

第 2 章 微波网络

2.1 网络的基本概念

1. 微波系统的研究方法

任何一个微波系统都是由各种微波元件和均匀的微波传输线连接而成。微波元件就是各种不同于均匀传输线的不均匀区域或不连续性区域组成的结构,其特性可以用“场”和“路”两种方法来描述。所谓“场”方法就是从麦克斯韦方程出发,解电磁场的边值问题,求出微波元件内部任一点的场,从而确定其对与之相连接的外电路产生的影响。但由于大多数微波元件的边界条件很复杂,不能以简单的数学形式表示,导致用“场”方法求解变得十分复杂,所以不便工程应用。所谓“路”的分析方法,就是用类似低频电路网络理论的方法,将微波元件等效为一个网络,用它的等效电路来描述其对外接电路的影响。此时与元件相连接的外接均匀传输线,用微波长线,即双线条来等效。这样复杂的微波系统就可以用由此而产生的微波网络理论来描述。尽管“路”的方法不能描述元件的内部特性,但由于网络参数是可以测量的,并且使得复杂的计算分析变得简便易行,因此微波网络理论成为分析微波系统的重要工具。

一般的微波元件都可以用“路”的方法分析,但也有些元件只适合用“场”方法分析,如波导谐振腔,因此具体问题要具体分析。本章主要讨论将微波元件等效为“路”问题的分析方法。

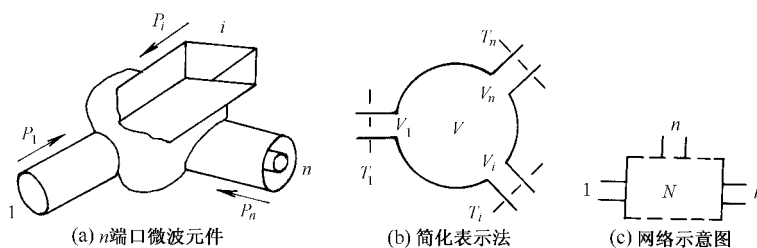


图 2-1 微波元件及其等效网络

2. 端口与参考面

每个微波元件可能和若干个微波传输线相连接,如图 2-1 所示。这些传输线既将元件与系统沟通,又为电磁波进出不均匀区提供接口通路,故称这些接口为端口。若各均匀传输线是单模工作,则微波元件的电气端口数与几何端口数相同,并且按端口数目的多少将微波元件分为单端口、双端口、……、 n 端口元件,相应的等效网络也分别称为单端口、双端口或 n 端口网络;若传输线内是多模传输,则电气端口数为各传输波形的总和。本章只研究单模传输的情况。

现在我们来讨论图 2-1(b)中某个端口(如 1 端口)接上波源后,入射波传输到不均匀区时发生的现象。由于传输线 1 与不均匀区 V 交界处的边界形状复杂,在不均匀区 V 的内部以及与其相邻的各输入传输线的区域 V_1, V_2, \dots, V_n 中所激起的电磁场也是很复杂的,但总可用相

应的主模波和高次模波的线性叠加来表示,因此在各传输线单模传输的情况下, V_1, V_2, \dots, V_n 等区域中就同时存在着一个传输波形和许多截止波形,截止波的场将随离开不均匀区的距离而按指数规律迅速衰减。于是在每根均匀传输线中,远离不均匀区处,一定有这样的一个位置,其上截止波的场已衰减到非常小,可以忽略不计,而只剩下传输波的场,该位置就选在该端口的参考面,并用 T_1, T_2, \dots, T_n 表示。即每个端口的参考面都选得离不均匀区较远,使得参考面上只有主模的入射波和反射波。这样参考面 T_1, T_2, \dots, T_n 就把一个复杂的微波元件分成两部分:一部分是各参考面所包围的不均匀或不连续性区域,另一部分是参考面外的均匀传输线。根据电磁场边值解的唯一性定理:在一个封闭区域内的边界上,切向电场(或磁场)如果是确定的,那么封闭区域内的电磁场也就被唯一地确定。由于不均匀区域的边界是理想导体和各端口的参考面,而参考面上的模式电压和电流是与横向电磁场 E_t, H_t 有关的,所以只要参考面上的模式电压 U_1, U_2, \dots, U_n 确定,则这些参考面上的电流 I_1, I_2, \dots, I_n 也就完全确定了,反之亦然。这样利用参考面上的电压与电流就可将不均匀区域等效为一网格,而均匀传输线则等效为微波双线。由于微波网络的参数是由参考面上的电压与电流确定的,所以参考面的选取始终是决定微波网络特性的关键因素之一,也是微波网络有别于低频网络的主要特征之一。

综上所述,为了把微波元件等效为微波网络,要解决如下三个问题:确定微波元件的参考面;由横向电磁场定义等效(即模式)电压、等效电流和等效(模式)阻抗,以便将均匀传输线等效为双线传输线;确定一组网络参数、建立网络方程,以便将不均匀区等效为网络。

3. 微波网络的分析与综合

微波网络理论包括网络分析和网络综合两部分内容。所谓网络分析就是对已知的微波元件或基本微波结构,应用网络或等效电路方法进行分析,求得其特性,然后用许多这样的基本结构组合起来,以实现所需的微波元件的设计。该方法所用的元件不是最少,设计也不是最佳。网络综合则是根据预定的工作特性要求(各项指标),运用最优化计算方法,求得物理上可实现的网络结构,并用微波电路实现之,从而得到所需设计的微波元件。该方法可得到最佳设计。随着计算机技术的广泛应用,网络综合所需的大量数学运算都可由计算机完成,因此网络综合已成为工程上设计微波元件的基本方法。

4. 微波网络的分类

微波元件种类繁多,可以从不同的角度对微波网络进行分类。若按网络特性进行分类,则可分成以下几种。

(1) 线性与非线性微波网络

若微波网络参考面上的模式(或称等效)电压和电流呈线性关系,网络方程便是一组线性方程,这种网络就称为线性微波网络,否则称为非线性微波网络。

(2) 互易与非互易(或可逆与非可逆)微波网络

填充有互易媒质的微波元件,其对应的网络称为互易微波网络,否则称为非互易微波网络。各向同性媒质就是互易媒质,微波铁氧体材料为非互易媒质。

(3) 有耗与无耗微波网络

根据微波无源元件内部有无损耗,将其等效的微波网络分为有耗与无耗微波网络两种。严格地说,任何微波元件均有损耗,但当损耗很小,以致损耗可以忽略而不影响该元件的特性时,就可以认为是无耗微波网络。

(4) 对称与非对称微波网络

如果微波元件的结构具有对称性,则称为对称微波网络,否则称为非对称微波网络。

2.2 微波元件等效为网络

2.2.1 微波传输线等效为双线

在电路理论中,电压和电流有明确的定义,并能直接测量。尽管长线理论中的基本参量也是电压和电流,但在微波波段,电压和电流的测量是很困难的,或者说是是不可能的。这是因为电压、电流的测量需要定义有效端对,这样的端对对于非 TEM 波传输线(如波导)不存在,对于 TEM 波传输线存在这样的有效端对,但在微波频率下也是难以测量的。因此,将传输线等效为双线,首先就是要解决将波导传输线等效为双线的问题。

1. 波导传输线等效为双线

在微波测量技术中,功率是能够测量的基本参量之一,因此可以通过功率关系确定波导传输线与双线之间的等效关系。

由第 1.2 节可知波导的 TM 波和 TE 波的横向场矢量可用横向分布函数的梯度和模式电压、电流表示,如式(1-37a)和式(1-41a)所示。若用二维矢量 $\mathbf{e}(u_1, u_2)$ 和 $\mathbf{h}(u_1, u_2)$ 表示横向分布函数的梯度,则无论 TM 波还是 TE 波的横向场矢量都可表示成下式

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t(u_1, u_2, z) &= \mathbf{e}(u_1, u_2)U(z) \\ \mathbf{H}_t(u_1, u_2, z) &= \mathbf{h}(u_1, u_2)I(z)\end{aligned}\quad (2-1)$$

对于 TM 波,模式矢量函数为

$$\mathbf{e}(u_1, u_2) = -\nabla_t \Phi(u_1, u_2), \quad \mathbf{h}(u_1, u_2) = \nabla_t \Phi(u_1, u_2) \times \mathbf{a}_z$$

对于 TE 波,模式矢量函数为

$$\mathbf{e}(u_1, u_2) = -\nabla_t \Psi(u_1, u_2) \times \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{h}(u_1, u_2) = -\nabla_t \Psi(u_1, u_2)$$

由复坡印亭定理可知,波导传输线上传输的功率为

$$P = \frac{1}{2} \iint_S \mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^* \cdot d\mathbf{S}$$

将式(2-1)代入此式可得

$$P = \frac{1}{2} U(z) I(z)^* \iint_S \mathbf{e} \times \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (2-2)$$

由长线理论可知,长线上传输的功率为

$$P = \frac{1}{2} UI^* \quad (2-3)$$

比较式(2-2)与式(2-3)可知,如果模式矢量函数满足下述归一化条件

$$\iint_S \mathbf{e} \times \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{a}_z dS = 1 \quad (2-4)$$

则波导传输的功率为

$$P = \frac{1}{2} U(z) I(z)^* \quad (2-5)$$

与式(2-3)相同。由此可见,只要双线上的电压、电流用波导的模式电压、电流代替,就可以将

波导传输线等效为双线,因为两者传输的功率是一样的。此时由广义传输线方程的行波解式(1-39d)和式(1-43d)及长线特性阻抗的定义,可得等效双线的特性阻抗 Z_0 为

$$Z_0 = \frac{U(z)}{I(z)} = \begin{cases} Z_{\text{TM}} & (\text{TM 波}) \\ Z_{\text{TE}} & (\text{TE 波}) \end{cases} \quad (2-6)$$

即为该模式的波阻抗。

2. 归一化电压与电流

波导的模式电压、电流和模式矢量函数是不唯一的。这是因为若令 k 为任意实数,并取一组新的模式电压、电流和模式矢量函数为

$$U(z)' = kU(z), \quad I(z)' = \frac{1}{k}I(z)$$

$$\mathbf{e}(u_1, u_2)' = \frac{1}{k}\mathbf{e}(u_1, u_2), \quad \mathbf{h}(u_1, u_2)' = k\mathbf{h}(u_1, u_2)$$

代入式(2-1)、式(2-2)、式(2-4),就可知 $U(z)'$ 、 $I(z)'$ 、 $\mathbf{e}(u_1, u_2)'$ 、 $\mathbf{h}(u_1, u_2)'$ 同样满足 $U(z)$ 、 $I(z)$ 、 \mathbf{e} 、 \mathbf{h} 所满足的归一化条件和功率关系,即

$$\mathbf{E}_1(u_1, u_2, z)' = \mathbf{e}(u_1, u_2)'U(z)' = \frac{1}{k}\mathbf{e}(u_1, u_2)kU(z) = \mathbf{e}(u_1, u_2)U(z) = \mathbf{E}_1(u_1, u_2, z)$$

$$\mathbf{H}_1(u_1, u_2, z)' = \mathbf{h}'(u_1, u_2)I(z)' = k\mathbf{h}(u_1, u_2)\frac{1}{k}I(z) = \mathbf{h}(u_1, u_2)I(z) = \mathbf{H}_1(u_1, u_2, z)$$

$$\iint_S \mathbf{e}' \times \mathbf{h}^{*'} \cdot \mathbf{a}_z dS = \iint_S \frac{1}{k}\mathbf{e} \times k\mathbf{h}^* \cdot \mathbf{a}_z dS = \iint_S \mathbf{e} \times \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{a}_z dS = 1$$

$$P' = \frac{1}{2}U(z)'I(z)^{*'} = \frac{1}{2}kU(z)\frac{1}{k}I(z)^* = \frac{1}{2}U(z)I(z)^* = P$$

但新的模式电压、电流定义的等效双线的特性阻抗 Z_0' 为

$$Z_0' = \frac{U(z)'}{I(z)'} = k^2 \frac{U(z)}{I(z)} = k^2 Z_0$$

显然由于模式电压、电流的不唯一,导致了等效特性阻抗和等效阻抗也不唯一。在微波测量中,反射系数 $\Gamma(z)$ 是可通过测量唯一确定的量,因此,由归一化等效阻抗与反射系数的关系

$$\bar{Z}(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad (2-7)$$

可知,归一化等效阻抗也是可唯一确定的。这样,为了消除模式电压、电流的不唯一所带来的这种不确定性,引入归一化电压 \tilde{U} 和归一化电流 \tilde{I} 两个量,并且要求用归一化电压、归一化电流定义的归一化阻抗和功率应与式(2-7)和式(2-5)相同,即

$$\bar{Z}(z) = \frac{\tilde{U}(z)}{\tilde{I}(z)} = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{U(z)}{I(z)} \frac{1}{Z_0}$$

$$P = \frac{1}{2}\tilde{U}(z)\tilde{I}(z)^* = \frac{1}{2}U(z)I(z)^*$$

由此可得

$$\tilde{U}(z) = U(z) / \sqrt{Z_0} \quad \tilde{I}(z) = I(z) \sqrt{Z_0} \quad (2-8)$$

由于归一化阻抗 \bar{Z} 是确定的,所以归一化模式电压、电流也是确定量。这样将波导等效为双线时,双线上的归一化电压、电流可用归一化的模式电压、电流代替,波导的负载等效为双线的

负载时,一般用式(2-6)的模式阻抗作为波导的特性阻抗归一化,或者另外定义波导的等效特性阻抗作为参考阻抗。

由于传输线上的电压、电流都是入射波与反射波的叠加,即

$$U(z) = U_i(z) + U_r(z)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}[U_i(z) - U_r(z)]$$

若传输线的特性阻抗为 Z_0 , 则任一点的归一化电压、电流为

$$\tilde{U}(z) = \tilde{U}_i(z) + \tilde{U}_r(z) = a + b$$

$$\tilde{I}(z) = \tilde{U}_i(z) - \tilde{U}_r(z) = a - b$$
(2-9)

即传输线上任意一点的归一化电压、电流仅由该点的归一化入射波电压(用 a 表示)和归一化反射波电压(用 b 表示)确定。

由长线理论中功率的计算公式,将式(2-9)代入可得

$$P_L = P_i - P_r$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|U_i|^2}{Z_0} - \frac{1}{2} \frac{|U_r|^2}{Z_0} = \frac{1}{2} |\tilde{U}_i|^2 - \frac{1}{2} |\tilde{U}_r|^2 = \frac{1}{2} |a|^2 - \frac{1}{2} |b|^2$$
(2-10)

即

$$P_i = \frac{1}{2} |\tilde{U}_i|^2 = \frac{1}{2} |a|^2, \quad P_r = \frac{1}{2} |\tilde{U}_r|^2 = \frac{1}{2} |b|^2$$

这说明归一化电压、电流是有量纲的,但与电压、电流的量纲不同,为 $(W)^{\frac{1}{2}}$ 。

3. 对波导 H_{10} 波的等效

当波导传输主模 TE_{10} 波时,由于 TE_{10} 波的波阻抗与波导尺寸 b 无关,若将 a 相同而 b 不相同的两段矩形波导相连接,虽然它们的波阻抗相等,但由于连接处存在不连续性,会对入射波产生反射,因此用波阻抗讨论不同尺寸波导的匹配连接问题时,将不能给出符合实际情况的完整描述。为此对传输 TE_{10} 波的矩形波导,对其的电路分析和常用的 TEM 波同轴线、带状线、微带线一样,在电压、电流、阻抗的定义上沿用低频电路的理论,而不完全采用广义传输线的结果。

在低频电路中,任意两点 A 、 B 之间的电压 U , 定义为该两点电场强度的线积分,即

$$U = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
(2-11a)

对 TEM 波传输线,积分是从正导体到负导体的任意路径,并且积分结果是唯一的,与路径及形状无关。对 TE_{10} 波,将 E_y 代入上式可得等效电压

$$U = - \int_A^B E_y dy = - E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \int_A^B dy e^{-j\beta z}$$

显然积分与路径有关。习惯上将积分路径选在波导宽壁中央从上底到下底的特定路径上,如图 2-2 所示,因此该电压值为

$$U = b E_0 e^{-j\beta z}$$
(2-11b)

在低频电路中,流过正导体的总电流可由安培定律计算,即

$$I = \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$
(2-11c)

式中, l 为包围正导体的任意闭合路径。对 TEM 波传输线, l 一般选在所研究的横截面上,并套着中心导体。对 TE_{10} 波波导,常把

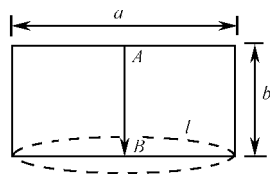


图 2-2 矩形波导电压和电流的积分路径

积分路径选在沿波导任一宽边侧壁的闭合路径上,如图 2-2 所示。将 H_x 代入上式可得等效电流 I 为

$$I = \frac{E_0}{Z_{TE_{10}}} \int_0^a \sin \frac{\pi}{a} x dx = \frac{E_0}{Z_{TE_{10}}} \frac{2a}{\pi} e^{-i\beta z} \quad (2-11d)$$

根据电路理论,由等效电压、电流和功率可得等效特性阻抗 Z_0 的三种定义方法

$$Z_0 = \frac{U}{I}, \quad Z_0 = \frac{U^2}{2P}, \quad Z_0 = \frac{2P}{I^2}$$

将 $P = \frac{ab}{4} \frac{E_0^2}{Z_{H_{10}}}$ 及 U, I 值代入上述各式可得

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{\pi}{2} \frac{b}{a} Z_{TE_{10}}, \quad Z_0 = \frac{U^2}{2P} = 2 \frac{b}{a} Z_{TE_{10}}, \quad Z_0 = \frac{2P}{I^2} = \frac{\pi^2}{8} \frac{b}{a} Z_{TE_{10}} \quad (2-12a)$$

三种定义方法得到的等效特性阻抗各不相同,主要是由于波导传输线的等效电压,电流不唯一,与积分路径有关导致的。好在它们的基本部分相同,只差一个常数因子,而在讨论阻抗匹配问题时多采用归一化阻抗,因此可将常数因子选作 1。这样 TE_{10} 波导等效为双线时的等效特性阻抗为

$$Z_0 = \frac{b}{a} Z_{TE_{10}} \quad (2-12b)$$

需要指出,这样等效 TE_{10} 波并不是最完全、最好的,也不可能解决所有问题。

2.2.2 不均匀区域等效为网络

1. 不均匀区域等效为网络

对于图 2-1 所示的不均匀区,由场的唯一性定理可知,对于特定的参考面 T_1, T_2, \dots, T_n 可将其等效为一 n 端口微波网络。网络的参数可由参考面上的切向场,即等效模式电压、电流确立。

若不连续性区域填充线性媒质,即媒质特性参量 μ, ϵ 及 σ 均与场强无关,则麦克斯韦方程组是一线性方程组,参考面上的各场量之间呈线性关系,与之对应的电路量,电压、电流之间也呈线性关系,因此等效网络是一线性网络。对线性网络可以用叠加原理。根据叠加原理,各端口参考面上同时有电流(方向为流入各参考面)作用时,任一参考面上的电压为各参考面上的电流单独作用时响应电压的叠加,即

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + \dots + Z_{1n} I_n \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + \dots + Z_{2n} I_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ U_n &= Z_{n1} I_1 + Z_{n2} I_2 + \dots + Z_{nm} I_n \end{aligned} \quad (2-13a)$$

用矩阵表示有

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (2-13b)$$

也可简写成

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{I} \quad (2-13c)$$

式中, Z_{ij} 具有阻抗量纲,称其为网络的阻抗参量,并且

即

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1}, \quad Y_1 = \frac{I_1}{U_1}$$

将式(2-16)代入可得

$$Z_1 = \frac{\frac{1}{2}U_1 I_1^*}{\frac{1}{2}|I_1|^2} = \frac{P_L}{\frac{1}{2}|I_1|^2} + j \frac{2\omega(W_m - W_e)}{\frac{1}{2}|I_1|^2} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

$$Y_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}U_1 I_1^*\right)^*}{\frac{1}{2}|U_1|^2} = \frac{P_L}{\frac{1}{2}|U_1|^2} - j \frac{2\omega(W_m - W_e)}{\frac{1}{2}|U_1|^2} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB$$

(2-17)

这说明单端口网络的阻抗参量和导纳参量就是网络参考面上的输入阻抗和输入导纳,并且它们都是频率的函数。因此由式(2-17)可得如下结论:

① 如果网络有耗, $P_L > 0$, 则有 $R > 0, G > 0$;

② 如果网络无耗, $P_L = 0$, 则有 $R = G = 0$, 阻抗参量和导纳参量为纯虚数, 并且有 $X(-\omega) = -X(\omega), B(-\omega) = -B(\omega)$, 即电抗、电纳均是频率的奇函数;

③ 如果网络内总储存的平均磁能等于平均电能, 即 $W_m = W_e$, 则 $X = B = 0$, 此时网络内部发生谐振;

④ 如果网络内储存的平均磁能大于平均电能, 即 $W_m > W_e$, 则 $X > 0$, 网络参考面上的等效阻抗呈感性; 反之若 $W_m < W_e$, 则 $X < 0$, 网络参考面上的等效阻抗呈容性。

这些结论不难推广到多端口网络, 但多端口网络不仅具有上述单端口网络的特性, 而且还有自身的特点。完整描述多端口网络的特性, 必须用网络的全部阻抗参量或导纳参量。多端口网络具有如下特性。

① 对无耗网络, 由式(2-17)可知网络的全部阻抗参量或导纳参量为纯虚数, 即

$$Z_{ij} = jX_{ij} \quad Y_{ij} = jB_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2-18a)$$

② 若参考面所包围的区域内填充均匀各向同性媒质, 则等效为互易(或可逆)网络。互易网络满足互易定理, 其阻抗和导纳参量具有下述特性

$$Z_{ij} = Z_{ji} \quad Y_{ij} = Y_{ji} \quad (i \neq j \text{ 且 } i, j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2-18b)$$

③ 若 n 端口微波网络在结构上具有对称面(或轴)时, 则称其为面(或轴)对称微波网络。如从 i 端口和 j 端口向网络看去的情况完全一样时, 则称 i 端口关于 j 端口为对称。表现在网络参数上, 则要求

$$\begin{aligned} Z_{ii} &= Z_{jj} & Z_{ij} &= Z_{ji} \\ Y_{ii} &= Y_{jj} & Y_{ij} &= Y_{ji} \end{aligned} \quad (2-18c)$$

即对称网络首先必须是互易网络。

在以后讨论微波网络的特性时, 将直接引用上述结论, 而不再加以说明。

3. Z 与 Y 的关系

由于 Z 与 Y 都是用来描述同一网络特性的, 故两者之间的关系为

$$\mathbf{I} = \mathbf{YU} = \mathbf{YZI}$$

即

$$\mathbf{YZ} = \mathbf{1} \quad (2-19a)$$

或

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \quad (2-19b)$$

2.3 双端口微波网络的 Z 、 Y 、 A 参数及其归一化参数

在各种微波网络中,图 2-4 所示的双端口微波网络是最基本的。在选定的网络参考面上,定义出每个端口的电压和电流后,由于线性网络的电压和电流之间是线性关系,故选定不同的自变量和因变量,可以得到不同的线性组合。类似于低频双端口网络理论,这些不同变量的线性组合可以用不同的网络参数来表征,主要有阻抗参数、导纳参数和转移参数等,下面分别讨论这几组参数。

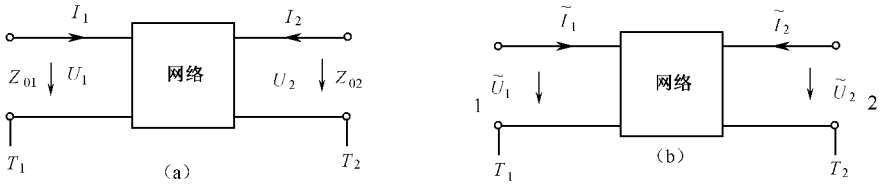


图 2-4 双端口微波网络

2.3.1 阻抗参数与导纳参数

由前述式(2-13)及式(2-14),令 $n=2$ 可得双端口网络的电压与电流的关系为

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 & I_1 &= Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 & I_2 &= Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 \end{aligned} \quad (2-20a)$$

写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2-20b)$$

由式(2-20a)可知 Z 参数与 Y 参数的定义及物理意义。即

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \text{ 为 } T_2 \text{ 面(端口 2)开路时, } T_1 \text{ 面(端口 1)的输入阻抗;}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \text{ 为 } T_1 \text{ 面(端口 1)开路时, } T_2 \text{ 面(端口 2)的输入阻抗;}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \text{ 为 } T_1 \text{ 面开路时,端口 2 至端口 1 的互阻抗;}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \text{ 为 } T_2 \text{ 面开路时,端口 1 至端口 2 的互阻抗;}$$

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} \text{ 为 } T_2 \text{ 面短路时, } T_1 \text{ 面(端口 1)的输入导纳;}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} \text{ 为 } T_1 \text{ 面短路时, } T_2 \text{ 面(端口 2)的输入导纳;}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} \text{ 为 } T_1 \text{ 面短路时,端口 2 至端口 1 的互导纳;}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} \text{ 为 } T_2 \text{ 面短路时,端口 1 至端口 2 的互导纳。}$$

若 T_1 和 T_2 参考面外接传输线的特性阻抗分别为 Z_{01} 和 Z_{02} ,则以 Z_{01} 作为参考阻抗对 U_1 和 I_1 归一化、以 Z_{02} 作为参考阻抗对 U_2 和 I_2 归一化,由此得到归一化的双端口微波网络,如

图 2-4(b)所示。归一化的阻抗和导纳矩阵用 $\bar{\mathbf{Z}}$ 和 $\bar{\mathbf{Y}}$ 表示,即

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{I}}, \quad \tilde{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{U}}$$

在此归一化网络中

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{01} &= Z_{01}/Z_{01} = 1 & \bar{Z}_{02} &= Z_{02}/Z_{02} = 1 \\ \tilde{U}_1 &= U_1/\sqrt{Z_{01}}, & \tilde{I}_1 &= \sqrt{Z_{01}}I_1 \\ \tilde{U}_2 &= U_2/\sqrt{Z_{02}}, & \tilde{I}_2 &= \sqrt{Z_{02}}I_2 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{Z_{01}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{Z_{02}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\mathbf{Z}_0}^{-1} \mathbf{U} \\ \tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{Z_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{02}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\mathbf{Z}_0} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2-22)$$

由此可得 $\bar{\mathbf{Z}}$ 与 \mathbf{Z} , 以及 $\bar{\mathbf{Y}}$ 与 \mathbf{Y} 的关系为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= \sqrt{\mathbf{Z}_0}^{-1} \mathbf{Z} \sqrt{\mathbf{Z}_0}^{-1} \tilde{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{I}} \\ \tilde{\mathbf{I}} &= \sqrt{\mathbf{Y}_0}^{-1} \mathbf{Y} \sqrt{\mathbf{Y}_0}^{-1} \tilde{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (2-23a)$$

故有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_{01}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{Z_{02}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_{01}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{Z_{02}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{01}} & \frac{Z_{12}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \\ \frac{Z_{21}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} & \frac{Z_{22}}{Z_{02}} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{Y}} &= \begin{bmatrix} Y_{11}/Y_{01} & Y_{12}/\sqrt{Y_{01}Y_{02}} \\ Y_{21}/\sqrt{Y_{01}Y_{02}} & Y_{22}/Y_{02} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-23b)$$

并且 \mathbf{Y} 与 \mathbf{Z} 互为逆矩阵, 式中 $Y_{01}=1/Z_{01}, Y_{02}=1/Z_{02}$ 。

根据上节所述的网络特性可知, 对于双端口网络有:

- (1) 若网络无耗, 则 Z_{ij}, Y_{ij} 或 $\bar{Z}_{ij}, \bar{Y}_{ij} (i, j=1, 2)$ 为纯虚数;
- (2) 若网络互易, 则 $Z_{12}=Z_{21}, Y_{12}=Y_{21}$ 或 $\bar{Z}_{12}=\bar{Z}_{21}, \bar{Y}_{12}=\bar{Y}_{21}$;
- (3) 若网络对称, 则有 $Z_{11}=Z_{22}, Z_{12}=Z_{21}$ 及 $Y_{11}=Y_{22}, Y_{12}=Y_{21}$ 或 $\bar{Z}_{11}=\bar{Z}_{22}, \bar{Z}_{12}=\bar{Z}_{21}$ 及

$$\bar{Y}_{11}=\bar{Y}_{22}, \bar{Y}_{12}=\bar{Y}_{21}。$$

【例 2-1】 试求图 2-5 所示电路的阻抗参数矩阵。

解: 根据 Z 参数的定义可得

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), & Z_{22} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = -j\frac{1}{\omega C} \\ Z_{12} &= \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = -j\frac{1}{\omega C}, & Z_{21} &= \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = -j\frac{1}{\omega C} \end{aligned}$$

所以有
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & -j\frac{1}{\omega C} \\ -j\frac{1}{\omega C} & -j\frac{1}{\omega C} \end{bmatrix}$$

由网络的性质可知该网络是无耗互易的。

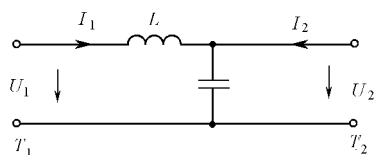


图 2-5 T 形网络电路

2.3.2 转移参数 A

1. A 参数的定义

在图 2-6 的双端口网络中, U_1 、 I_1 是输入量, U_2 、 I_2 是输出量, 并且 I_2 的正方向为流出端口 2, 与图 2-4 中 I_2 的流向相反。这样把网络的输出量作为自变量, 输入量作为因变量, 就可得到一组线性方程, 称作转移参数或 A 参数方程, 即

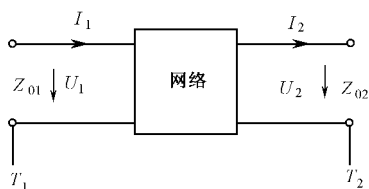


图 2-6 双端口网络

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2 \quad (2-24a)$$

$$I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2-24b)$$

式中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, 称为 **A** 矩阵。

由式(2-24a)可得 **A** 参数的定义及物理意义为:

$A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0}$ 为端口 2 开路时的电压转移系数; $A_{22} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0}$ 为端口 2 短路时的电流转移系数; $A_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0}$ 为端口 2 短路时的转移阻抗; $A_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0}$ 为端口 2 开路时的转移导纳。

2. 归一化转移参数

若把图 2-6 的双端口网络归一化, 即令

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{01} &= Z_{01}/Z_{01} = 1 & \tilde{U}_1 &= U_1/\sqrt{Z_{01}} & \tilde{I}_1 &= I_1\sqrt{Z_{01}} \\ \bar{Z}_{02} &= Z_{02}/Z_{02} = 1 & \tilde{U}_2 &= U_2/\sqrt{Z_{02}} & \tilde{I}_2 &= I_2\sqrt{Z_{02}} \end{aligned} \quad (2-25)$$

则有

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{I}_1 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \tilde{U}_2 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

称为归一化的转移参数矩阵。

由式(2-25)和式(2-24a)可得

$$\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{Z_{01}}\tilde{U}_1 = A_{11}\sqrt{Z_{02}}\tilde{U}_2 + \frac{A_{12}}{\sqrt{Z_{02}}}\tilde{I}_2 \\ I_1 &= \frac{1}{\sqrt{Z_{01}}}\tilde{I}_1 = A_{21}\sqrt{Z_{02}}\tilde{U}_2 + \frac{A_{22}}{\sqrt{Z_{02}}}\tilde{I}_2 \end{aligned}$$

即

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} & A_{12} / \sqrt{Z_{01} Z_{02}} \\ A_{21} \sqrt{Z_{01} Z_{02}} & A_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_2 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2-27a)$$

由此可得归一 $\bar{\mathbf{A}}$ 参数与非归一 \mathbf{A} 参数的关系是

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} & \frac{A_{12}}{\sqrt{Z_{01} Z_{02}}} \\ A_{21} \sqrt{Z_{01} Z_{02}} & A_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \end{bmatrix} \quad (2-27b)$$

3. \mathbf{A} 参数的性质

\mathbf{A} 参数的性质可以从阻抗参数或导纳参数的性质导出,为此由式(2-24a)找到 \mathbf{Z} 参数与 \mathbf{A} 参数的关系为

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{A_{11}}{A_{21}} I_1 + \frac{\det \mathbf{A}}{A_{21}} (-I_2) = Z_{11} I_1 + Z_{12} (-I_2) \\ U_2 &= \frac{1}{A_{21}} I_1 + \frac{A_{22}}{A_{21}} (-I_2) = Z_{21} I_1 + Z_{22} (-I_2) \end{aligned}$$

故有:

(1) 无耗网络

由 Z_{ij} 为纯虚数可知, A_{12} 、 A_{21} 应为虚数, A_{11} 、 A_{22} 应为实数, 或 a_{12} 、 a_{21} 为虚数, a_{11} 、 a_{22} 为实数。

(2) 互易网络

由 $Z_{12} = Z_{21}$ 可知, $\det \mathbf{A} = 1$; 或 $\det \bar{\mathbf{A}} = 1$ 。

(3) 对称网络

由 $Z_{11} = Z_{22}$, $Z_{12} = Z_{21}$ 可知, $A_{11} = A_{22}$, $\det \mathbf{A} = 1$; 或 $a_{11} = a_{22}$, $\det \bar{\mathbf{A}} = 1$ ($Z_{01} = Z_{02}$)。

4. \mathbf{A} 参数的应用

(1) 级联系统

对于 n 个双端口网络相级联的系统,应用 \mathbf{A} 或 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩阵计算最方便。在图 2-7 的级联系统中,输入量 U_1 、 I_1 与输出量 U_{n+1} 、 I_{n+1} 的关系为

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} U_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = \cdots = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\text{总}} \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{A}_{\text{总}} = \prod_{i=1}^n \mathbf{A}_i \quad (2-28a)$$

也就是说双端口网络级联后总的 \mathbf{A} 矩阵为各个网络的 \mathbf{A} 矩阵之积。

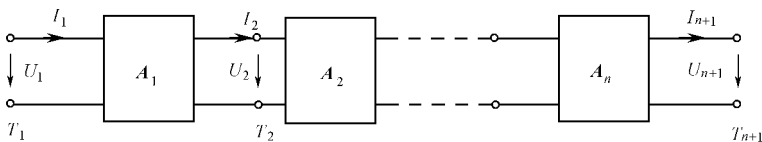


图 2-7 级联系统

对于归一化后的级联双端口网络,同样有

$$\bar{\mathbf{A}}_{\text{总}} = \prod_{i=1}^n \bar{\mathbf{A}}_i \quad (2-28b)$$

(2) 求输入阻抗

用 \mathbf{A} 参数求网络的输入阻抗是很方便的。在图 2-6 中,网络的 \mathbf{A} 参数方程是

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2$$

$$I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2$$

在输出端口有 $U_2/I_2 = Z_L$, 故可得

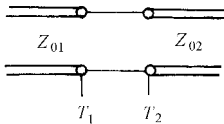
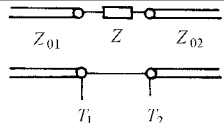
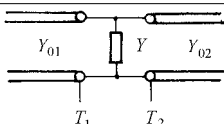
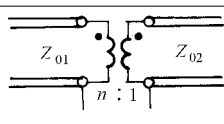
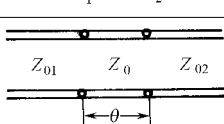
$$Z_{\text{in}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}U_2 + A_{12}I_2}{A_{21}U_2 + A_{22}I_2} = \frac{A_{11}Z_L + A_{12}}{A_{21}Z_L + A_{22}} \quad (2-29a)$$

对于归一化网络,同样有

$$\bar{Z}_{\text{in}} = \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{I}_1} = \frac{a_{11}\bar{Z}_L + a_{12}}{a_{21}\bar{Z}_L + a_{22}} \quad (2-29b)$$

表 2-1 列出几个常用简单双端口网络的 \mathbf{A} 和 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩阵,以便计算较复杂的网络时查用。表 2-2 列出的是双端口网络的 \mathbf{Z} 、 \mathbf{Y} 及 \mathbf{A} 三种网络参数之间的互换公式。对于归一化参量,互换公式仍成立。

表 2-1 几个简单双端口网络的 \mathbf{A} 矩阵和 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩阵

基本网络	\mathbf{A} 矩阵	$\bar{\mathbf{A}}$ 矩阵
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{Z_{02}/Z_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{01}/Z_{02}} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{Z_{02}/Z_{01}} & Z/\sqrt{Z_{02}Z_{01}} \\ 0 & \sqrt{Z_{01}/Z_{02}} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{Y_{01}/Y_{02}} & 0 \\ Y/\sqrt{Y_{01}Y_{02}} & \sqrt{Y_{02}/Y_{01}} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n\sqrt{Z_{02}/Z_{01}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}\sqrt{Z_{01}/Z_{02}} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \cos\theta & jZ_0 \sin\theta \\ jsin\theta/Z_0 & \cos\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{Z_{02}/Z_{01}} \cos\theta & jZ_0 \sin\theta / \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \\ j\sqrt{Z_{01}Z_{02}} \sin\theta / Z_0 & \sqrt{Z_{01}/Z_{02}} \cos\theta \end{bmatrix}$

【例 2-2】 求一段无耗传输线的 \mathbf{A} 矩阵及归一化矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 。

解: 由第 1 章长线方程的解析式(1-7c)可知

$$U(z') = \text{ch}\gamma z' U_2 + Z_0 \text{sh}\gamma z' I_2$$

$$I(z') = \text{sh}\gamma z' U_2 / Z_0 + \text{ch}\gamma z' I_2$$

令 $z' = l$, 则 $U_1 = U(l)$, $I_1 = I(l)$, 即

$$U_1 = \text{ch}\gamma l U_2 + Z_0 \text{sh}\gamma l I_2$$

$$I_1 = \text{sh}\gamma l U_2 / Z_0 + \text{ch}\gamma l I_2$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}\gamma l & Z_0 \text{sh}\gamma l \\ \text{sh}\gamma l / Z_0 & \text{ch}\gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

对无耗传输线有 $\gamma = j\beta$, $\beta l = 2\pi l / \lambda_p = \theta$, 且

$$\text{ch}\gamma l = \cos\theta \quad \text{sh}\gamma l = j\sin\theta$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & jZ_0 \sin\theta \\ j\sin\theta / Z_0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos\theta \sqrt{Z_0 / Z_0} & jZ_0 \sin\theta / \sqrt{Z_0 Z_0} \\ j\sin\theta \sqrt{Z_0 Z_0} / Z_0 & \cos\theta \sqrt{Z_0 / Z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & j\sin\theta \\ j\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

表 2-2 Z、Y、A 之间的互换公式

网络参数	以 Y 参数表示	以 Z 参数表示	以 A 参数表示
$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{22}/ Y & -Y_{12}/ Y \\ -Y_{21}/ Y & Y_{11}/ Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -A_{11}/A_{21} & \det\mathbf{A}/A_{21} \\ 1/A_{21} & A_{22}/A_{21} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{22}/ Z & -Z_{12}/ Z \\ -Z_{21}/ Z & Z_{11}/ Z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_{22}/A_{12} & -\det\mathbf{A}/A_{12} \\ -1/A_{12} & A_{11}/A_{12} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Y_{22}/Y_{21} & -1/Y_{21} \\ - Y /Y_{21} & -Y_{11}/Y_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Z_{11}/Z_{21} & Z /Z_{21} \\ 1/Z_{21} & Z_{22}/Z_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

【例 2-3】 试求图 2-8 电路的 A 矩阵和 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩阵。

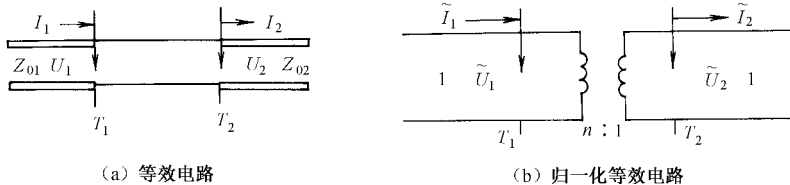


图 2-8 特性阻抗不同的传输线连接

解: 在图 2-8(a) 的参考面上选定电压电流的方向, 则有

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2 = U_2$$

$$I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2 = I_2$$

比较可得

$$A_{11} = A_{22} = 1, \quad A_{12} = A_{21} = 0$$

故有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

归一化

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sqrt{Z_{02}/Z_{01}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{01}/Z_{02}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$$

式中 $n = \sqrt{Z_{02}/Z_{01}}$ 称为变压比, 归一化等效电路如图 2-8(b) 所示。

【例 2-4】 试求图 2-9 电路的 \mathbf{A} 矩阵和 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩阵。

解: 先把图示电路网络分成三个简单网络相级联, 即两个并联导纳和一段均匀传输线。由表 2-1 查出各简单网络的 \mathbf{A} 矩阵, 并依次相乘, 可得所求电路网络的 \mathbf{A} 矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & j\sin\theta/Y_0 \\ jY_0\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta + jY_2\sin\theta/Y_0 & j\sin\theta/Y_0 \\ (Y_1 + Y_2)\cos\theta + j(Y_0 + Y_1Y_2/Y_0)\sin\theta & \cos\theta + jY_1\sin\theta/Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ \text{归一化} \quad \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} A_{11} \sqrt{Y_{01}/Y_{02}} & A_{12} \sqrt{Y_{01}Y_{02}} \\ A_{21}/\sqrt{Y_{01}Y_{02}} & A_{22} \sqrt{Y_{02}/Y_{01}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

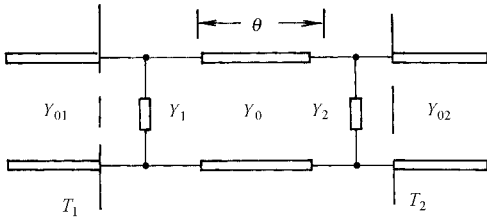


图 2-9 级联电路

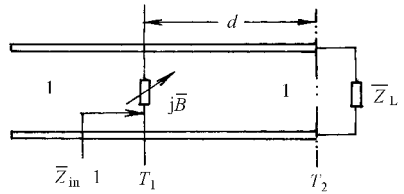


图 2-10 例 2-5 题图

【例 2-5】 在图 2-10 电路中, 已知 $\bar{Z}_L = r + jx$, 试求输入端阻抗匹配时的并联电纳 $j\bar{B}$ 的值及其距终端的位置 d 。

解: 这是单节调配的问题, 可以用第 1 章中的阻抗圆图求解, 也可用网络理论求解。用网络理论求解时, 将 T_1 和 T_2 面之间看成是两个简单网络的级联, 则有

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\bar{B} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta d & j\sin\beta d \\ j\sin\beta d & \cos\beta d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta d & j\sin\beta d \\ j(\bar{B}\cos\beta d + \sin\beta d) & \cos\beta d - \bar{B}\sin\beta d \end{bmatrix}$$

故由 $\bar{Z}_{in} = \frac{a_{11}\bar{Z}_L + a_{12}}{a_{21}\bar{Z}_L + a_{22}} = 1$, 将 $\bar{Z}_L = r + jx$ 代入可解得

$$\bar{B} = \pm \sqrt{\frac{(1-r)^2 + x^2}{r}}, \quad d = \frac{\lambda_p}{2\pi} \arctan\left(\frac{r\bar{B} - x}{1-r}\right)$$

【例 2-6】 用网络理论研究计算第 1 章习题 1-23。

解: 正确画出等效电路图, 选取参考面, 归一化。

该等效电路可看成是 4 个网络的级联, 如图 2-11 所示。

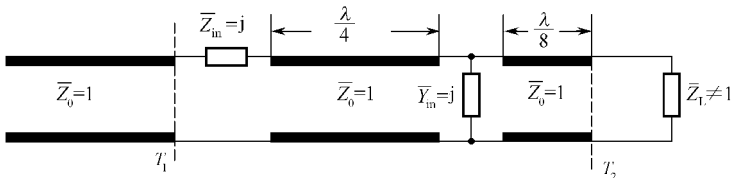


图 2-11 习题 1-23 等效电路

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{\text{总}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3 & -j \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

由
$$\bar{Z}_{\text{in}} = \frac{a_{11}\bar{Z}_L + a_{12}}{a_{21}\bar{Z}_L + a_{22}} = 1$$

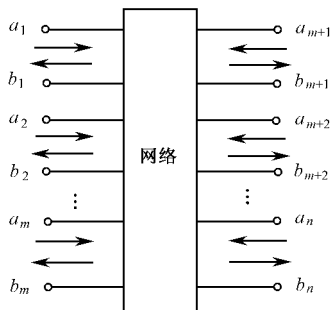
可得
$$\frac{-3\bar{Z}_L - j}{j\bar{Z}_L - 1} = 1, \quad \bar{Z}_L = \frac{1-j}{3+j} = \frac{1-j}{5} = 0.2 - j0.4$$

2.4 散射矩阵 (Scattering Matrix)

在上节中定义的阻抗参数、导纳参数及转移参数矩阵都是从电压电流出发定义的,而在微波波段电压电流本身已失去确切定义,并且在选定的网络参考面上也难以得到真正的微波开路或短路终端,因此上述参数在微波波段变成抽象的理论定义参数,无法通过测量直接得到。为了研究微波电路系统的特性,就需要一种在微波波段能用直接测量方法确定的网络参数,考虑到微波波段可测的电参量就是功率和反射系数,因此从归一化的入射波和反射波出发,定义出一组新的网络参数——散射参数,简称 S 参数。S 参数可以通过测量得到,用矢量网络分析仪,可以很方便地测得各种微波有源和无源网络的 S 参数,它们可以是线性网络,也可以是非线性网络,下面仅讨论线性无源微波网络的 S 参数的特性。

2.4.1 S 参数的定义

S 参数是描述网络各端口的归一化入射波和反射波之间关系的网络参数。对图 2-12 的 n 端口微波网络,设进入网络的方向为入射波方向,离开网络的方向为反射波方向,则各端口的归一化入射波和反射波的关系为



$$\tilde{U}_k = \frac{U_k}{\sqrt{Z_{0k}}} = a_k + b_k, \quad \tilde{I}_k = I_k \sqrt{Z_{0k}} = a_k - b_k \quad (2-30)$$

由此可得

$$a_k = \frac{1}{2}(\tilde{U}_k + \tilde{I}_k), \quad b_k = \frac{1}{2}(\tilde{U}_k - \tilde{I}_k) \quad (2-31a)$$

用矩阵表示有

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{I}}) \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{I}}) \quad (2-31b)$$

若 \tilde{U}_k 与 \tilde{I}_k 之间是线性关系,并且 $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{I}}$,代入上式可得

$$\mathbf{b} = (\tilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{1})(\tilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{1})^{-1}\mathbf{a} \quad (2-32a)$$

显然 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 之间也存在线性关系,并记为

$$b = Sa \quad (2-32b)$$

式中

$$S = (\bar{Z} - \mathbf{1})(\bar{Z} + \mathbf{1})^{-1} \quad (2-33a)$$

而

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \quad (2-33b)$$

称为散射矩阵,其元素 S_{ij} 称为 n 端口网络的散射参数。下面讨论 S 参数的定义及其物理含义。

1. 单端口网络

此时 $n=1$,如图 2-13(a)所示。由式(2-32b)可得 $b_1 = S_{11}a_1$,则有

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \Gamma_1$$

即为 1 端口的反射系数。

2. 双端口网络

此时 $n=2$,如图 2-13(b)所示。由式(2-32b)

可得

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2, \quad b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$$

故有:

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \Gamma_1 \text{ 为 2 端口接匹配负载时, 1 端口的反射系数;}$$

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} = \Gamma_2 \text{ 为 1 端口接匹配负载时, 2 端口的反射系数;}$$

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} \text{ 为 1 端口接匹配负载时, 由 2 端口至 1 端口的电压传输系数;}$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \text{ 为 2 端口接匹配负载时, 由 1 端口至 2 端口的电压传输系数。}$$

3. 多端口网络($n > 2$)

此时由式(2-32b)可知

$$S_{kk} = \left. \frac{b_k}{a_k} \right|_{\substack{a_l=0 \\ l \neq k}} \text{ 表示除 } k \text{ 端口外, 其余各端口均接匹配负载时, } k \text{ 端口的反射系数;}$$

$$S_{kl} = \left. \frac{b_k}{a_l} \right|_{\substack{a_k=0 \\ k \neq l}} \text{ 表示除 } l \text{ 端口外, 其余各端口均接匹配负载时, 由 } l \text{ 端口至 } k \text{ 端口的电压传输}$$

系数。

2.4.2 S 参数的性质

S 参数有几个很重要的特性,这些特性在微波电路特性的分析中有着重要的应用。

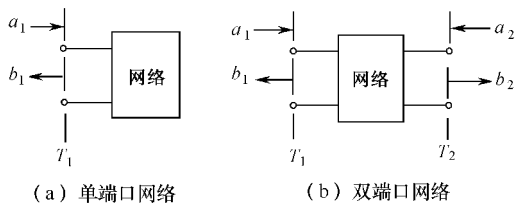


图 2-13 单、双端口网络

1. 互易性及对称性

若网络互易则 $\bar{\mathbf{Z}}^T = \bar{\mathbf{Z}}$, 根据 S 参数与 $\bar{\mathbf{Z}}$ 参数的关系式(2-33a), 可得

$$\mathbf{S}^T = (\bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{1})^{-1}(\bar{\mathbf{Z}} - \mathbf{1})$$

利用恒等式

$$\bar{\mathbf{Z}}^2 - \mathbf{1}^2 = (\bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{1})(\bar{\mathbf{Z}} - \mathbf{1}) = (\bar{\mathbf{Z}} - \mathbf{1})(\bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{1})$$

对该恒等式两边同时左乘、右乘 $(\bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{1})^{-1}$ 可得

$$(\bar{\mathbf{Z}} - \mathbf{1})(\bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{1})^{-1} = (\tilde{\mathbf{Z}} + \mathbf{1})^{-1}(\bar{\mathbf{Z}} - \mathbf{1})$$

故有

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{S} \quad (2-34)$$

即互易网络的散射参数恒有 $S_{kl} = S_{lk}$ 。

若网络的 k 端口还关于 l 端口为对称, 则有

$$S_{kk} = S_{ll} \quad \text{及} \quad S_{kl} = S_{lk} \quad (2-35)$$

2. 无耗性

将式(2-16)的复坡印亭定理中的 U_k, I_k 用归一化的 \tilde{U}_k, \tilde{I}_k 表示, 则有

$$\sum_{k=1}^n \tilde{U}_k \tilde{I}_k^* = j4\omega(W_m - W_e) + 2P_R$$

把 $\tilde{U}_k = a_k + b_k, \tilde{I}_k = a_k - b_k$ 代入上式, 并让等号两边的实、虚部分别相等。可得

$$\sum_{k=1}^n (|a_k|^2 - |b_k|^2) = 2P_R$$

$$\sum_{k=1}^n (b_k a_k^* - b_k^* a_k) = j4\omega(W_m - W_e)$$

若网络无耗, 必有 $P_R = 0$, 即

$$\sum_{k=1}^n (|a_k|^2 - |b_k|^2) = 0$$

用矩阵表示为

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^* - [b_1, b_2, \dots, b_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^* = 0$$

即

将 $\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$ 代入上式, 可得

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a}^* - \mathbf{b}^T \mathbf{b}^* = 0$$

$$\mathbf{a}^T (\mathbf{1} - \mathbf{S}^T \mathbf{S}^*) \mathbf{a}^* = 0$$

式中 \mathbf{a} 是任意的, 要使上式成立, 必有

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S}^* = \mathbf{1} \quad \text{或} \quad \mathbf{S}^+ \mathbf{S} = \mathbf{1} \quad (2-36)$$

(式中的上角标“+”表示共轭转置, 也叫哈密顿共轭) 这就是无耗网络散射矩阵的性质, 称为一元性或称么正性。

3. 传输线无耗条件下, 参考面移动 S 参数幅值的不变性

由于 S 参数是描述网络各端口参考面上归一化入射波和反射波之间关系的参数, 所以参