第二章　导数

第一节　导数的定义与含义

一、导数的定义

定义 1　若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近的区间内有定义，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$. 若函数 $f(x)$ 在定义域内任一点均可导，则称 $f(x)$ 可导，$f(x)$ 在每一点的导数组成的函数称为 $f(x)$ 的导函数.

注意：导数的定义其实可以用一个式子表示，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

导函数可写成 $f'(x)$ 或 $y'(x)$，也可简写成 f' 或 y'，还可写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 等，函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数，还可记作 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，另外还有一些其他类似的写法大家可以以此类推.

导函数也简称为导数.

读者可根据上下文区分是一个点的导数还是一个函数的导数.

令 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$，则上述极限式子又可写成 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

导数含义十分深刻，下面通过例子来初步了解导数.

【例 1】　求函数 $y=c$ 在 $x=x_0$ 处的导数.

解：由定义知 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$，由于 x_0 可任意取值，因而可知常数函数的导数为 0，写成$(c)'=0$.

【例 2】　求函数 $y=x^n$ 在 $x=x_0$ 处的导数.

解：由定义知 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+xx_0{}^{n-2}+x_0{}^{n-1})}{x-x_0}=nx_0{}^{n-1},$$

同样由 x_0 的任意性可得到导数公式：

$$(x^n)'=nx^{n-1}\text{（这里 } n \text{ 为任意正整数）} \tag{1}$$

公式 1 的 n 可以推广为任意不为 0 实数，此时我们一般写成

$$(x^a)'=ax^{a-1}\text{（}a\text{ 为任意不为 0 的实数）} \tag{2}$$

这是导数里面最重要的一个公式，包含了很多常用的函数.

【例 3】 求函数 $y=x^2$ 的导数，并求导函数在 $x=1$ 处的值.

解：由公式（2）易得，$y'=(x^2)'=2x$， $x=1$ 时导数为 2.

同理可以得到下面的导数公式，由于这些公式经常要用到，大家不妨把这些都记牢，对以后的学习很有帮助.

$$(x)'=1;$$
$$(x^2)'=2x;$$
$$(x^3)'=3x^2;$$
$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

二、导数的基本含义

导数是高等数学中非常重要的概念，含义也很深刻，为了适应现代数学的抽象应用，此处先从导数的基本的含义入手了解导数的含义.

由于 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，其中，$\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$ 分别表示 x 和 y 在 $x=x_0$ 处的变化量，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示当 x 变化到 x_0 时 y 关于 x 的变化率，则当 $x\to x_0$ 时该极限变为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 y 关于 x 的变化率.

因而有导数的基本含义：

导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 表示函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 y 关于 x 的变化率.

【例 4】 求函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的导函数并求导函数在 $x=-1, 0, 1, 2$ 时的值.

解：
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h}$$
$$=\mathrm{e}^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$$

$$t = e^h - 1$$

$$= \mathrm{e}^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)}$$

$$= \mathrm{e}^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$= \mathrm{e}^x \cdot \frac{1}{\ln \ \mathrm{e}} = \mathrm{e}^x$$

可知，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$，$y = \mathrm{e}^x$ 的导函数即为其本身，当 $x = -1, 0, 1, 2$ 时，导数的值分别为 $\frac{1}{\mathrm{e}}, 1, \mathrm{e}, \mathrm{e}^2$.

从函数的图像看，指数函数 $y = \mathrm{e}^x$ 增加的幅度越来越大，当自变量 x 小于 0 时函数的变化幅度很小，而当自变量 x 大于 0 时，函数的变化幅度迅速增加，这与 $y = \mathrm{e}^x$ 的导数求出来的值的变化规律是一致的，这说明导数的基本含义就是 y 关于 x 的变化率.

上面的导数公式可以推广为：

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad（a \text{ 为常数}，a>0，a\neq 1）$$

【例 5】 求 $(\mathrm{e}^{-x})'$.

解：$(\mathrm{e}^{-x})' = \left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x\right]' = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x \ln\frac{1}{\mathrm{e}} = -\mathrm{e}^{-x}$.

【例 6】 求 $(\sin x)'$.

解：
$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

用同样方法可求得 $(\cos x)' = -\sin x$.

三、导数的物理学含义

物体的运动除了可以求平均速度外，还可以求瞬时速度，本小节从物体的平均速度与瞬时速度之间的关系入手给出瞬时速度的严格定义.

设做变速运动的物体的运动方程为

$$s = s(t).$$

下面讨论物体在 t_0 时刻的瞬时速度.

当时间由 t_0 变到 t，令 $t - t_0 = \Delta t$，物体的运动路程为

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0),$$

两端同除以 Δt，可得物体在 Δt 这段时间内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$\bar{v}$ 的极限即为物体在时刻 t_0 的速度，即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

又由导数的定义

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0),$$

因而有 $v(t_0) = s'(t_0)$，即瞬时速度是路程 s 关于时间 t 的导数，用导数的另一形式写为 $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，根据导数的基本含义，路程 s 关于时间 t 的导数为路程关于时间在某一时刻的变化率，即为此时的瞬时速度.

【例 7】 一人将一石头以初速度 v_0 向上抛出，不计空气阻力，得到在任一时刻 t 时石头的位移公式为 $s(t) = -v_0 t + \dfrac{1}{2}gt^2$，试求石头在任一时刻 t 的运动速度.（g 为重力加速度）

解：$v(t) = \left(-v_0 t + \dfrac{1}{2}gt^2\right)' = (-v_0 t)' + \left(\dfrac{1}{2}gt^2\right)' = -v_0 + gt$，

（此处提前用了一个公式）

结果正是物理学中抛体的速度公式（匀加速运动，加速度为 g）.

设 $v = v(t)$ 为物体在任一时刻的瞬时速度，利用上面的结果我们考虑 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 的含义.

根据导数的含义，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 表示速度 v 关于时间 t 的在某一时刻的变化率，即 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 表示速度在某时刻变化快慢的量，也就是物体在 t 时刻的加速度，记作 $a(t)$.

对于例 7，由于 $[v(t)] = (-v_0 + gt)' = g$，因而上面的运动就是有初速度的自由落体运动.

四、导数的几何意义

本小节考虑函数 $y = f(x)$ 的导数的几何意义.

如图 2.1.1 设 $y = f(x)$ 在图像上有两点 $A(x_0, y_0)$、$B(x, y)$，l_0 为 $y = f(x)$ 在 A 点的切线，则直线 AB 的斜率为 $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$，当 $x \to x_0$ 时，点 B 趋向于点 A，直线 AB 趋向于 l_0，因而有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}k_{AB}=\lim_{AB\to l_0}k_{AB}=k_{l_0}\text{ ,}$$

即 $f'(x_0)=k_{l_0}$，正是这点切线的斜率，这就是导数的几何意义.

导数的几何意义：导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的图像在 $x=x_0$ 处切线的斜率.

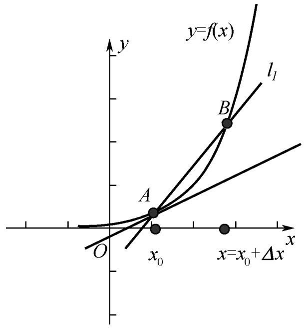

图 2.1.1

【例 8】 讨论函数 $y=x^2$ 在 $x=0,\ 1,\ -1,\ 10$ 处切线的斜率.

解：$y'=(x^2)'=2x$． $x=0,\ 1,\ -1,\ 10$ 处函数在切线的斜率为 $y'=0,\ 2,\ -2,\ 2,\ 0$．

事实上由于函数图像上切线的斜率反映的是函数 $y=f(x)$ 上 y 关于 x 在 x_0 处的变化率，这与导数的基本含义一致，因而导数的几何意义就表示切线的斜率.

【例 9】 求函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 时的切线方程.

解：$y'|_{x=0}(\sin x)'|_{x=0}=\cos x|_{x=0}=1$，又切线过原点，因而所求切线方程为 $y=x$.

五、边际与导数

设某产品的总成本 C 是产量 Q 的函数，即 $C=C(Q)$，当产量由 Q_0 变到 $Q_0+\Delta Q$ 时，产品总成本相应的改变量为 ΔC，即 $\Delta C=C(Q_0+\Delta Q)-C(Q_0)$，则产量由 Q_0 变到 $Q_0+\Delta Q$ 时平均成本为

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\frac{C(Q_0+\Delta Q)-C(Q_0)}{\Delta Q}\,.$$

当 $\Delta Q\to 0$ 时，如果极限 $\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{\Delta C}{\Delta Q}=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{C(Q_0+\Delta Q)-C(Q_0)}{\Delta Q}$ 存在，则称此极限是产量为 Q_0 时成本关于产量的变化率，又称为边际成本.

很多数同学对边际成本一开始很难理解，大家可以从以下两点进行理解：

（1）成本除了平均成本外，还有各个不同产品的成本，这就是我们说的边际成本；

（2）读者可以对照瞬时速度的概念，理解边际成本为“瞬时成本”.

从数学的角度看，边际成本就是总成本关于总产量在某个产量时的变化率，即成本 P 关于产量 Q 的导数 $C'(Q)$.

【例 10】 某产品生产 x 个单位产品时的总成本 C 是 x 的函数，且 $C(x)$=8 000+200$\sqrt{x}$，求生产 100 个单位产品时的边际成本.

解：由 $C(x)=8000+200\sqrt{x}$ 得边际成本为 $C'(x)=100/\sqrt{x}$，故生产 100 个单位产品的边际成本为 $C'(100)=10$.

习题 2-1

1．已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，求证 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

2．试用定义求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的导数.

3．求函数 $y=x^2$ 在 $x=-1$ 处的切线方程.

4．求函数 $y=x^3$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

5．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1, \\ ax+b, & x\leqslant 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，求 a，b 的值.

6．已知抛物线 $y^2=x$ 某切线的斜率为 1，求该切线方程.

7．已知抛体的位移（路程）方程为 $s(t)=v_0t+\dfrac{1}{2}gt^2$， $g=9.8\text{m/s}^2$ 为重力加速度，求抛体任意时刻的速度 $v(t)$ 和加速度 $a(t)$.

8．求下列函数的导数.

（1） $y=x^3$；（2） $y=x^{1/3}$；

（3） $y=x\sqrt{x}$；（4） $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$；

（5） $y=\dfrac{1}{x^2}$；（6） $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

9．（1）试证明函数 $y=|x-1|$ 在 $x=1$ 处不可导；

（2）试证明函数 $y=x^{2/3}$ 在 $x=0$ 处不可导；

（3）试就（1）、（2）两例总结可导与函数图形之间的关系.

10．已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}$.

11．已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{h}$.

第二节　导数的运算与公式

一、函数的四则运算求导法则

定理 1　如果函数 $u=u(x),\ v=v(x)$ 都在点 x 有导数，那么我们有

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（2）$[k\cdot v(x)]'=kv'(x)$；

（3）$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（4）$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

定理的证明，此处仅以公式（3）为例，证明如下.

证明：设 $y=u(x)\cdot v(x)$，取 x 的改变量为Δx($\Delta x\neq 0$)，则 u，v，y 相应的改变量为 Δu，Δv，Δy .

$$
\begin{aligned}
y'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\\
&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).
\end{aligned}
$$

【例 1】　已知函数 $y=kx+b$，求 y'.

解：$y'=(kx+b)'=k(x)'+(b)'=k$.

这一结论也可由导数的几何意义得出.

【例 2】　已知函数 $y=2^x3^x$，求 y'.

解：方法一：$y'=(2^x3^x)'=(6^x)'=6^x\ln 6$.

方法二：$y'=(2^x3^x)'=(2^x)'3^x+2^x(3^x)'$

$$
\begin{aligned}
&=2^x3^x\ln 2+2^x3^x\ln 3\\
&=2^x3^x(\ln 2+\ln 3)=6^x\ln 6 .
\end{aligned}
$$

【例 3】　已知函数 y=tan$x$，求 y'.

解：$y'=(\tan x)'\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}$.

二、导数公式

基本初等函数的导数公式是进行导数运算的基础，也是平时最常见的函数，前面已经给出了几个基本初等函数的导数公式. 下面以表格的形式给出基本初等函数导数公式，其余的不再给证明可自行推导.

（1）$(c)'=0$；

（2）$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$；

（3）$(a^x)'=a^x\ln a$；
$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

（4）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

（5）$(\sin x)'=\cos x$；

(6）$(\cos x)'=-\sin x$；

（7）$(\tan x)'=\sec^2 x$；

（8）$(\cot x)'=-\csc^2 x$；

（9）$(\sec x)'=\sec x\tan x$；

（10）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

（11）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（12）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（13）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；

（14）$(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

【例 4】 已知函数 $y=x+2x\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$，求 y'.

解：$y'=(x+2x^{3/2}+x^{-1/3})'=1+3x^{1/2}-\dfrac{1}{3}x^{-4/3}$

$$=1+3\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

【例 5】　已知函数 $y=x\ln x$，求 y'.

解：$y'=(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'$

$=\ln x+1$.

【例 6】　已知函数 $y=x^2\sin x\ln x$，求 y'.

解：$y'=(x^2\sin x\ln x)'=(x^2)'\sin x\ln x+x^2(\sin x\ln x)'$

$=2x\sin x\ln x+x^2[(\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)']$

$$=2x\sin x\ln x+x^2\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$=2x\sin x\ln x+x^2\cos x\ln x+x\sin x$.

【例 7】　已知函数 $y=(x^2+1)\arctan x+\sin 3+2^x+x^2$，求 y'.

解：$y'=(x^2+1)'\arctan x+(x^2+1)(\arctan x)'+(\sin 3)'+(2^x)'+(x^2)'$

$=2x\arctan x+1+2^x\ln 2+2x$.

【例 8】　已知函数 $y=\dfrac{x\ln x}{x+\ln x}$，求 y'.

解：$y'=\left(\dfrac{x\ln x}{x+\ln x}\right)'$

$$=\frac{(x\ln x)'(x+\ln x)-(x\ln x)(x+\ln x)'}{(x+\ln x)^2}$$

$$=\frac{(\ln x+1)(x+\ln x)-(x\ln x)(1+1/x)}{(x+\ln x)^2}$$

$$=\frac{\ln^2 x+x}{(x+\ln x)^2}.$$

三、复合函数求导法则

设函数 $y=f(u)$, $u=u(x)$，如果 $u(x)$ 在 x 处可导，$f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y=f[u(x)]$ 在 x 处可导，且有 $\{f[u(x)]\}'=f'(u)\cdot u'(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，该法则称复合函数求导法则.

公式可用文字描述：“复合函数”的导数=“外层函数”的导数×“内层函数”的导数.

该法则可推广到多个函数复合的情形中去.

例如：设 $y=f(u)$, $u=g(v)$, $v=\varphi(x)$，则三重复合函数 $y=f\{g[\varphi(x)]\}$ 对 x 的导数为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

复合函数求导法则也被称为链式法则.

【例 9】 已知函数 $y=\sin(\ln x)$，求 y'.

解：令 $y=\sin u,\ u=\ln x$，即 $y=f(u)=\sin u,\ u=u(x)=\ln x$，又 $\dfrac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}=\dfrac{\mathrm{d}\sin u}{\mathrm{d}u}=\cos u,\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}$，根据复合函数导数公式 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 知，

$$y'=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot\frac{1}{x}=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}.$$

上面的推导过程可以简单地写成

$$[\sin(\ln x)]=\cos u\cdot(\ln x)'=\cos u\cdot\frac{1}{x}=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}.$$

【例 10】 求函数 $y=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的导数.

解：$y=\arctan\dfrac{1}{x}$ 可看成由 $\arctan u$ 与 $u=\dfrac{1}{x}$ 复合而成，且 $(\arctan u)'=\dfrac{1}{1+u^2}$，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$，则

$$y'=\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}.$$

以后不再写出函数的复合关系，直接给出导数的求解过程.

【例 11】 已知函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，求 y'.

解：$y'=(\sqrt{1-x^2})'=\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

【例 12】 已知函数 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，求 y'.

解：$y'=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)'=-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

【例 13】 已知函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y'.

解：
$$\begin{aligned}y'&=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'\\&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right]\\&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

【例 14】　已知函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{1-\sin x}}$，求 y'.

解：$y'=(\mathrm{e}^{\sqrt{1-\sin x}})'=\mathrm{e}^{\sqrt{1-\sin x}}\cdot(\sqrt{1-\sin x})'=\mathrm{e}^{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\sin x)'}{\sqrt{1-\sin x}}$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}=-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\mathrm{e}^{\sqrt{1-\sin x}}.$$

习题 2-2

试求下列函数的导数

12．$y=\pi$.

13．$y=\sqrt{2}+\ln 2+\frac{1}{\ln a}$，其中 a 为常数.

14．$y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$.

15．$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

16．$y=(2^x+\mathrm{e}^x)^2$.

17．$y=a^x+x^a+\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\quad(a>0)$.

18．$y=\pi^2+\frac{\mathrm{e}}{x}+x^2\ln a\quad(a>0)$.

19．$r(\theta)=(2-\theta^2)\cos\theta+2\theta\sin\theta$.

20．$y=(1-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

21．$y=ax^2+bx+c$.

22．$y=x^2(2+\sqrt{x})$.

23．$f(v)=(v+1)^2(v-1)$.

24．$y=\sqrt{x}\cos x$.

25．$\rho(\varphi)=\sqrt{\varphi}\sin\varphi$.

26．$y=\frac{1}{-2+x+x^2}$.

27．$s=\frac{1-\sec t}{1+\sec t}$.

28．$y=(2+\sec t)\cot t$.

29． $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

29． $y=\dfrac{x^2\ln x}{1+x\ln x}$.

30． $y=\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$.

31． $y=\ln\sec x$.

32． $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

33． $y=\arcsin\sqrt{x}$.

34． $y=\tan^2 x$.

35． $y=\sec\ln x$.

36． $y=\cos kx$.

37． $y=f(kx+b)$，y 可导.

38． $y=\ln(-2x)$.

39． $y=\sqrt{x^2+1}$.

40． $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$.

41． $y=\sqrt{2x+1}$.

42． $y=\ln(\sec x+\tan x)$.

43． $y=\ln\tan 3x$.

44． $y=\sqrt{\ln^2 x+1}$.

45． $y=\operatorname{arc}\cot\dfrac{1-x}{1+x}$.

46． $y=\ln\ln\ln x$.

47． $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

48． $y=f(x^2)$，y 可导.

49． $y=f[f(x)]$，y 可导.

50． $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

51． $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

52． $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

53． $y=\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})$.

54． $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

55． $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^x\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$.

56． $y=\mathrm{e}^{-\tan^2\frac{1}{x}}$.

57． $y=\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+1)$.

58． $y=\sin^2 x\cdot\sin x^2$.

59． $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$.

60． $y=2\sqrt{x+2\sqrt{x}}$.

61． $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$，$y$ 可导.

62． $y=f(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)}$，$y$ 可导.

63． $y=\arcsin x+\arccos x$，证明该函数为常数函数.

64． $y=\arctan x+\mathrm{arc}\cot x$，证明该函数为常数函数.

65． $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

66． $y=\cos\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

第三节　隐函数的导数与高阶导数

一、隐函数求导

定义 1　由方程 $F(x,y)=0$ 确定的 y 关于 x 的函数称为隐函数. 平时用的函数形式 $y=y(x)$ 称为显函数.

【例 1】　椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 确定了一个 y 关于 x 的隐函数，但若将函数写成 $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ 或 $y=-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ 的形式，则为显函数.

【例 2】　已知方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，试求其导函数 y'.

解：首先将 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 写成 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2(x)}{b^2}=1$，这样函数的结构可以看得更清楚，对等式两边关于 x 求导得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y(x)y'(x)}{b^2}=0,$$

整理得
$$y'(x)=-\frac{b^2x}{a^2y(x)},$$

这就是我们所求的隐函数的导数.

为了简便，我们把上式写成 $y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

为了方便，书中一般都采用后一种形式，而不再采用带（x）的形式的写法，这可以大大提高数学的表达效率. 另外同学们可以思考下：我们是否要把 y'写成显函数的形式？

【例 3】 已知方程 $x^3+y^3+3xy=a^3$ 确定了一个 y 关于 x 的隐函数，求其导函数 y'，并求函数在点（a，0）处的切线方程.

解：对 $x^3+y^3+3xy=a^3$ 两边关于 x 求导得
$$3x^2+3y^2y'+3y+3xy'=0,$$

化简得
$$y'=-\frac{x^2+y}{y^2+x}.$$

在点 $(a,0)$ 处有 $y'|_{(a,0)}=-a$，在点 $(a,0)$ 处的切线方程为
$$y=-a(x-a).$$

【例 4】 设方程 $y+x-\mathrm{e}^{xy}=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求其导函数 y'.

解：对等式两边关于 x 求导得
$$y'+1-\mathrm{e}^{xy}(y+xy')=0,$$

化简得
$$y'=\frac{1-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}-1}.$$

二、对数求导法

【例 5】 已知函数 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)^2}}$，求其导函数 y'.

解：由于直接求导函数计算量非常大，因此此处采用一种新的方法.

对等式两边取自然对数得
$$\ln y=\ln\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)^2}},$$

整理得

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x+2)-\frac{2}{3}\ln(x+3),$$

对等式两边关于 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{3(x+2)}-\frac{2}{3(x+3)},$$

$$y'=\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{3(x+2)}-\frac{2}{3(x+3)}\right]y$$

$$=\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{3(x+2)}-\frac{2}{3(x+3)}\right]\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)^2}},$$

这种方法称为对数求导法.

形如 $y=[u(x)]^{v(x)}$ 的形式的函数称为幂指函数，利用对数求导法可以求这类函数的导数.

【例 6】 已知函数 $y=x^x$，求其导函数 y'.

解：对等式两边取自然对数得

$$\ln y=\ln x^x,$$

即

$$\ln y=x\ln x,$$

两边关于 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\ln x+1$$

$$y'=(\ln x+1)y \tag{1}$$

将 $y=x^x$ 代入（1）得

$$y'=(\ln x+1)x^x.$$

三、高阶导数

如果导函数 $f'(x)$ 是可导函数，那么可以对导函数接着求导数，即 $[f'(x)]'$，这个导函数的导数称为二阶导数，记作 $f''(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$. 二阶导数的导数称为三阶导数，记作，$f'''(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$，同理，如果 $y=f(x)$ 可以进行 n 次求导，则称其结果为 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

【例 7】 已知函数 $y=x\ln x$，求 y''.

解：$y'=\ln x+1$，

$y''=\dfrac{1}{x}$.

【例 8】 已知函数 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$，求 $f'''(x)$， $f^{(4)}(x)$.

解： $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$，

$f''(x) = 6x - 6$，

$f''(x) = 6$，

$f^{(4)}(x) = 0$.

通过上面例子，我们有结论：

$$(x^n)^{(n)} = n!,$$

另外，n 次多项式的 n+1 阶导数为零.

【例 9】 已知函数 $y = \sin x$，求 $y^{(n)}$.

解： $y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$，

因而

$$y'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right),$$

从而

$$y^{(n)} = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^{(n-1)} = \cdots = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

习题 2-3

试求 68～76 题所确定隐函数的导数.

67． $y^2 = 2px,\ p > 0$.

68． $x^2 + xy + y^2 = a^2$.

69． $xy = \mathrm{e}^{x+y}$.

70． $y^2 - 2xy + 4 = 0$.

71． $y = 1 - x\mathrm{e}^y$.

72． $\sqrt{x} + \sqrt{y} = R,\ R > 0$.

73． $2x^2 - 4xy^2 + y^4 = 0$.

74． $\pi\sin(x + y) = \mathrm{e}^y$.

75． $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

76． 试求 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 2$ 在点 $(3, -4)$ 的切线方程.

77． 设 $y = \sin(x + y)$，求 y''.

试求 79～85 题所列函数的导数.

78．$y = x^{\sin x}$.

79．$y = x^{1/x}$.

80．$y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

81．$y = 2x^{\sqrt{x}}$.

82．$y = \sqrt{\dfrac{3x-2}{(5-2x)(x-1)}}$.

83．$y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)}}$.

84．$y = \dfrac{x^2\sqrt{x+2}\mathrm{e}^x}{(3x+2)^4}$.

85．试用对数求导法推导函数 $y = x^a$ 与 $y = a^x$ 的导数公式.

86．$y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$，求 $y^{(n)}$.

87．$y = a^x$，求 $y^{(n)}$.

88．$y = \cos 2x$，求 $y^{(n)}$.

89．$y = \ln x$，求 $y^{(n)}$.

90．$y = x^3 \ln x$，求 $y^{(4)}$.

91．$y = \arcsin x$，求 y''.

92．$y = \mathrm{e}^{-x^2}$，求 y''.

93．$y = \sin^2 x$，求 y''.

94．$y = \dfrac{2x}{1+x^2}$，求 y''.

第四节　微分与近似计算

一、微分

对于某些函数，经常需要研究当自变量进行微小变化或在相对微小的范围内变动时，因变量的变化. 例如圆半径增加 1%时，圆周长增加多少，圆面积增加多少；人的身高增加 1cm 时，人的标准体重增加多少.

对于圆的面积，如图 2.4.1 所示，如果圆半径从 x 增加到 $x + \Delta x$，易见圆面积增加了一圈，大约为 $2\pi x \cdot \Delta x$，但事实上，圆面积增加的准确值为 $\pi(x + \Delta x)^2 - \pi x^2 =$

$2\pi x\cdot\Delta x+\pi\Delta x^2$，后面的$\pi\Delta x^2$经常忽略不计，这种简单的替代其实是数学里的一种常用方法，其中隐藏了微分的思想.

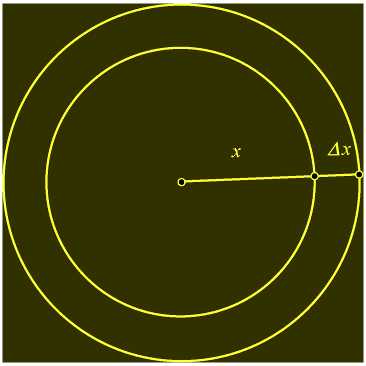

图 2.4.1

定义 1　设函数$y=f(x)$在包含x的一个区间内有定义，且在点x处可导，则称$f'(x)\Delta x$为$y=f(x)$的微分，记作$f'(x)\Delta x=\mathrm{d}f(x)$.

由上可知，微分是函数$y=f(x)$在点x附近由切线来代替$f(x)$，这样可以大大降低$f(x)$的复杂性，而且用直线来代替了曲线$f(x)$，在局部以直代曲是微分的基本思想，是数学思维的一次飞跃. 例如水平线通常都用直线代替，但事实上地球上的水平线应该是一个圆. 在地球上很小的一部分，用直线来代替圆显然是一个很好的近似，我们平时甚至感觉不出其中有什么差别.

定理 1　设函数$y=f(x)$在包含x的一个区间内有定义，且在点x处可导，则当Δx很小时，

$$\mathrm{d}f(x)\approx\Delta f(x)\text{，其中}\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)\text{，}$$

证明略.

【例 1】　求（1）$y=\sin x$；（2）$y=x^2$；（3）$y=\arctan\sqrt{x}$的微分.

解：（1）$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\sin x=(\sin x)'\Delta x=\cos x\Delta x$；

（2）$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x^2=2x\Delta x$；

（3）$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\arctan\sqrt{x}=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x=\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}\Delta x$.

【例 2】　求$f(x)=x$的微分.

解：$$\mathrm{d}x=1\Delta x=\Delta x\text{，}$$

即$$\mathrm{d}x=\Delta x\text{，}$$

因此，以后可以用$\mathrm{d}x$来代替Δx，而微分$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x$可以写成$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$. 为了方便以后都采用后一种写法.