

第5章 信号的相关函数和功率谱

在检测技术中,相关检测已经发展成一个独立的分支,并引起人们的广泛关注。相关函数的估计和计算是经典谱估计和现代谱估计的基础。相关函数是与卷积十分类似的数学运算,与卷积运算一样,相关运算也涉及两个信号序列。但卷积主要关心对其中一个信号的处理功能和处理效果,例如除去其中的干扰噪声。而相关运算是研究两个信号的相似性,或一个信号经过延迟后与原信号的相似性,以实现信号的检测、识别与信息提取。

本章主要介绍确定性信号的相关函数的定义、性质与应用。但实际中,相关函数是描述随机信号的重要统计量,在随机信号的分析与处理中有着重要作用。有关随机信号相关函数和功率谱的估计理论和方法见参考文献[12]。

5.1 互相关函数和自相关函数

定义
$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m) \quad (5.1.1)$$

为信号 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的互相关函数^①。从式(5.1.1)可见,将 $x(n)$ 保持不动,将 $y(n)$ 右移 m 个采样周期得到 $y(n-m)$,再将 $x(n)$ 与 $y(n-m)$ 相乘并求和,则得到 $r_{xy}(m)$ 在 m 时刻的值,反映了 $x(n)$ 与 $y(n-m)$ 两个波形的相似程度。

与序列卷积运算相比较,相关运算仅缺少了将 $y(n)$ 翻转变成 $y(-n)$ 的步骤,其他运算过程完全相同。所以

$$r_{xy}(m) = x(n) * y(-n) \Big|_{n=m} \quad (5.1.2)$$

因此,用于卷积的计算过程和程序都可以直接用于计算序列的相关函数。将 $y(n)$ 翻转变成 $y(-n)$,再调用卷积函数计算 $x(m) * y(-m)$,则得到 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的互相关函数 $r_{xy}(m)$ 。

如果式(5.1.1)中 $x(n) = y(n)$,则上面定义的互相关函数变成 $x(n)$ 的自相关函数,记为 $r_{xx}(m)$,即

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-m) \quad (5.1.3)$$

自相关函数表示了信号 $x(n)$ 与其自身移位后的 $x(n-m)$ 的相似程度。为了表示简单,下面将自相关函数记为 $r_x(m)$ 。

$$r_x(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) \triangleq E_x \quad (5.1.4)$$

式(5.1.4)说明, $r_x(0)$ 表示 $x(n)$ 的能量,记为 E_x 。当 $E_x < \infty$ 时,信号 $x(n)$ 称为能量信号;当 $E_x = \infty$ 时,信号 $x(n)$ 称为能量无限信号。对能量无限信号,我们主要研究其平均功率。信号 $x(n)$ 的功率定义为

^① 互相关函数也可以定义为 $r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m)$,二者本质是相同的。式(5.1.1)更便于工程上借用卷积算法和程序进行计算。

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (5.1.5)$$

当 $P_x < \infty$ 时, 称 $x(n)$ 为功率信号。功率信号是工程实际和理论研究中的常用信号, 如周期信号。

当输入序列是有限长序列, 或只能获得无限长序列的有限个序列值时, 通常将互相关和自相关函数表示成有限和的形式。特别是当 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是长度为 N 的因果序列时, 互相关和自相关函数可以表示为

$$r_{xy}(m) = \begin{cases} \sum_{n=m}^{N-1} x(n)y(n-m), & 0 \leq m < N \\ \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)y(n-m), & -N < m < 0 \\ 0, & m \text{ 为其他值} \end{cases} \quad (5.1.6)$$

$$r_x(m) = \begin{cases} \sum_{n=m}^{N-1} x(n)x(n-m), & 0 \leq m < N \\ \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n-m), & -N < m < 0 \\ 0, & m \text{ 为其他值} \end{cases} \quad (5.1.7)$$

上述对相关函数的定义都是针对实信号的, 如果 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是复信号, 其相关函数也是复信号, 定义式 (5.1.1) 和 (5.1.3) 应该为

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m) \quad (5.1.8)$$

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-m) \quad (5.1.9)$$

在后面的讨论中, 如果不做特别说明, $x(n)$ 和 $y(n)$ 一律都视为实信号。

例 5.1.1 设信号为 $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$ 。求其自相关函数。

解: 由于 $x(n)$ 是无限时宽的, 所以, $r_x(m)$ 也是无限时宽的。下面分 $m \geq 0$ 和 $m < 0$ 两种情况来求解。

当 $m \geq 0$ 时, 由图 5.1.1 可见,

$$r_x(m) = \sum_{n=m}^{\infty} x(n)x(n-m) = \sum_{n=m}^{\infty} a^n a^{n-m} = a^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} (a^2)^n$$

因为 $a < 1$, 无限级数收敛, 所以有

$$r_x(m) = a^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} (a^2)^n = \frac{a^m}{1-a^2}, \quad m \geq 0$$

当 $m < 0$ 时, 由图 5.1.1 可见

$$r_x(m) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)x(n-m) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n a^{n-m} = a^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n = \frac{a^{-m}}{1-a^2}, \quad m < 0$$

因为 $m < 0$ 时, $a^{-m} = a^{|m|}$, 于是, $r_x(m)$ 的上述两段表示式可以合并为

$$r_x(m) = \frac{a^{|m|}}{1-a^2}, \quad -\infty < m < \infty \quad (5.1.10)$$

自相关函数 $r_x(m)$ 如图 5.1.1 所示。由图可以观察到, $r_x(m)$ 是偶对称函数, 即 $r_x(-m) = r_x(m)$ 。后面会证明, 自相关函数都是偶函数。

例 5.1.2 已知序列 $x(n]$ 和 $y(n]$ 分别为

$$x(n) = \{\dots, 0, 0, 2, -1, 3, 7, 1, 2, -3, 0, 0, \dots\}$$

$$y(n) = \{\dots, 0, 0, 1, -1, 2, -2, 4, 1, -2, 5, 0, 0, \dots\}$$

求 $x(n]$ 和 $y(n]$ 的互相关函数 $r_{xy}(m)$ 。

解: 序列 $x(n]$ 和 $y(n]$ 均为有限长序列, 但不是因果序列, 所以不能直接套用式 (5.1.6), 必须用式 (5.1.1) 计算。

$$(1) \text{ 当 } m=0 \text{ 时 } r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)$$

乘积序列

$$v_0(n) = x(n)y(n) = \{\dots, 0, 0, 2, 1, 6, -14, 4, 2, 6, 0, 0, \dots\}$$

对 n 的所有值, 对乘积序列各项求和, 可得

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(n) = 2 + 1 + 6 - 14 + 4 + 2 + 6 = 7$$

(2) 当 $m > 0$ 时, 只要将 $y(n]$ 相对 $x(n]$ 向右平移 m 个时间单位, 得到 $y(n-m)$, 再计算乘积序列 $v_m(n) = x(n)y(n-m)$, 最后求和 $r_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_m(n)$ 可得

$$r_{xy}(1) = 13; \quad r_{xy}(2) = -18; \quad r_{xy}(3) = 16; \quad r_{xy}(4) = -7;$$

$$r_{xy}(5) = 5; \quad r_{xy}(6) = -3; \quad r_{xy}(m) = 0; \quad m \geq 7$$

(3) 当 $m < 0$ 时, 只要将 $y(n]$ 相对 $x(n]$ 向左平移 $|m|$ 个采样间隔, 再进行同样的计算可得

$$r_{xy}(-1) = 0; \quad r_{xy}(-2) = 33; \quad r_{xy}(-3) = -14; \quad r_{xy}(-4) = 36;$$

$$r_{xy}(-5) = 19; \quad r_{xy}(-6) = -9; \quad r_{xy}(-7) = 10; \quad r_{xy}(m) = 0; \quad m \leq -8$$

综上可得 $x(n]$ 和 $y(n]$ 的互相关函数 $r_{xy}(m)$ 为

$$r_{xy}(m) = \{0, 0, 10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, 7, 13, -18, 16, -7, 5, -3, 0, 0\}$$

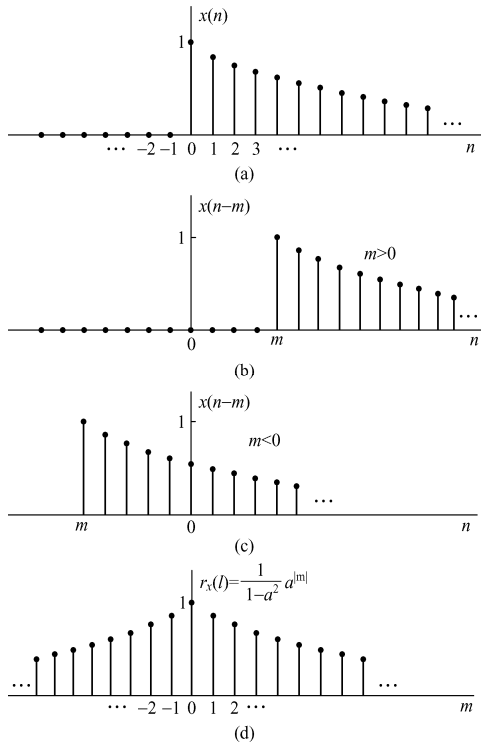


图 5.1.1 信号 $x(n) = a^n u(n)$ 的自相关函数运算示意图

5.2 周期信号的相关性

在 5.1 节中定义了能量信号的互相关函数和自相关函数。在工程实际中, 常常涉及功率信号的相关性。下面讨论功率信号, 特别是周期信号的相关性。

设 $x(n]$ 和 $y(n]$ 是两个功率信号, 其互相关函数定义为

$$r_{xy}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)y(n-m) \quad (5.2.1)$$

当 $x(n) = y(n)$ 时, 功率信号的自相关函数定义为

$$r_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x(n-m) \quad (5.2.2)$$

特别是, 如果 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是两个周期为 N 的周期信号, 则式 (5.2.1) 和式 (5.2.2) 中有限区间上的平均值就等于一个周期上的平均值, 因此, 式 (5.2.1) 和式 (5.2.2) 就可以简化为

$$r_{xy}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-m) \quad (5.2.3)$$

$$r_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m) \quad (5.2.4)$$

由周期信号的定义可得

$$r_x(m+N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m-N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m) = r_x(m) \quad (5.2.5)$$

所以, 周期为 N 的周期信号的自相关函数也是以 N 为周期的。这样, 如果一个周期信号的周期未知, 我们可以根据其自相关函数的周期性质, 就能估计其周期。

例 5.2.1 已知 $x(n) = \sin(\omega n)$, 其周期为 N , 即 $\omega = 2\pi/N$, 求 $x(n)$ 的自相关函数。

解: 由式 (5.2.4) 得

$$\begin{aligned} r_x(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega n) \sin(\omega(n-m)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega n) [\sin(\omega n) \cos(\omega m) - \cos(\omega n) \sin(\omega m)] \\ &= \frac{1}{N} [\cos(\omega m) \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(\omega n) - \sin(\omega m) \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega n) \cos(\omega n)] \end{aligned}$$

由于第二项中 $\sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega n) \cos \omega n = 0$, 第一项中

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(\omega n) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [1 - \cos(2\omega n)] = \frac{N}{2}$$

所以

$$r_x(m) = \frac{1}{2} \cos(\omega m)$$

由此可见, 正弦序列的自相关函数是同频率的余弦序列, 显然自相关函数与原序列周期相同。

5.3 相关函数的性质

互相关函数和自相关函数都有很重要的性质, 这些性质可以使很多问题的分析和判断更加简单。本节中, 假设两个信号 $x(n)$ 和 $y(n)$ 均为能量信号, 其能量分别为 $r_x(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = E_x$ 和

$$r_y(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n) = E_y。$$

5.3.1 互相关函数性质

性质 1 $r_{xy}(m)$ 不是偶函数, 而且 $r_{xy}(m) \neq r_{yx}(m)$, 但有

$$r_{xy}(m) = r_{yx}(-m) \quad (5.3.1)$$

证明: $r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k+m)y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n+m) = r_{yx}(-m)$

性质 2 $r_{xy}(m)$ 满足

$$|r_{xy}(m)| \leq \sqrt{r_x(0)r_y(0)} = \sqrt{E_x E_y} \quad (5.3.2)$$

证明: 生成线性组合序列

$$ax(n) + by(n-m)$$

其中, a 和 b 为任意常数, m 为整数 (表示延时)。该线性组合序列的能量可以表示为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax(n) + by(n-m)]^2 \\ &= a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) + b^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n-m) + 2ab \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m) \\ &= a^2 r_x(0) + b^2 r_y(0) + 2abr_{xy}(m) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

我们知道能量是非负的, 所以下式成立

$$a^2 r_x(0) + b^2 r_y(0) + 2abr_{xy}(m) \geq 0 \quad (5.3.4)$$

假设 $b \neq 0$, 则式 (5.3.4) 两边除以 b^2 得

$$r_x(0) \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2r_{xy}(m) \left(\frac{a}{b}\right) + r_y(0) \geq 0$$

把上式看成关于 $\left(\frac{a}{b}\right)$ 的一元二次方程, 其三个系数为 $r_x(0)$ 、 $2r_{xy}(m)$ 和 $r_y(0)$ 。由于方程非负, 所以二次判别式非正, 即

$$4[r_{xy}^2(m) - r_x(0)r_y(0)] \leq 0$$

由上式可得互相关函数满足的条件:

$$|r_{xy}(m)| \leq \sqrt{r_x(0)r_y(0)} = \sqrt{E_x E_y}$$

如果互相关函数中任一信号或两个信号的幅度增大或缩小, 其互相关函数的形状不会改变, 只是其幅度随之发生变化。由于相关函数幅度并不重要, 所以为了检测判决方便, 实际中通常把互相关函数和自相关函数归一化到 $[-1, 1]$ 上。为此, 定义归一化互相关函数为

$$\rho_{xy}(m) = \frac{r_{xy}(m)}{\sqrt{r_x(0)r_y(0)}} = \frac{r_{xy}(m)}{\sqrt{E_x E_y}} \quad (5.3.5)$$

性质 3

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{xy}(m) = 0 \quad (5.3.6)$$

式 (5.3.6) 说明, 将 $y(n)$ 相对 $x(n)$ 移至无穷远处, 则二者无相关性。这是因为一般能量信号都是有限非零时宽的, 所以, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $x(n)$ 和 $y(n-m)$ 的非零区不重叠, 则式 (5.3.6) 成立。

5.3.2 自相关函数性质

性质 1 若 $x(n)$ 是实信号, $r_x(m)$ 是实偶函数, 即

$$r_x(m) = r_x(-m) \quad (5.3.7)$$

当式 (5.3.1) 中 $x(n) = y(n)$ 时, 即可得式 (5.3.7)。若 $x(n)$ 是复信号, 则 $r_x(m)$ 是共轭对称函数, 即 $r_x(m) = r_x^*(-m)$ 。

性质 2 $r_x(m)$ 在 $m=0$ 时取得最大值, 即 $r_x(0) \geq r_x(m)$ 。

证明: 令式 (5.3.2) 中 $x(n) = y(n)$, 则 $|r_x(m)| \leq \sqrt{r_x(0)r_x(0)} = r_x(0)$, 因此满足 $r_x(0) \geq r_x(m)$ 。

同样道理, 定义归一化自相关函数为

$$\rho_x(m) = r_x(m) / r_x(0) = r_x(m) / E_x \quad (5.3.8)$$

性质 3 对能量信号 $x(n)$, 将 $x(n)$ 相对自身移至无穷远处, 则二者不相关。即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_x(m) = 0 \quad (5.3.9)$$

5.4 输入输出信号的相关函数

本节讨论时域离散线性时不变系统输出信号与输入信号的互相关函数。假设系统输入信号 $x(n)$ 的自相关函数 $r_x(m)$ 已知, 系统单位脉冲响应为 $h(n)$, 系统输出信号为

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

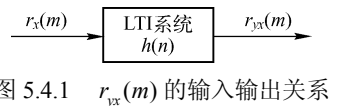
由式 (5.1.2), 输出信号与输入信号的互相关函数可表示为

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= y(m) * x(-m) = h(m) * x(m) * x(-m) \\ &= h(m) * [x(m) * x(-m)] \\ &= h(m) * r_x(m) \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

由式 (5.4.1) 可见, 输出信号与输入信号的互相关函数等于系统单位脉冲响应 $h(n)$ 与输入信号自相关函数 $r_x(m)$ 的卷积。所以, $r_{yx}(m)$ 可以看成线性时不变系统对输入序列 $r_x(m)$ 的响应输出, 如图 5.4.1 所示。

在式 (5.1.2) 中令 $x(n) = y(n)$, 再利用卷积的性质, 可以得到系统输出信号的自相关函数 $r_y(m)$ 。

$$\begin{aligned} r_y(m) &= y(m) * y(-m) = [h(m) * x(m)] * [h(-m) * x(-m)] \\ &= [h(m) * h(-m)] * [x(m) * x(-m)] \\ &= r_h(m) * r_x(m) \end{aligned} \quad (5.4.2)$$



如果系统稳定, 则 $h(n)$ 为能量信号, $r_h(m)$ 存在。这样, 如果 $r_x(m)$ 存在, 则 $r_y(m)$ 存在, 即输出信号也是能量信号。在式 (5.4.2) 中令 $m=0$, 可得输出信号的能量:

$$r_y(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_h(n)r_x(n) \quad (5.4.3)$$

式 (5.4.3) 以相关函数的形式给出了输出信号的能量。实际上, 本节所得输入输出信号的相关函数关系式对于能量信号和功率信号都适用。

5.5 信号的能量谱密度和功率谱密度^①

在工程实际中, 可能需要分析信号的频率成分。例如, 在多普勒雷达系统中, 通过分析发射信号和接收信号之间的频移, 可以得到目标的速度信息。又如, 分析信号中干扰噪声所

① 本节内容可作为本科生选讲内容, 也可跳过, 留在随机信号处理课中讲授。

在的频段以便将其滤除。在音频压缩中，通过谱分析决定压缩策略。

表征物理现象的各种信号，可以分为确知信号和随机信号两大类。对于确知信号，可以用信号的傅里叶频谱描述，但对于类似噪声的随机信号，如语音信号中的浊音，其傅里叶变换不存在，只能通过统计平均的方法，用其功率谱描述。即从有限的信号采样中估计出信号的功率谱。功率谱估计（简称谱估计）分为经典谱估计和现代谱估计，经典谱估计又分为周期图法和自相关法。自相关法是先估计观测信号的自相关函数，再对自相关函数进行傅里叶变换得到功率谱。所以信号的相关函数是谱估计的基础。谱估计属于随机信号处理的内容，一般在研究生课程中学习，或工作中研究。

本节仅介绍能量谱密度和功率谱密度的基本概念和定义，并直接给出有关重要结论，相应的理论证明推导和具体的估计方法留在研究生课程中介绍，读者也可以参考有关随机信号处理的书。

5.5.1 信号的能量谱

假设 $x(n)$ 是实能量信号，对 $x(n)$ 的自相关函数进行傅里叶变换，得

$$\text{FT}[r_x(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m) e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-m) \right] e^{-j\omega m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) e^{-j\omega m}$$

令 $k = n - m$ ，上式变为

$$\text{FT}[r_x(m)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{j\omega k} = X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$$

根据傅里叶变换的唯一性，有

$$r_x(m) = \text{IFT}[|X(e^{j\omega})|^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 e^{j\omega m} d\omega$$

$$r_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (5.5.1)$$

由于 $r_x(0)$ 是信号 $x(n)$ 的能量，所以，式 (5.5.1) 说明 $x(n)$ 的能量谱密度（简称为能量谱）为 $|X(e^{j\omega})|^2$ ，将能量谱记为 $G_x(\omega)$ ，即 $x(n)$ 的自相关函数与 $x(n)$ 的能量谱构成一对傅里叶变换。

$$G_x(\omega) = \text{FT}[r_x(m)] = |X(e^{j\omega})|^2 \quad (5.5.2)$$

$$r_x(m) = \text{IFT}[G_x(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_x(\omega) e^{j\omega m} d\omega \quad (5.5.3)$$

由上述结论可知，自相关函数仅保留了信号的幅频信息，而丢失了相位信息。所以，不能从 $G_x(\omega)$ 或 $r_x(m)$ 回复原信号 $x(n)$ 。由式 (5.5.2) 可见 $G_x(\omega)$ 是非负的。

设 LTI 系统的输入为 $x(n)$ ，输出为 $y(n)$ ，由式 (5.4.2) 及傅里叶变换的时域卷积定理，可得到输出能量谱与输入能量谱的关系：

$$G_y(\omega) = \text{FT}[r_y(m)] = |H(e^{j\omega})|^2 G_x(\omega) \quad (5.5.4)$$

对稳定系统， $|H(e^{j\omega})|^2$ 存在，由此，从频域也证明了能量信号通过稳定系统后，其输出响应仍是能量信号。

5.5.2 信号的功率谱

设 $x(n)$ 是平稳随机序列，其自相关函数为

$$r_x(m) = E[x(n)x(n-m)] \quad (5.5.5)$$

其中 $E[\bullet]$ 表示统计平均。对于确定性功率信号，自相关函数定义见式 (5.2.2)。根据维纳-辛钦定理，当 $x(n)$ 的均值为零时，自相关函数 $r_x(m)$ 与功率谱密度 $P_x(\omega)$ 是一对傅里叶变换，即

$$P_x(\omega) = \text{FT}[r_x(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m)e^{-j\omega m} \quad (5.5.6)$$

$$r_x(m) = \text{IFT}[P_x(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega)e^{j\omega m} d\omega \quad (5.5.7)$$

维纳-辛钦定理揭示了从时间角度描述随机信号的统计规律和从频率角度描述随机信号的统计规律之间的关系。

下面解释为什么将 $P_x(\omega)$ 称为 $x(n)$ 的功率谱密度。在式 (5.5.7) 中令 $m=0$ ，则

$$r_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega) d\omega \quad (5.5.8)$$

对比式 (5.2.2) 和式 (5.1.5) 知道， $r_x(0)$ 表示 $x(n)$ 的平均功率，所以，式 (5.5.8) 表明 $P_x(\omega)$ 就是 $x(n)$ 的功率谱密度，简称功率谱。随机信号处理中的功率谱估计就是研究根据有限的观测数据估计功率谱的各种有效方法。工程上可以根据 $P_x(\omega)$ 判断信号的有无及其频域信息。

当 $x(n)$ 是实信号时， $r_x(m)$ 是实偶函数，故 $P_x(\omega)$ 也是实偶函数，即

$$P_x(-\omega) = P_x(\omega) \quad (5.5.9)$$

另外，与能量谱一样，功率谱 $P_x(\omega)$ 也是非负的，且不包含相位信息。

5.6 相关函数的应用

如前所述，相关运算的目的是衡量两个信号之间的相似程度，并提取相关的有用信息。相关函数的应用很广，在雷达、声呐、数字通信、地质和其他科学和工程领域，信号的相关性分析都有广泛的应用。例如噪声中信号的检测，信号中隐含周期性的检测，信号相关性的检测，信号延时时间的测量等。

5.6.1 相关函数在雷达和主动声呐系统中的应用

假设信号序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是我们需要比较的两路信号，在雷达和主动声呐系统中， $x(n)$ 一般是发射信号的采样，而 $y(n)$ 表示接收端 A/D 变换器输出的信号。如果目标是空间某个被雷达或声呐搜索的目标物体，则接收信号 $y(n)$ 由发射信号被目标反射，并经加性噪声污染后的延迟信号组成。雷达目标检测示意图如图 5.6.1 所示。

接收信号 $y(n)$ 可以表示为

$$y(n) = ax(n-D) + w(n) \quad (5.6.1)$$

其中， a 是衰减因子，表示发射信号 $x(n)$ 在发射和反射信道中的损失， D 是延迟量（假设 D 为采样间隔的整数倍）。 $w(n)$ 表示天线接收到的加性噪声以及接收机前端电子器件或放大器产生的噪声。如果在雷达或声呐搜索空间没有目标，则接收信号 $y(n)$ 仅含有噪声信号 $w(n)$ 。

通常称 $x(n)$ 为发射信号或参考信号，称 $y(n)$ 为接收信号或观测信号。雷达探测的目的是通过比较 $x(n)$ 和 $y(n)$ ，判断目标是否存在。如果存在，则通过求延

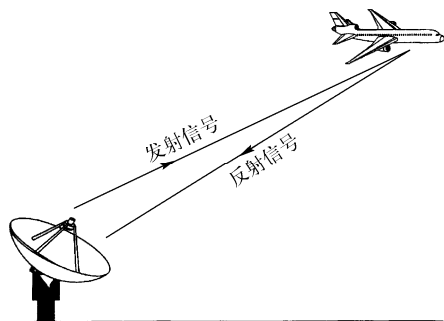


图 5.6.1 雷达目标检测示意图

迟 D 来确定目标的距离。工程实际中, 由于受加性噪声的严重污染, 已经不可能从 $y(n)$ 的波形判断目标是否存在, 正是相关函数提供了良好的检测方法。

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax(n-D) + w(n)]x(n-m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} ax(n-D)x(n-m) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)x(n-m) \\ &= ar_x(m-D) + r_{wx}(m) \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

由于信号 $x(n)$ 与噪声 $w(n)$ 相关性很小, 即 $r_{wx}(m)$ 非常小, 所以当目标不存在时, 无反射信号, $r_{yx}(m) = r_{wx}(m) \approx 0$; 当目标存在时, $r_{yx}(m) \approx ar_x(m-D)$, 当 $m=D$ 时, $r_{yx}(m)$ 取得最大值, $r_{yx}(m) = r_{yx}(D) \approx ar_x(0) = aE_x$ 。这时雷达检测到目标, 并根据 $r_{yx}(m)$ 取得最大值的 m 值换算出目标距离。

5.6.2 使用相关函数检测物理信号隐含的周期性

在实际应用中, 自相关函数可以用来检测被随机噪声污染的观测物理信号 $y(n)$ 隐含的周期性。

$$y(n) = x(n) + w(n) \quad (5.6.3)$$

其中, $x(n)$ 是一个未知周期 N 的周期信号, $w(n)$ 表示加性随机干扰噪声。假定观测到 $y(n)$ 的 M 个采样值, 观测区间为 $0 \leq n \leq M-1$, 且 $M \gg N$ 。实际计算时, 可以将 $y(n)$ 看做长度为 M 的因果序列, 并引入归一化因子 $1/M$, 则 $y(n)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} r_y(m) &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} y(n)y(n-m) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} [x(n) + w(n)][x(n-m) + w(n-m)] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n)x(n-m) + \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x(n)w(n-m) + \\ &\quad \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w(n)x(n-m) + \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w(n)w(n-m) \\ &= r_x(m) + r_{xw}(m) + r_{wx}(m) + r_w(m) \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

式 (5.6.4) 右边有四项, 第一项为 $x(n)$ 的自相关函数 $r_x(m)$, 由于 $x(n)$ 是周期序列, 所以 $r_x(m)$ 也是周期序列, 且周期与 $x(n)$ 相同。从而在 $m=0, N, 2N, \dots$ 时, $r_x(m)$ 会周期性地出现较大峰值。但随着 m 接近 M 值, 峰值会逐渐减小, 这是因为 $y(n)$ 是长度为 M 的有限长序列, 以至于当 m 接近 M 值时, 乘积序列 $x(n)x(n-m)$ 中大多数点为零。因此, 当 $m > M/2$ 时, 通常就不再计算了。

由于设计时, 一般使信号 $x(n)$ 与干扰噪声 $w(n)$ 完全不相干, 所以, 式 (5.6.4) 右边的 $r_{xw}(m)$ 和 $r_{wx}(m)$ 相对很小。式 (5.6.4) 右边第四项为干扰噪声的自相关函数 $r_w(m)$, 由于干扰噪声 $w(n)$ 一般近似白噪声, 所以, 只有在 $m=0$ 时出现峰值 $r_w(0)$, 但会迅速衰减到很小。所以, 当 $m > 0$ 时, 只有 $r_x(m)$ 周期性出现较大峰值, 根据这一特点, 我们就可以从干扰噪声中检测出 $y(n)$ 中是否存在周期信号 $x(n)$, 并确定其周期 N 。

例 5.6.1 设信号 $x(n) = \sin(\pi n/5)$, $0 \leq n \leq 199$, $x(n)$ 与加性噪声 $w(n)$ 混合在一起, $w(n)$ 是在 $[-A/2, A/2]$ 上均匀分布的白噪声序列, A 为分布参数。观测序列是

$y(n) = x(n) + w(n)$ 。求自相关函数 $r_y(m)$ ，并确定信号 $x(n)$ 的周期。

解：本例中，假设仅知道已被噪声污染的观测信号 $y(n)$ 的 200 个采样值，而且 $y(n)$ 中包含一周期信号 $x(n)$ ，但并不知道其周期是多少。现在要通过计算 $y(n)$ 的自相关函数确定 $x(n)$ 的周期。噪声 $w(n)$ 的功率 P_w 由分布参数 A 决定，由本书 8.6.1 节的式(8.6.4)可知， $P_w = A^2 / 12$ ，信号 $x(n)$ 的功率 $P_x = 1/2$ ，因此信噪比 (SNR) 为

$$\frac{P_x}{P_w} = \frac{1/2}{A^2 / 12} = \frac{6}{A^2}$$

通常，SNR 以对数表示： $\text{SNR} = 10 \lg(P_x / P_w)$ ，单位为 dB。当 $\text{SNR} = 10 \lg(P_x / P_w) = 1 \text{ dB}$ 时， $A = \sqrt{6/10^{0.1}}$ ；当 $\text{SNR} = 10 \lg(P_x / P_w) = 5 \text{ dB}$ 时， $A = \sqrt{6/10^{0.5}}$ 。

在 5.7 节中，将编写程序 `ep561.m`，并运行可产生 $\text{SNR}=1 \text{ dB}$ 时的噪声 $w(n)$ 、观测信号 $y(n) = x(n) + w(n)$ 和 $y(n)$ 的自相关函数 $r_y(m)$ 分别如图 5.4.2(a)、(b)和(c)所示。 $\text{SNR}=5 \text{ dB}$ 时的噪声 $w(n)$ 、观测信号 $y(n) = x(n) + w(n)$ 和 $y(n)$ 的自相关函数 $r_y(m)$ 分别如图 5.4.3(a)、(b)和(c)所示。

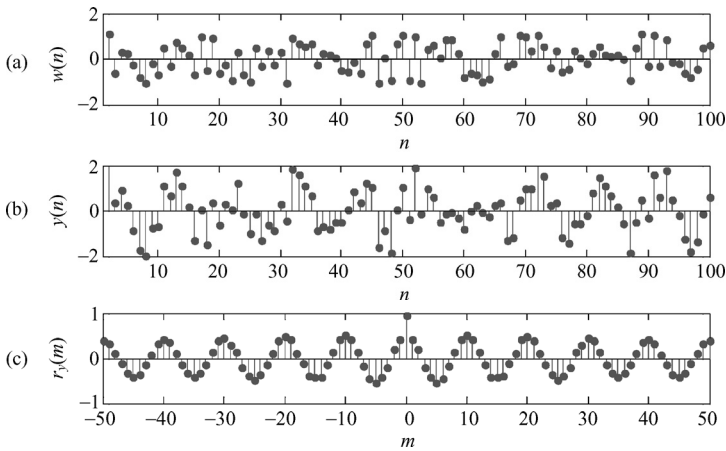


图 5.6.2 干扰噪声、周期信号和观测信号波形 (SNR=1dB)

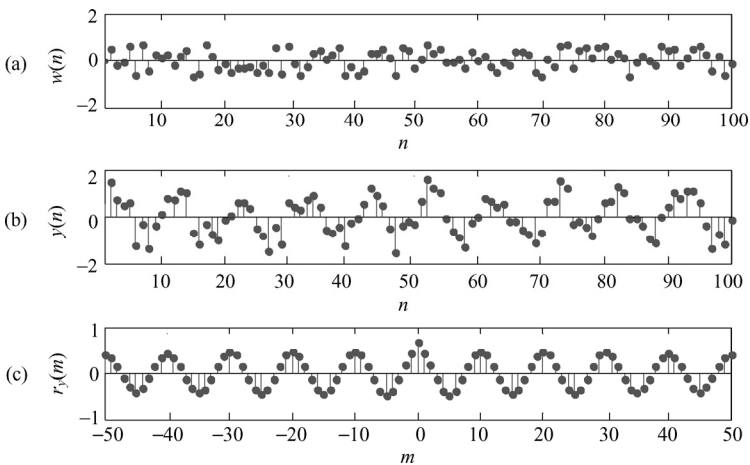


图 5.6.3 干扰噪声、周期信号和观测信号波形 (SNR=5dB)

从图 5.6.2(b)可看出, 由于干扰噪声影响, 很难从观测信号 $y(n)$ 确定 $x(n)$ 的周期。但从图 5.6.2(c)可看出, 除了 $m=0$ 处出现很大峰值以外, $r_y(m)$ 是以 10 为周期的, 这正是 $y(n)$ 中周期信号 $x(n)$ 的自相关函数导致的, 所以, 可以确定 $x(n)$ 的周期为 10。 $r_y(0)$ 的峰值是由白噪声 $w(n)$ 的自相关函数导致的。

从图 5.6.3(b)可看出, 即使噪声功率较小, 观测信噪比达到 5dB, 我们也很难直接从观测信号 $y(n)$ 确定 $x(n)$ 的周期。但观察 $y(n)$ 的自相关函数很容易确定 $x(n)$ 的周期。

另外, MATLAB 中的 rand 函数每次运行产生的随机信号可能不相同, 所以程序 ep561.m 每次运行时产生的 $w(n)$ 和 $y(n)$ 波形可能不相同。

5.7 用 MATLAB 计算相关函数

MATLAB 包含多个可以产生各种常用信号的工具箱函数, 例如 rand 和 randn 函数可以产生两种白噪声序列。此外, 还包含多个实现各种计算的函数, 例如与本章有关的 xcorr 函数可以计算相关函数。下面先介绍 rand 函数和 xcorr 函数, 最后编写程序求解例 5.6.1。

(1) rand

rand 函数用于产生均值为 0.5, 幅度在 [0,1] 上均匀分布伪随机序列, 在数字信号处理中常用于近似均匀分布的白噪声信号 $w(n)$ 。理想的白噪声信号 $w(n)$ 的功率谱是一个常数, 其自相关函数 $r_w(m) = \sigma^2 \delta(m)$, 即仅在 $m=0$ 时 $r_w(m)$ 有值, m 取其他值时皆为零。其中, σ^2 是 $w(n)$ 的方差, 即 $w(n)$ 的平均功率。

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [w(n) - m_a]^2 \quad (5.7.1)$$

式中 m_a 表示 $w(n)$ 的均值。rand 函数产生的 $w(n)$ 的功率 $\sigma^2 = 1/12$, $m_a = 0.5$ 。

rand 函数的调用格式如下:

`w=rand(N)` 产生 N 维列向量 w ;

`w=rand(M,N)` 产生 $M \times N$ 维矩阵 w 。

请读者注意, 另一个函数 randn 可产生均值为 0, 方差 (功率) 为 1, 服从高斯分布的白噪声, 其调用格式与 rand 函数相同。

(2) xcorr

xcorr 函数用于计算信号的互相关函数或自相关函数。xcorr 函数的两种调用格式如下:

① `rx=xcorr(x,y)`

计算序列 x 和 y 的互相关函数。如果 x 和 y 的长度都是 N , 则 r_{xy} 的长度为 $2N-1$; 如果 x 和 y 的长度不相等, 则将短的序列后面补零, 再按照长度相同方法计算。

② `rx=xcorr(x, M, 'flag')`

计算序列 x 自相关函数。 M 表示自相关函数 r_x 的单边长度, 总长度为 $2M+1$; flag 是定标标志, 若 flag=biased, 则表示有偏估计, 需将 $r_x(m)$ 都除以 N , 如式 (5.2.4); 若 flag=unbiased, 则表示无偏估计, 需将 $r_x(m)$ 都除以 $(N-abs(m))$ 。若 flag 缺省, 则 r_x 不定标。 M 和 flag 同样适用于求互相关。

求解例 5.6.1 的程序为 ep561.m, 程序运行结果如图 5.6.2 和图 5.6.3 所示。

%例 5.6.1 求解程序 ep561.m

```

clear
N=200;M=50;           %设置信号和噪声序列长度 N, y(n)自相关函数单边长度 M
A1=sqrt(6/10^0.1);    %SNR=1dB 时, 计算噪声分布参数 A
n=0:N-1;
w=A1*(rand(1,N)-0.5); %产生白噪声, 均值为零, 在[-A1/2,A1/2]上均匀分布
x=sin(pi*n/5);        %产生信号 x(n)的 200 个值
y=x+w;                %y(n)=x(n)+w(n)
ry=xcorr(y,M,'biased'); %计算 y(n)自相关函数的 2M+1 个值
m=-M:M;               %自相关函数的 2M+1 个值对应的自变量 m=-M,...,0,...M
figure(1)
subplot(3,1,1);stem(n,w,'.');axis([1,100,-2,2]);
xlabel('n');ylabel('w(n)');title('(a)')
subplot(3,1,2);stem(n,y,'.');axis([1,100,-2,2]);
xlabel('n');ylabel('y(n)');title('(b)')
subplot(3,1,3);stem(m,ry,'.');
xlabel('m');ylabel('ry(m)');title('(c)')
%=====
A2=sqrt(6/10^0.5);    %SNR=5dB 时, 计算噪声分布参数 A
w=A2*(rand(1,N)-0.5); %产生白噪声, 均值为零, 在[-A2/2,A2/2]上均匀分布
y=x+w;                %y(n)=x(n)+w(n)
ry=xcorr(y,M,'biased'); %计算 y(n)自相关函数的 2M+1 个值
m=-M:M;               %自相关函数的 2M+1 个值对应的自变量 m=-M,...,0,...M
figure(2)
subplot(3,1,1);stem(n,w,'.');axis([1,100,-2,2]);
xlabel('n');ylabel('w(n)');title('(a)')
subplot(3,1,2);stem(n,y,'.');axis([1,100,-2,2]);
xlabel('n');ylabel('y(n)');title('(b)')
subplot(3,1,3);stem(m,ry,'.');
xlabel('m');ylabel('ry(m)');title('(c)')

```

习题与上机题

5.1 已知序列 $x_1(n) = a^n u(n)$, $x_2(n) = u(n) - u(n - N)$, 分别求它们的自相关函数, 并证明二者都是偶对称的实序列。

5.2 设 $x(n) = e^{-nT}$, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, T 为采样间隔。求 $x(nT)$ 的自相关函数 $r_x(mT)$ 。

5.3 已知 $x(n) = A \sin(2\pi f_1 n T) + B \sin(2\pi f_2 n T)$, 其中 A, B, f_1, f_2 均为常数。求 $x(n)$ 的自相关函数 $r_x(m)$ 。

5.4* 设 $x(n) = A \sin(\omega n) + w(n)$, 其中 $\omega = \pi/6$, $w(n)$ 是均匀分布的白噪声。

(1) 调用 MATLAB 函数 `rand`, 产生均匀分布, 均值为 0, 功率 $P=0.1$ 的白噪声信号 $w(n)$, 画出 $w(n)$ 的时域波形, 并求 $w(n)$ 的自相关函数 $r_w(m)$, 画出 $r_w(m)$ 的波形。

(2) 欲使 $x(n)$ 的信噪比为 10dB, 试确定 A 的值, 编程产生 $x(n)$, 画出 $x(n)$ 的时域波形, 并求 $x(n)$ 的自相关函数 $r_x(m)$, 画出 $r_x(m)$ 的波形, 最后从 $r_x(m)$ 的波形确定 $x(n)$ 中正弦序列的周期 N 。

5.5* 雷达中延迟的估计。设 $x_a(t)$ 是雷达发射信号, $y_a(t)$ 是雷达接收信号, $y_a(t) = ax_a(t - t_d) + w_a(t)$, $w_a(t)$ 是加性随机噪声。在接收机端根据采样定理对 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 进行采样和数字化处理, 估算出延时 t_d , 最终换算出目标距离。采样得到的信号序列为

$$x(n) = x_a(nT)$$

$$y(n) = y_a(nT) = ax_a(nT - DT) + w_a(nT) \triangleq ax(n - D) + w_a(n)$$

(1) 简述通过求互相关函数 $r_{yx}(m)$ 估计延迟 D 的原理和方法。

(2) 假设 $x(n)$ 为 13 位巴克码序列:

$$x(n) = \{+1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, +1, -1, +1\}$$

$w(n)$ 是高斯随机序列, 均值 $m_a = 0$, 功率 $\sigma^2 = 0.01$ 。对于 $a=0.9$, $D=20$, 编写程序产生序列 $y(n)$, 要求 $y(n)$ 长度为 200, 并画出 $x(n)$ 和 $y(n)$ 波形。

(3) 计算并画出互相关函数 $r_{yx}(m)$, $0 \leq m \leq 59$, 并根据 $r_{yx}(m)$ 波形估计延迟 D 的值。

(4) 对于 $\sigma^2 = 0.1$ 和 $\sigma^2 = 1$, 重复 (2) 和 (3)。