．

例 2-9　三个函数 $2(\sqrt{x}-1)$，x^3-1，x^3-3x+2 都是当 $x\to 1$ 时的无穷小，试与 $x-1$ 相比较，哪个是高阶无穷小？哪个同阶无穷小？哪个等价无穷小？

解 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{x}+1}=1,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)=0$$

所以当 $x\to 1$ 时，$2(\sqrt{x}-1)$ 是与 $x-1$ 等价的无穷小，x^3-1 是与 $x-1$ 同阶的无穷小，x^3-3x+2 是比 $x-1$ 高阶的无穷小.

下面是几个常用的等价的无穷小（当 $x\to 0$ 时）：

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,$$

$$\arctan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\quad \ln(1+x)\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x.$$

【基础训练 2-3】

1. 判断题.

（1）无穷小是一个很小的数；

（2）无穷大是一个很大的数；

（3）无穷小和无穷大是互为倒数的量；

（4）一个函数乘以无穷小后为无穷小.

2. 在下列试题中，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

（1）$y_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n}$ （$n\to\infty$）；

（2）$y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ （$x\to 2$）；

（3）$y=\ln x$ （$x>0$，$x\to 0$）；

（4）$y=5^{-x}$ （$x\to+\infty$）

3. 试比较下列各组无穷小阶数的高低.

（1）$x-4$ 与 $4(\sqrt{x}-2)$ （$x\to 4$）；

（2）$3x^3-2x^2$ 与 x^2 （$x\to 0$）；

（3）$\dfrac{1}{2x^2}$ 与 $\dfrac{2}{x}$ （$x\to\infty$）

4. 求下列各函数极限.

（1）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}$；

（2）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\cos\frac{1}{x}$；

（3）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n^2}{n}$；

（4）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan 2x^2}$；

（5）$\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\arctan x}{x}$

第四节　极限的运算

虽然已经定义了函数的极限，但是到目前为止，还是不能自由地去计算函数的极限．下面，就提出四则运算的极限法则、复合函数的极限法则，并进行一些基本的极限运算．

一、四则运算的极限法则

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，那么

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$　（$B\neq 0$）．

事实上，因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，根据无穷小与函数极限的关系，可设

$$f(x)=A+\alpha(x),\quad g(x)=B+\beta(x)$$

其中 $\alpha(x)$（$x\to x_0$）与 $\beta(x)$（$x\to x_0$）都是无穷小．于是

$$\begin{aligned} f(x)\pm g(x)&=[A+\alpha(x)]\pm[B+\beta(x)]\\ &=(A\pm B)+[\alpha(x)\pm\beta(x)] \end{aligned}$$

由无穷小的性质，知 $\alpha(x)\pm\beta(x)$（$x\to x_0$）是无穷小．再据无穷小与函数极限的关系，即得

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$$

这就表明（1）是成立的．其他情形类似．

推论 1　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而 C 为常数，那么

$$\lim_{x\to x_0} Cf(x)=C\lim_{x\to x_0} f(x)$$

推论 2　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而 n 为正整数，那么

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^n$$

其中，在法则（2）中取 $g(x)=C$ 可得推论 1；取 $g(x)=f(x)$ 再推广到 n 的情形可得推论 2．

例 2-10　求 $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2+3)$．

解　根据四则运算的极限法则，可得

$$\lim_{x\to 2}(4x^2+3)=\lim_{x\to 2}4x^2+\lim_{x\to 2}3=4(\lim_{x\to 2}x)^2+3$$

$$=4\times 2^2+3=19$$

一般地，如果函数 $f(x)$ 为多项式，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

例 2-11 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-1}{x^2-x+1}$.

解 根据四则运算的极限法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-1}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^3-\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1}$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 0}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to 0}x)^2-0+1}=\frac{0-1}{0-0+1}=-1$$

如果 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为有理分式函数，且 $g(x_0)\neq 0$ 时，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$. 但是，若 $g(x_0)=0$ 时，那么商的极限运算法则不适用，必须用另外的方式处理.

例 2-12 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$，因此不能直接用商的极限运算法则进行计算，又 $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$，且在 $x\to 3$ 的过程中 $x\neq 3$，因此求此分式极限时，应首先约去非零因子 $x-3$. 于是

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$$

注意 上述变形只能在求极限的过程中进行，不要误认为函数 $\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 与 $\dfrac{1}{x+3}$ 是同一函数.

例 2-13 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解 因为当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1}{1-x}$ 与 $\dfrac{3}{1-x^3}$ 的极限都不存在，所以不能直接应用代数和的极限法则进行计算，应先通分，进行适当的变形，然后用相应的法则来计算. 于是

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)}$$

$$=-1$$

例 2-14 求下列函数极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-5}{4x^2+x+2}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^3-2x^2-1}$

解 （1）因为 $x\to\infty$ 时，分子分母的极限都不存在，所以不能直接应用商的极限法则. 可先用 x^2 同除分子、分母，然后再求极限. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x-5}{4x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}$$

$$=\frac{3-0-0}{4+0+0}=\frac{3}{4}$$

（2）先用 x^3 同除分子、分母，然后再求极限．于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{3x^3-2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3})}$$

$$=\frac{0+0-0}{3-0-0}=0$$

一般地，当 $a_0\neq 0$， $b_0\neq 0$， m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0 & m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ \infty & m>n\end{cases}$$

二、复合函数的极限法则

设有两个函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$．如果

$$\lim_{u\to u_0}f(u)=A,\quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$$

又当 $x\neq x_0$ 时， $\varphi(x)\neq u_0$，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A=\lim_{u\to u_0}f(u)$$

例 2-15　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{2}$．

解　作变量代换，令 $u=\dfrac{x}{2}$，那么当 $x\to 0$ 时， $u\to 0$．根据复合函数的极限法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=\lim_{u\to 0}\sin u=\sin 0=0$$

例 2-16　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$．

解　作变量代换，令 $t=\sqrt[3]{1+x}$，那么当 $x\to 0$ 时， $t\to 1$，且 $x\neq 0$ 时 $t\neq 1$．根据复合函数的极限法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{3}$$

三、两个重要极限

第一个重要的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

列表考察 $x\to 0$ 时函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的变化趋势，见表 2-2.

表 2-2 函数的变化趋势

x	± 1	± 0.5	± 0.1	± 0.01	± 0.001	$\cdots \quad \to 0$
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.8414709	0.9588511	0.9983342	0.9999833	0.9999998	$\cdots \quad \to 1$

由表 2-2 可以看出，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的值无限趋近于 1，所以（可以证明，此略）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

此重要极限有两个特征：

（1）当 $x\to 0$ 时，分子、分母均为无穷小，简记为“$\dfrac{0}{0}$”型；

（2）正弦符号后面的变量与分母的变量以及趋势变量三者完全相同，才有 $\lim\limits_{\nabla\to 0}\dfrac{\sin\nabla}{\nabla}=1$.

例 2-17 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$ ；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$

解 （1）根据第一个重要的极限，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

（2）作变量代换，令 $t=5x$ ，那么当 $x\to 0$ 时，$5x\to 0$. 于是根据第一个重要的极限，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}&=\lim_{5x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\\&=5\lim_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\\&=5\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\\&=5\times 1=5\end{aligned}$$

例 2-18 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 作变量代换，令 $\dfrac{1}{x}=t$ ，于是当 $x\to\infty$ 时 $t\to 0$. 根据第一个重要的极限，可得

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sin t = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

例 2-19　证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

证　对函数表达式进行变形后，根据第一个重要的极限，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$$

例 2-20　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　对函数表达式进行变形后，根据第一个重要的极限，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

第二个重要的极限　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

列表观察 $x\to\infty$ 时函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势，见表 2-3.

表 2-3　函数的变化趋势

x	10	102	103	104	105	106	… →+∞
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828	… →e
x	–10	–102	–103	–104	–105	–106	… →–∞
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.86792	2.73200	2.71964	2.71841	2.71830	2.71828	… →e

由表 2-3 可以看出，无论是当 $x\to+\infty$ 时还是 $x\to-\infty$ 时，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的值都无限趋近于一个实数 2.718281828459045……，它是一个无理数，通常记作 e . 所以（可以证明，此略）

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

若令 $\dfrac{1}{x}=t$ ，则当 $x\to\infty$ 时， $t\to 0$. 于是，所以上式也可改写成

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}$$

一般地，当 $x\to X$ 时，若 $\varphi(x)\to 0$ ，则有

$$\lim_{x\to X}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \mathrm{e}$$

例 2-21 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

解 作变量代换，令 $\dfrac{x}{3}=t$，于是 $x=3t$，且当 $x\to\infty$ 时 $t\to\infty$．利用第二个重要的极限，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}&=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}\\&=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{3}\\&=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{3}\\&=\mathrm{e}^{3}\end{aligned}$$

例 2-22 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

解 （1）利用第二个重要的极限，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}&=\lim_{2x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}\\&=\lim_{2x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\left[\lim_{2x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

（2）利用第二个重要的极限，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}&=\lim_{-x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x\cdot(-1)}\\&=\lim_{-x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}\\&=\left[\lim_{-x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}\\&=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

例 2-23 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

解　先将函数表达式变形，知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}$$

令 $t=\dfrac{4}{x-1}$，于是 $x=\dfrac{4}{t}+1$，而 $x+3=\dfrac{4}{t}+4$．由于当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，所以利用第二个重要的极限，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}&=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{4}{t}+4}\\&=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{4}{t}}\cdot(1+t)^4\\&=\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^4\left[\lim_{t\to 0}(1+t)\right]^4\\&=\mathrm{e}^4\times 1\\&=\mathrm{e}^4\end{aligned}$$

例 2-24　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$．

解　先将函数表达式变形，根据复合函数的极限法则，并利用第二个重要的极限，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\ln\mathrm{e}=1$$

例 2-25　某企业对自己的产品进行跟踪，分析后得出其一种产品的价格 p（单位：元）与时间 t（单位：年）的关系为 $p(t)=600-17\times 3^{-2t}$．显然，产品价格随着时间的变化而变化，试对该产品长期价格作出预测．

解　该产品长期价格可以看作当时间 $t\to+\infty$ 时函数 $p(t)$ 的极限．于是

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}p(t)&=\lim_{t\to+\infty}(600-17\times 3^{-2t})\\&=\lim_{t\to+\infty}600-\lim_{t\to+\infty}17\times 3^{-2t}\\&=600-17\lim_{t\to+\infty}3^{-2t}\\&=600-17\times 0\\&=600\end{aligned}$$

即该产品长期价格为600元．

【基础训练 2-4】

1. 求下列极限．

（1）$\lim\limits_{x\to -2}(2x^2-5x+3)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{3}{x-1}\right)$；