第 2 章　应力应变分析及应力应变关系

外力作用于杆件，从静力学角度看，在杆件的任意截面上会产生相互作用的内力，从几何的角度看，杆件会发生变形。为了建立起变形与内力(进而与外力)之间的关系，有必要对外力引起的内力和变形分别进行更精确的描述，这就需要引入应力和应变的概念，并进一步建立起它们之间更本质的联系——应力应变关系。

2.1　应力的概念及变形体在一点处的应力状态

在第 1 章中讨论了外力在杆件横截面上引起的内力分量，实际上，用截面法可以求出静定物体在任意截面上的内力分量，但这一组内力是截面上分布内力系的等效力系。一般情况下分布内力系在截面上各点的数值大小和方向都不相同，要想精确地描述外力在变形体内部产生的内力分布，需要引入应力的概念。

1. 应力的概念

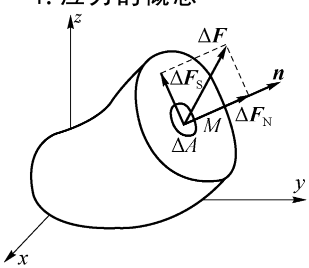


图 2.1　微元面积上的内力

考察如图 2.1 中物体截面上的内力分布，设其截面上某点 M 处微元面积 ΔA 上的内力合力矢量为 $\Delta \boldsymbol{F}$，则该微元上的内力分布的平均值为 $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta A$，当所取微元面积趋于无限小时，上述平均值便趋于一极限值，这一极限值就称为**物体在该截面上该点处的应力**，它表明了内力矢量在该点的集度。由于比值 $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta A$ 是矢量，故截面上某点的应力也是一个矢量。若 $\Delta \boldsymbol{F}$ 沿截面外法线和切线方向的投影分别为 ΔF_{N} 和 ΔF_{S}，依上述定义方法就可得到垂直于截面的**正应力**和平行于截面的**切应力**(或称**剪应力**)，分别记为

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{\mathrm{N}}}{\Delta A} \tag{2.1}$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{\mathrm{S}}}{\Delta A} \tag{2.2}$$

应力单位为 $\mathrm{N/m^2}$，即 Pa(帕斯卡或简称为帕)，工程上为使用方便常用 $\mathrm{MN/m^2}$，即 MPa(兆帕)，$1\mathrm{MPa}=10^6\mathrm{Pa}$，更大些的单位为 GPa(吉帕)，$1\mathrm{GPa}=10^3\mathrm{MPa}=10^9\mathrm{Pa}$。

上述的应力矢量及它的两个分量(正应力、切应力)是在某一个把物体截开的截面上定义的，显然，这样定义的应力矢量与所取截面的方向有关。实际上，过物体中的某一点 M，可以取无限多个不同方向的截面，因而也可得到无限多个不同方向截面上的应力矢量，其中的任意一个并不能全面描述点 M 的总体应力特性。因此，需用过一点的所有方向截面上的应力矢量的集合来描述该点的总体应力特性，称为**该点处的应力状态**。描述一点处应力状态这无穷多个矢量的集合要用一种新的物理量，即二阶张量，称为**一点处的应力张量**。二阶张量与标量、矢量不同，需要有新的表示方法。

2. 应力张量的表示方法

为了描述一般受力状态下变形体内部任意一点处的应力状态，先引入一点处单元体的概念。

科学研究的通用方法之一是“化繁为简”，对复杂的实际问题，往往先建立最简单、最基本的模型

加以研究，再经过汇总、综合、推广及更进一步的深化得出一般情况下的结论。在理论力学中，研究对象的最简单最基本的模型是质点，但在材料力学中，却无法以“质点”为最基本的模型，因为既无体积也无形状的一个质点无法讨论其变形。对变形固体而言，最简单最基本的模型应该是一点处的一个**单元体**(又称**微元体**)，即在某一点处的邻域内取出的一个无限小的体积元。

若取直角坐标系研究问题，则可在变形固体内某点周围，用三对分别垂直于三个坐标轴的截面切取一个边长为无限小的长方体，称为该点的**原始单元体**(图 2.2)。

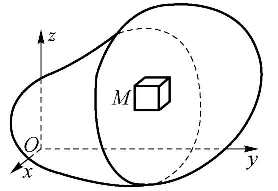


图 2.2　单元体

根据前面给出的某一截面上应力矢量的定义，单元体的各个表面上定义着该点不同方向截面上的应力矢量，且由于单元体边长无限小，相对的两个面上应力矢量大小相等，方向相反。若以直角坐标系中分量的形式来描述，则每个表面上的应力矢量可沿该表面的法线及互相正交的两个切线方向将其分解为一个正应力及两个切应力。通常，各面上的应力分量的记法如下：记单元体三对互相垂直的表面法线方向分别为 x、y、z 轴方向，其中外法线方向为坐标轴正向的表面为“正面”，反之为“负面”。各个表面上的应力分量统一用字母 σ 加上两个下标来表示，其中第一个下标表示应力分量所在平面的法线方向，第二个下标表示该应力分量的指向，并规定应力分量的正负号规则为正面上与坐标轴同向的应力分量为正，负面上与坐标轴反向的应力分量为正；反之为负。各正面和负面上应力分量及正方向分别如图 2.3(a)和(b)所示。

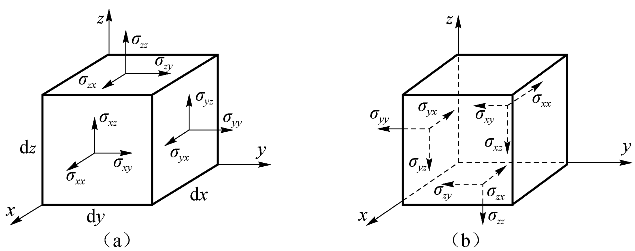


图 2.3　单元体上的应力分量

由此可见，以单元体来描述一点处的应力状态，仅需描述该点处三个互相垂直的截面上的应力状况。可以证明，对于二阶张量而言，只要知道这三个面上共 9 个应力分量，则过该点的任意方向截面上的应力矢量就可用其表示出来，即该点的应力状态是完全确定的。

一点的应力状态用二阶张量来描述时，表示方法是各种各样的。在直角坐标系中，应力分量按其所在平面及方向依次可排列成一个 3×3 的方阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

9 个应力分量中，凡两个下标不同的分量应是切应力分量，两个下标相同的分量是正应力分量，所以常常将其写为以下形式

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

式(2.4)的表示方法更明确地区分了正应力分量和切应力分量。

二阶张量运算时可以借助于矩阵运算，所以有时也将应力张量写为矩阵形式

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

最简单的还是指标形式的写法，即将直角坐标系的三个轴记为1、2、3($x=1,y=2,z=3$)，应力张量记为$\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$，展开写法为

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

在实际问题中如果将任意一点处的单元体视为从物体中切出来的一个分离体，单元体边长理论上为“无限小”的要求如何满足，则取决于该点周围邻域内应力状态变化的剧烈程度及研究问题要求的精度，如果该点附近应力状态的变化较小或要求的精度较低，特别是各点的应力状态都相同的情形(称为均匀应力状态)，单元体的尺寸可以取得比较大。反之，则应将尺寸取得很小。

将物体中切出的单元体视为分离体，对其可以写出全部6个独立平衡方程，其中三个力矩平衡方程可以给出一个十分有用的结论。

例如，图2.3所示的单元体，若假设所研究的物体不存在体力矩，写出力矩平衡方程之一$\sum M_z=0$，则有

$$(\tau_{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\mathrm{d}x-(\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z)\mathrm{d}y=0$$

因此，可得

$$\tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{2.7}$$

同理，另两个力矩平衡方程$\sum M_x=0$和$\sum M_y=0$分别给出

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz}&=\tau_{zy}\\ \tau_{xz}&=\tau_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

由此可见，在物体内任一点处互相垂直的两个截面上，与截面交线垂直的切应力分量总是同时存在，且大小相等，二者的方向共同指向或共同背离截面的交线。这称为**切应力互等定理**。用张量指标的写法来表示，即为

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{2.9}$$

同时，可知应力张量是一个二阶对称张量，9个分量中，独立的分量个数应为6个。因此，一点处的应力张量应写为

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \text{对称} & & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix}\sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ & \sigma_{y} & \tau_{yz}\\ \text{对称} & & \sigma_{z}\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

或者用一个二阶对称矩阵来表示

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ & \sigma_{y} & \tau_{yz}\\ \text{对称} & & \sigma_{z}\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

除了选择直角坐标系外，有时为了方便还可选择其他的正交曲线坐标系。如柱坐标、球坐标等，这时单元体的形状应取为以三对坐标平面截出的边长无限小的六面体，其各面上应力分量的表示方法与直角坐标系类似。

2.2 平面应力状态的解析法

2.1节所讨论的一点处的应力状态是最一般的情形，也称为**三向应力状态**。在工程实际中，许多杆件内各点所处的应力状态常常为一种特例，即单元体各面上的应力分量有的为零，而不为零的应力分量其矢量作用线都位于同一平面之内。如图2.4所示，该单元体所有不为零的应力分量作用

线都位于 xy 平面内，这种应力状态称为**平面应力状态**，也称为**二向应力状态**。对平面应力状态，单元体可采用简化的平面表示方法（图 2.5），即不为零的应力分量都可表示为 xy 平面内的分量。

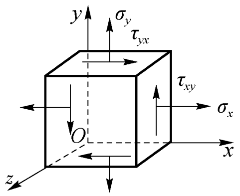


图 2.4　平面应力状态单元体

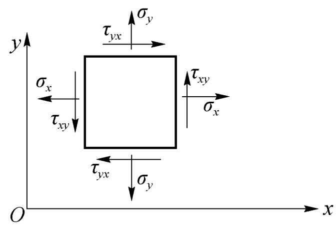


图 2.5　平面应力的表示方法

注意到切应力互等定理式（2.7），平面应力状态实际上只有三个不为零的独立分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}。其中 σ_x、σ_y 为正应力分量，τ_{xy} 为切应力分量。已知这三个应力分量，该点的应力状态则是完全确定的。

1. 斜截面应力公式

对某一点处的单元体来说，其各面上的应力分量已完全确定了该点的应力状态，则该点处任意方位的截面上应力分量也就确定了。利用单元体的平衡条件，可以得出过该点的任意斜截面上的应力分量的表达式。

为了使平面应力状态分析的更方便，工程上采用了更简单的记法，即平面应力状态（图2.5）中的正应力分量记法不变，仍为 σ_x 和 σ_y，而切应力分量 τ_{xy}、τ_{yx} 分别记为 τ_x、τ_y；正应力分量仍以拉应力为正，压应力为负，而切应力分量以使单元体有顺时针转动趋势的切应力为正，使单元体有逆时针转动趋势的为负。考虑到切应力互等定理可知，在一个单元体中 τ_x 和 τ_y 必然大小相等且使单元体转动趋势方向相反，故其值总是一个为正，另一个则为负，即 $\tau_y=-\tau_x$（图 2.6）。

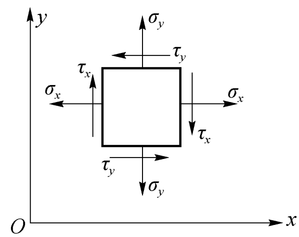
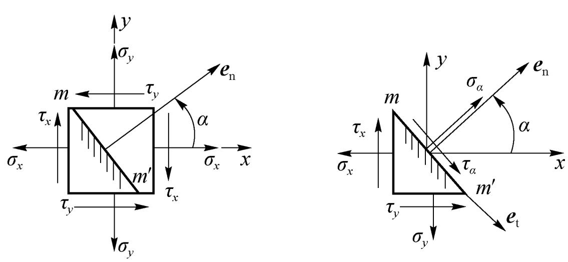


图 2.6　平面应力状态的工程记法

采用平面应力状态的工程记法后，下面来推导单元体（也即该点处）任意斜截面上的应力表达式。

在图 2.7(a) 中，任意斜截面 $m-m'$ 所在的平面与纸面垂直，将其外法线方向与 x 轴正向之间的夹角记为 α，并规定 α 角是从 x 轴正方向起转动到 $m-m'$ 平面的外法线 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 方向时转过的角度，且逆时针转动的 α 角为正，反之为负，该斜面亦称为 α 面。沿 $m-m'$ 斜面切开将单元体分为两部分，取左半部分三角形为分离体（图 2.7(b)），设 α 斜面上的正应力分量为 σ_α，切应力分量为 τ_α，斜面上的正应力仍然以拉为正，切应力以所在斜面有顺时针转动趋势为正，反之皆为负。



（a）　　（b）

图 2.7　斜截面上的应力

对三角形分离体，列出沿斜面法线 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 方向和沿斜面的 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ 方向的力平衡方程，设斜面的面积为 $\mathrm{d}A$，则有

$$\sum F_n = 0 \quad \sigma_\alpha \mathrm{d}A - \sigma_x(\mathrm{d}A\cos\alpha)\cos\alpha + \tau_x(\mathrm{d}A\cos\alpha)\sin\alpha - \sigma_y(\mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha + \tau_y(\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_t = 0 \quad \tau_\alpha \mathrm{d}A - \sigma_x(\mathrm{d}A\cos\alpha)\sin\alpha - \tau_x(\mathrm{d}A\cos\alpha)\cos\alpha + \sigma_y(\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha + \tau_y(\mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha = 0$$

由以上二式经整理后可得

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \tag{2.12}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \tag{2.13}$$

以上二式称为**平面应力状态的斜截面应力公式**。在实际应用时，式中各应力分量均用其代数值计算。

2. 主平面、主方向、主应力及最大切应力

从斜截面应力公式(2.12)、(2.13)可知，当 α 角变化时，斜面上的正应力 σ_α 和切应力τ_α 也随之改变。对某点的单元体来说，若在某个方向的斜截面上切应力恰好为零，则这个方向的斜截面称为**主平面**，该斜面的方向角$\alpha=\alpha_P$ 称为**主方向**。由式(2.13)，令$\tau_\alpha=0$ 得

$$\tan 2\alpha_P = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{2.14}$$

$2\alpha_P$ 在$[-\pi,\pi]$范围内取值，上式确定出的 α_P 应有两个值，这两个值相差 90°，即可以找到互相垂直的两个斜截面，其上的切应力都为零。若观察这两个特殊截面上的正应力，可以发现也有特殊性。由式(2.12)求 σ_α 的极值，有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha - 2\tau_x\cos 2\alpha = 0$$

即

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}$$

上式解出 α 值与式(2.14)解出的 α_P 完全一致，即主平面上的正应力具有极值性质。式(2.14)确定的两个 α_P 值，一个对应于正应力极大值，另一个对应于正应力极小值。主平面上的这两个正应力极值称为**主应力**，分别记为 σ' 和 σ''，将式(2.14)求出的 α_P 值代入式(2.12)，可得出这两个主应力的一般表达式为

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \tag{2.15}$$

一点的应力状态在不同的坐标系下，其应力张量的表达形式是各不相同的。如果选取该点两个相互垂直的主方向为坐标轴方向，分别记为 1 轴和 2 轴，就称为该点的**主坐标系**。主坐标系中的单元体称为**主单元体**，如图 2.8 所示。在主坐标系中该点的应力状态的表达形式最为简单，即只有 σ' 和 σ'' 两个正应力分量。且与 z 轴平行的所有斜截面上的正应力，以 σ' 和 σ'' 为极值。

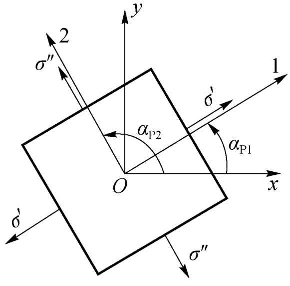


图 2.8　主单元体

需要指出的是，在平面应力状态中，与 z 轴垂直的平面上是既无正应力也无切应力的。该平面也是主平面，其上的主应力数值为零。所以，物体内任意一点若为平面应力状态，该点应有三个主应力，数值分别为 σ'、σ'' 和 0。这三个主应力按代数值大小顺序排列记为 σ_1、σ_2、σ_3，即 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，分别称为**第一、第二、第三主应力**。

若将以上讨论推广到任意的三向应力状态，同样也可以找到相互

垂直的三个主平面及相应的三个主应力。且主应力也为过该点所有方向的截面上正应力的极值，即一点的正应力(代数值)应以该点的第一主应力 σ_1 为最大值，第三主应力 σ_3 为最小值。对任意一点的单元体来说，若该点的三个主应力数值都不为零，就称该点为**三向应力状态**；若其中的一个主应力为零，该点即**平面应力状态**，又称为**二向应力状态**；若有两个主应力都为零，则称该点为**单向应力状态**。以后在分别讨论杆件的各种基本变形及组合变形时，可看到这些情形的实际例子。

以上有关主方向和主应力的讨论，若结合线性代数及矩阵运算的知识，则会更加简捷。一点处任取一组直角坐标轴，任意平面应力状态可以以矩阵形式表示为$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$，其中切应力分量应按张量分量表示$\tau_{xy} = -\tau_x$，$\tau_{yx} = \tau_y$，若在该点平面内的两个正交主方向上选取坐标轴构成主坐标系，则该点的应力状态矩阵可表示为对角阵$\begin{bmatrix} \sigma' & 0 \\ 0 & \sigma'' \end{bmatrix}$，这两个矩阵之间的关系无非是不同坐标系下矩阵的转换关系。求解应力状态矩阵的主方向、主应力实质上是寻找在哪一个坐标系中，应力张量矩阵可以表示为对角阵的形式。利用矩阵的知识可知，求一点处的主应力和主方向即为求一个二阶实对称矩阵$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$的特征值及特征向量的问题。主应力即为应力矩阵的特征值；主方向即为该特征值对应的特征向量，也即该主应力所在平面外法线的方向余弦。

以上讨论的是一点处不同方向的斜面上正应力变化情况。同样，不同方向斜面上的切应力也是随方向不同而变化的，也可能在某一方向上取极值。将式(2.13)对 α 求导并令其等于零，得

$$\cot 2\alpha_S = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{2.16}$$

α_S 表示最大切应力所在平面的方向角，与式(2.14)比较可知

$$\cot 2\alpha_S = -\tan 2\alpha_P \tag{2.17}$$

即 $2\alpha_S$ 与 $2\alpha_P$ 相差 90°，故 α_S 与 α_P 相差 45°，也就是两个主方向 α_{P1} 和 α_{P2} 之间的角平分线方向为 α_{S1} 和 α_{S2} 的方向，如图 2.9 所示。

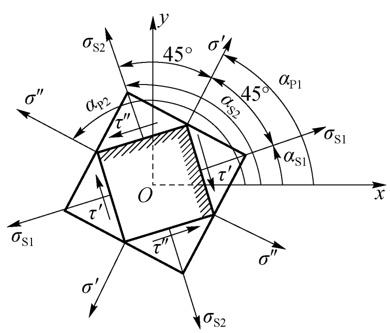


图 2.9　切应力极值所在平面

将求得的 α_S 值代入式(2.13)，求出切应力的极值为

$$\left.\begin{matrix} \tau' \\ \tau'' \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \pm\frac{\sigma' - \sigma''}{2} \tag{2.18}$$

必须注意到τ'、τ''是指所有平行于 z 轴的这组截面上的切应力所取的极值，这一极值所在的截面恰好位于三个主应力之中的两个，即 σ' 和 σ'' 之间的 45° 方向上。同理，三个主应力 σ'、σ''、0 之中的任意两者之间的 45° 方向上都可以找到这样一组切应力的极值，即平行于第三个主方向的所有截面上切应力的极值。这三组切应力极值记为**主切应力**，分别表示为

$$\begin{cases} \tau_{P3} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_{P1} = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{P2} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \end{cases} \tag{2.19}$$

而过该点的所有方向截面上切应力的最大值可从这三个主切应力中选出，比较式(2.19)中三者的最大值应为

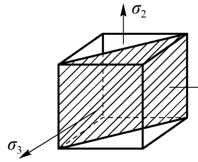


图 2.10　最大切应力所在截面

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \tag{2.20}$$

$\tau_{\max}$称为该点的**最大切应力**，它所在的平面为平行于主应力 σ_2 的方向，且法线方向与主应力 σ_1 和 σ_3 的方向的夹角都为 45°。图 2.10 中阴影截面就是$\tau_{\max}$所在的截面。

2.3　平面应力状态的图解法——应力圆(莫尔圆)

2.2 节给出了平面应力状态下，任意斜截面上的应力分量的表达式，下面介绍一种图解方法，对平面应力状态的分析十分直观。

以水平轴为正应力轴，以铅垂轴为切应力轴，建立一个直角坐标系。某点若为 xy 平面内的平面应力状态，以该点某一平行于 z 轴方向斜截面上的正应力和切应力数值为坐标，可在σ-τ平面上得到一个代表点。所有平行于 z 轴方向截面的代表点在 σ-τ平面上构成一条曲线，下面的分析可知这条曲线是一封闭的圆，称为该点的**应力圆**，也称为**莫尔圆**。

在σ-τ平面上画某点的应力圆时有如下的规定，即该点任意平行于 z 轴方向截面上的正应力 σ_α 和切应力τ_α 在 σ-τ坐标系的符号应为：正应力 σ_α 以拉为正；切应力τ_α 以使得单元体有顺时针转动趋势为正。根据式(2.12)和(2.13)，可推导出一点处某方向截面上的正应力 σ_α 和切应力τ_α 之间应满足的关系。

将式(2.12)右边第一项移到等号左边，两边平方得

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha\right)^2$$

式(2.13)两边平方运算后与上式相加得

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4}+\tau_x^2$$

即

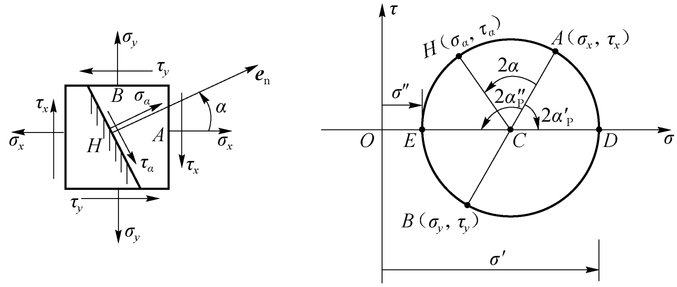
$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}\right)^2 \tag{2.21}$$

此式可视为以 σ_α 为横坐标，τ_α 为纵坐标的平面内一个圆的方程，其圆心坐标为$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$，半径为$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$。

因此，若某一点处的应力圆已知，则应力圆圆周上任意一点的坐标值(σ,τ)就表示了该点处平面应力单元体某一方向截面上的正应力和切应力值。

在实际应用中，若已知某一点单元体的应力状态为$(\sigma_x,\sigma_y,\tau_x)$，则可按如下方法画出该点相应的应力圆图形(图 2.11)：在 σ-τ平面上，先标出单元体与 x 轴垂直的 x 面上应力的坐标点 $A(\sigma_x,\tau_x)$及与 y 轴垂直的 y 面上应力的坐标点 $B(\sigma_y,\tau_y)$，注意到应有$\tau_y=-\tau_x$；连接 AB 两点并与 σ 轴相交于点 C，点 C 即应力圆的圆心$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$；以 CA 为半径，C 为圆心即可画出该点完整的应力圆。

根据某点的单元体应力状态图 2.11(a)画出的应力圆图 2.11(b)，形象地表达了该点平面应力状态的全部特征：单元体上任意方向的一个"截面"上的应力分量即对应于应力圆圆周上的一个"点"的坐标；以应力圆任意一条直径两个端点坐标值作为两个相互垂直的截面上的应力值，都可画出该点以这两个截面为两对表面切出的单元体；应力圆圆心向圆周上任意两点引出的半径转过的角度为该圆周上两点代表的截面法线转过的角度的两倍，而转动方向是一致的。



（a）　　　　　　　　　　　　（b）

图 2.11　平面应力状态的应力圆

根据应力圆图 2.11 可知，若求单元体上法线方向由 x 面（应力圆上的 A 点）起逆时针转动 α 角后的斜面 H 上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α，即为应力圆中点 H 的坐标（σ_α，τ_α）；而图 2.11(b) 中应力圆水平直径的两端点 D、E 的切应力为零，应为该点两个主平面所在点，即点 D 横坐标为主应力之一 σ'，点 E 横坐标为主应力之二 σ''。若 α_P 在[$-90°$，$90°$]内取值，则当 $\tau_x>0$ 时，半径 CA 顺时针转动 $2\alpha'_\mathrm{P}$ 后到达 CD，逆时针转动 $2\alpha''_\mathrm{P}$ 后到达 CE，故主应力 σ' 所在的主平面方位角的大小为 α'_P（转向为顺时针，故取为负号），主应力 σ'' 所在的主平面方位角大小为 α''_P（转向为逆时针，故取为正号），图 2.12 即为该点的主应力、主方向和主单元体示意图；而当 $\tau_x<0$ 时，α'_P 取正号，α''_P 取负号。

除了图 2.11(b) 给出的一般情形的平面应力状态应力圆外，图 2.13 给出了工程中的杆件常见的三种特殊应力状态所对应的应力圆图形，其中图(a)为轴向拉伸杆件中一点的应力状态，图(b)为轴向压缩杆件中一点的应力状态，二者均为单向应力状态。图(c)为圆轴扭转时轴内一点的应力状态，称为纯剪切应力状态，是平面应力状态的一个特例。

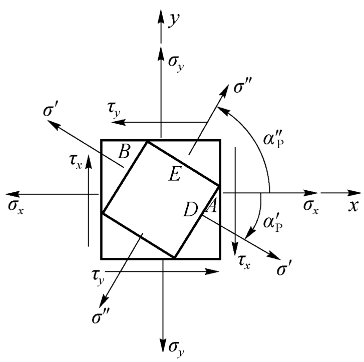


图 2.12　平面应力状态的主应力、主方向和主单元体

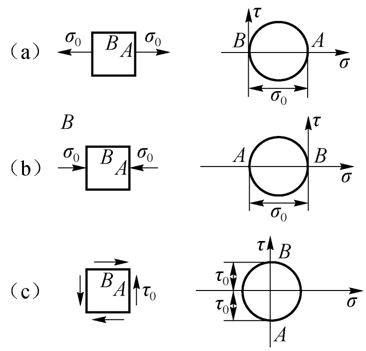


图 2.13　特殊应力状态所对应的应力圆

2.4　三向应力状态分析简介

有了 2.3 节平面应力分析的结论，对于任意的三向应力状态，可将 2.3 节中平面应力状态分析的相应结论加以推广，尤其是矩阵形式的运算及表示的结论，均可以用于三向应力状态。

如图 2.14，设某点处于任意的三向应力状态，在直角坐标系下，该点的应力状态可按式(2.5)表示的矩阵形式 $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$，而过该点的任意截面外法线 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 的三个方向余弦为

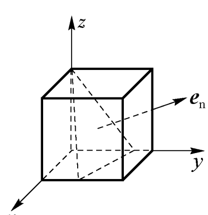


图 2.14　三向应力状态的单元体

$$\begin{cases} n_x = \cos(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}, x) \\ n_y = \cos(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}, y) \\ n_z = \cos(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}, z) \end{cases} \tag{2.22}$$

若求该点三向应力状态的主应力、主方向，也即求应力矩阵$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$的特征值和特征向量。特征值应满足的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.23}$$

此式为关于σ的三次代数方程，求出的三个实根按代数值大小排列即为三个主应力$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，对应于每个主应力$\sigma_i(i=1,2,3)$，以下方程组确定了其主方向$[n_{xi} \ \ n_{yi} \ \ n_{zi}]^\mathrm{T}(i=1,2,3)$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ n_{zi} \end{Bmatrix} = \sigma_i \begin{Bmatrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ n_{zi} \end{Bmatrix} \qquad (i = 1,2,3) \tag{2.24}$$

$$n_{xi}^2 + n_{yi}^2 + n_{zi}^2 = 1 \qquad (i = 1,2,3) \tag{2.25}$$

由于一点处的应力张量矩阵是一个 3×3 的实对称矩阵，根据线性代数中的理论，三维空间中3×3的实对称矩阵必存在三个实数特征值，且数值不相等的特征值所对应的特征向量相互正交。因此可得出结论，一点处必存在三个主应力，且当三个主应力数值不等时，三个主方向（也即三个主平面）是相互正交的。

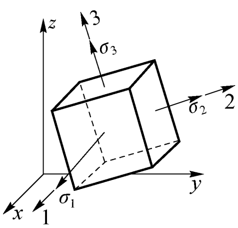


图 2.15　三向应力状态的主单元体

以一点处的三个相互垂直的主方向为坐标轴构成该点的主坐标系。这三个轴称为**主轴**，分别记为 1、2、3 轴；在主坐标系中切取的单元体为**主单元体**（图 2.15）。

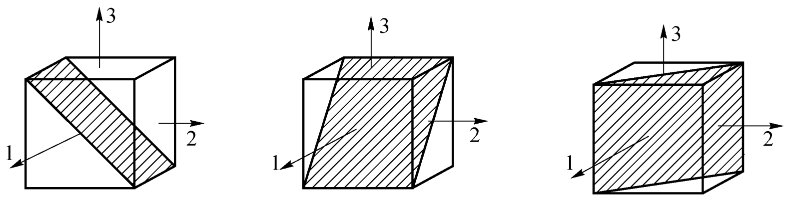
若三个主应力中有两个主应力数值相等，即特征方程有一个二重根，则在与二重根之外的第三个主应力方向垂直的平面内，任意方向都是主方向，此时可选择该平面内任意一对相互垂直的方向构成主坐标轴，与第三个主应力的方向一起成为主坐标系；如果三个主应力数值都相等，即三重根的情况，$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$，称为**静水应力状态**，这一应力状态在主轴坐标系中可表示为如下对角阵形式

$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$$

这一张量也称为**球形张量**，故静水应力也称为**球形应力**。球形应力状态下，任意方向都是主方向，因而可任选一组正交方向构成主坐标轴。这一特殊应力状态在实际生活中也能见到，例如将一金属球置于很深的水中，球内任意点均处于静水应力即球形应力状态。

与上节平面应力状态分析切应力最大值类似，在平行于主应力σ_1、σ_2、σ_3的三组截面上，分别存在着各组截面中切应力的最大值，记为τ_{P1}、τ_{P2}、τ_{P3}，作用在与任意两个主方向成 45°角的截面上，如图 2.16所示，三者称为**主切应力**，其绝对值分别为

$$\begin{cases} \tau_{\mathrm{P1}} = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{\mathrm{P2}} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{\mathrm{P3}} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{cases} \tag{2.26}$$



（a）　　（b）　　（c）

图 2.16　主切应力所在截面

三个主切应力τ_{P1}、τ_{P2}和τ_{P3}中的最大者应为该点所有方向截面上的切应力绝对值的最大值，称为该点的**最大切应力**τ_{max}，即

$$\tau_{max} = \max(\tau_{P1}, \tau_{P2}, \tau_{P3}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{2.27}$$

工程实际中，有时还会遇到构件中某点处于一种特殊的三向应力状态，即一个主应力及相应主方向已知的情况（例如图 2.17），此时，可在与已知主应力方向垂直的平面内，按平面应力状态的分析方法求得该点的另外两个主应力及相应主方向。

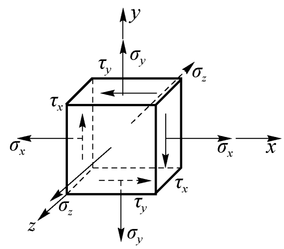
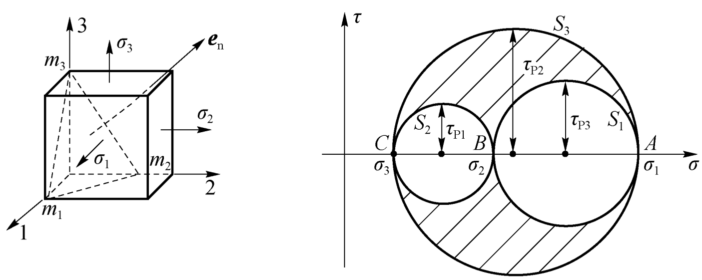


图 2.17　某个主应力已知的三向应力状态

平面应力状态分析可以借助于应力圆（莫尔圆）进行直观的几何分析，三向应力状态下，也可画出一点处的“三向应力圆”。若已求得某点应力状态的三个主应力并画出主坐标系和主单元体（图 2.18（a）），则可在 σ-τ坐标系中标出 σ_1、σ_2、σ_3 在 σ 轴上的位置 A、B、C，分别以 AB、BC 和 AC 为直径可画出圆心在 σ 轴上的三个圆 S_1、S_2 和 S_3，这三个圆就构成了该点的三向应力圆（图2.18（b））。



（a）　　（b）

图 2.18　三向应力状态所对应的三向应力圆

从图 2.18 中可以看出，三向应力圆的三个圆心均位于 σ 轴上，与平面应力圆类似，该点某一方位截面上的正应力和切应力值就对应于应力平面上的一个点。其中，由 σ_1 和 σ_2 确定的 S_1 圆周上各点就对应于单元体平行于主轴 3 的所有截面，由 σ_2 和 σ_3 确定的 S_2 圆周上各点就对应于单元体平行于主轴 1 的所有截面，由 σ_1 和 σ_3 确定的 S_3 圆周上各点就对应于单元体平行于主轴 2 的所有截面，而该点与任一主轴不平行的斜截面的正应力和切应力所对应的点，则落在圆 S_3 内、圆 S_1 和 S_2 之外的阴影区域之中（图 2.18（b））。

若已知任意斜截面 $m_1m_2m_3$ 外法线 $\boldsymbol{e}_n$ 与三个主轴的方向余弦 $n_1=\cos(\boldsymbol{e}_n,1)$、$n_2=\cos(\boldsymbol{e}_n,2)$、$n_3=\cos(\boldsymbol{e}_n,3)$，则该斜截面上的正应力 σ_n 和切应力τ_n 可表示为

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_n^2} \end{cases}$$

显然，某点处任意方位截面上的应力点都应落在三向应力圆阴影区域内或圆周上，因此一点处

的任意方位截面上的正应力所能达到的最大值即 σ_1，最小值即 σ_3，而最大切应力大小应为圆 S_3 的半径$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$，即对任意一点有

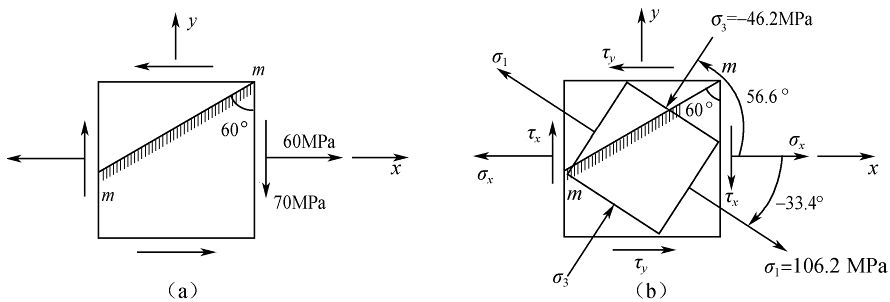
$$\begin{cases}\sigma_{\max}=\sigma_1\\ \sigma_{\min}=\sigma_3\\ \tau_{\max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\end{cases}\tag{2.28}$$

而最大切应力所在截面的外法向与主轴 1 及主轴 3 均成 45°角。

以上结论适用于任何应力状态(包括二向应力状态和单向应力状态的情形)。

当三向应力状态其中某一个主应力为零时退化为平面应力状态，此时三向应力圆中由其余两个主应力确定的圆即为平面应力状态的应力圆(莫尔圆)。

例 2.1　已知杆件内部某一点处切出的单元体应力状态如图(a)所示。(1)试用解析法求图示$m-m$截面上的正应力及切应力；(2)求该点处的主应力和相应的主方向及该点的最大切应力；(3)画出该点的主单元体及各面上的主应力并标明方位角。



例 2.1 图

解：(1)求 $m-m$ 截面上的正应力及切应力

此单元体为平面应力状态，$\sigma_x=60$ MPa，$\sigma_y=0$，$\tau_x=70$ MPa，$m-m$ 截面的方位角为 $\alpha=120°$，根据斜截面应力公式(2.12)、式(2.13)有

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha\\&=\left(\frac{60}{2}+\frac{60}{2}\cos240°-70\sin240°\right)\text{ MPa}=75.6\text{ MPa}\\ \tau_\alpha&=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha\\&=\left(\frac{60}{2}\sin240°+70\cos240°\right)\text{ MPa}=-61.0\text{ MPa}\end{aligned}$$

(2)求主应力、主方向及最大切应力

根据主应力公式(2.15)，有

$$\left.\begin{matrix}\sigma'\\ \sigma''\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

$$=\left(\frac{60}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{60}{2}\right)^2+70^2}\right)\text{ MPa}=(30\pm76.2)\text{ MPa}$$

$$\sigma'=106.2\text{ MPa},\sigma''=-46.2\text{ MPa}$$

根据主方向公式(2.14)，有

$$\tan2\alpha_{\mathrm{P}}=-\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}=-\frac{2\times70}{60-0}=-\frac{7}{3}$$

由上式可解得一个方位角为$-33.4°$，另一个则为$-33.4°+90°=56.6°$，但这两个方位角哪一个对应于σ'，哪一个对应于σ''呢？用一个简单的几何方法就可以判断。观察该应力状态单元体中τ_x与τ_y的实际指向，二者箭头所指向的象限就是主应力σ'（即式(2.15)中取"＋"号计算出的主应力）所对应的主方向，而相应于另一主应力σ''的主方向应与此方位垂直。本题中τ_x与τ_y的箭头实际指向各为二、四象限，而主方向中$\alpha_{P1}=-33.4°$为第四象限的，故对应于$\sigma'=106.2\ \text{MPa}$，而另一主方向$\alpha_{P2}=56.6°$，则对应于$\sigma''=-46.2\ \text{MPa}$，另外平面应力状态还有一主应力为零，综合起来有

$$\sigma_1=106.2\ \text{MPa},\quad \alpha_{P1}=-33.4°$$

$$\sigma_2=0$$

$$\sigma_3=-46.2\ \text{MPa},\quad \alpha_{P2}=56.6°$$

而最大切应力可由式(2.20)计算：

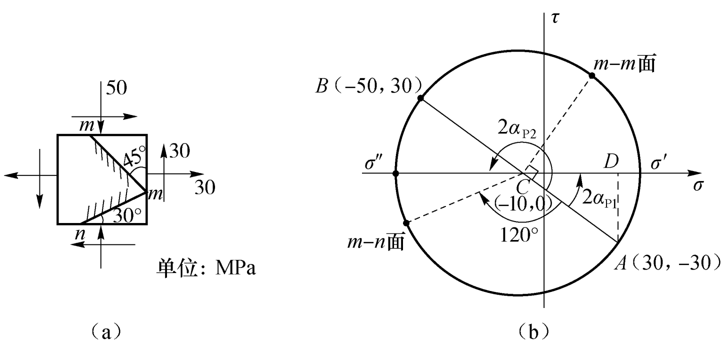
$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{106.2+46.2}{2}\ \text{MPa}=76.2\ \text{MPa}$$

(3)画出该点的主单元体及各面上主应力

由$\alpha_{P1}=-33.4°$，$\alpha_{P2}=56.6°$可确定主单元体的两对平面，画出其上主应力如图(b)所示。

注意：此类题目关键是找准斜截面的方位角α，特别注意其符号规定；求主应力和主方向时应明确指出主应力及相应主方向的一一对应关系。而一点处的最大切应力τ_{max}应由第1与第3主应力之差的一半来计算，对平面应力状态来说，τ_{max}不一定恰好是σ'和σ''之差的一半。

例 2.2 已知受力构件中某点的单元体应力状态如图(a)所示，试：(1)作出该点的应力圆；(2)根据应力圆用图解法求出不为零的两个主应力σ'和σ''及对应的主方向α_{P1}和α_{P2}；(3)画出$m-m$斜面和$m-n$斜面在应力圆上的位置点；(4)求该点最大切应力τ_{max}。



例 2.2 图

解：(1)作应力圆

在σ-τ平面上，标出x面坐标为点$A(30,-30)$，y面坐标为点$B(-50,30)$，连接A、B交σ轴于点$C(-10,0)$，即为应力圆圆心；以CA为半径可画出应力圆(图(b))；

应力圆的半径为$\overline{CA}=R=\sqrt{30^2+(30+10)^2}=50$

(2)求主应力σ'、σ''和主方向α_{P1}、α_{P2}

由应力圆的半径R和圆心C坐标，可得

$$\sigma'=(-10+R)\ \text{MPa}=40\ \text{MPa}$$

$$\sigma''=(-10-R)\ \text{MPa}=-60\ \text{MPa}$$

由三角形ACD，可计算出α_{P1}及α_{P2}

$$\sin 2\alpha_P=\frac{30}{50}=\frac{3}{5},\quad \alpha_{P1}=18.4°$$

$$\alpha_{P2}=\alpha_{P1}+90°=108.4°$$

显然，σ'与α_{P1}对应，σ''与α_{P2}对应。

(3)画出$m-m$、$m-n$斜面在应力圆上的位置

$m-m$斜面的方位角为$\alpha_m=45°$，故过圆心C作垂线与CA垂直可找到$m-m$点(图(b))；

$m-n$斜面的方位角为$\alpha_n=-60°$，故由CA半径顺时针转动120°可找到$m-n$点(图(b))。

(4)求最大切应力τ_{max}

此单元体的三个主应力为

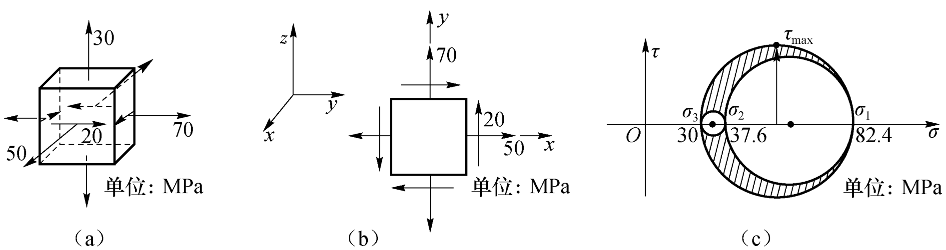
$$\sigma_1=\sigma'=40\ \text{MPa},\sigma_2=0,\sigma_3=\sigma''=-60\ \text{MPa}$$

故此点处的最大切应力为

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{40+60}{2}\ \text{MPa}=50\ \text{MPa}$$

注意：平面应力状态下，应力圆与应力状态单元体之间的对应关系是“点”对“面”的关系，即应力圆周上的一个点，对应于应力状态单元体上一个截面。对给定的单元体应力状态，关键是确定单元体x面和y面的坐标点，这两点确定后就可找到应力圆圆心、半径并作出应力圆图形，在应力圆上就可进一步确定主应力、主方向和任意斜截面上的应力等。

例 2.3 受力构件内部某点的应力状态如图(a)所示，试求该点的三个主应力、主方向及最大切应力，并画出该点的三向应力圆。



例 2.3 图

解：建立如图(b)所示的坐标系，显然与z轴垂直的平面为一个主平面，其上的主应力为30 MPa，在$x-y$平面内，可按平面应力状态求解另两个主应力(图(b))：

已知$\sigma_x=50\ \text{MPa}$，$\tau_x=-20\ \text{MPa}$，$\sigma_y=70\ \text{MPa}$

$$\left.\begin{matrix}\sigma'\\\sigma''\end{matrix}\right\}=\left(\frac{50+70}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{50-70}{2}\right)^2+(-20)^2}\right)\ \text{MPa}=(60\pm22.4)\ \text{MPa}$$

$$\sigma'=82.4\ \text{MPa},\quad \sigma''=37.6\ \text{MPa}$$

求主方向

$$\tan2\alpha_P=-\frac{2\times(-20)}{50-70}=-2$$

$$\alpha_{P1}=58.3°\qquad \alpha_{P2}=-31.7°$$

由τ_x、τ_y箭头的指向可知，σ'的方位角位于第一、三象限，故应有$\alpha_{P1}=58.3°$对应于$\sigma'=82.4\ \text{MPa}$，$\alpha_{P2}=-31.7°$对应于$\sigma''=37.6\ \text{MPa}$，排序后可得该点三个主应力为

$$\sigma_1=82.4\ \text{MPa}\qquad \alpha_{P1}=58.3°$$

$$\sigma_2=37.6\ \text{MPa}\qquad \alpha_{P2}=-31.7°$$

$$\sigma_3=30\ \text{MPa}\qquad \text{所在平面与}z\text{轴垂直}$$

该点最大切应力为

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{82.4-30}{2}\ \text{MPa}=26.2\ \text{MPa}$$

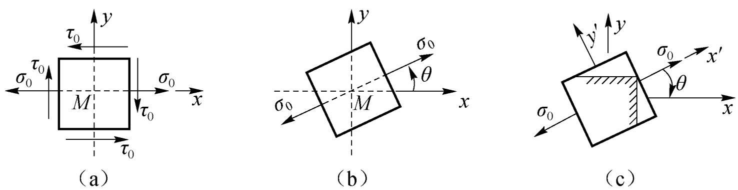
由该点三个主应力值，可在$\sigma-\tau$平面上作出该点的三向应力圆(图(c))。

注意：本例为已知一个主平面及主应力的特殊三向应力状态，求另两个主应力时可按平面应力状态处理。计算最大切应力时，由于σ'和σ''分别为第1和第2主应力，故此单元体的最大切应力应由$\sigma_1=\sigma'=82.4$ MPa与z方向的主应力$\sigma_3=30$ MPa来计算，从三向应力圆来看按平面应力状态计算时对应的应力圆是中间两个“小圆”之一，不是最大的应力圆。

例 2.4 某处于线弹性小变形的杆件受到两组载荷的共同作用，当杆件只受第一组载荷作用时，在M点单元体A上产生的应力如图(a)所示；只受第二组载荷作用时，在M点的单元体B上产生的应力如图(b)所示；已知$\sigma_0=40$ MPa，$\tau_0=30$ MPa，$\theta=30°$，求这两组载荷共同作用时M点的主应力、主方向和最大切应力。

解：线弹性小变形情形，叠加原理适用。设第一组载荷作用下的应力为σ_{x1}、σ_{y1}、τ_{x1}，有

$$\sigma_{x1}=\sigma_0,\tau_{x1}=\tau_0,\sigma_{y1}=0$$



例 2.4 图

对第二组载荷作用下的应力，由图(b)的单元体方位建立$x'-y'$坐标系(图(c))，有

$$\sigma_{x'}=\sigma_0,\tau_{x'}=0,\sigma_{y'}=0$$

根据这一单元体$x'-y'$坐标系中的应力可求与x轴垂直的x面上的应力σ_{x2}和τ_{x2}及与y轴垂直的y面上的应力σ_{y2}，由于x面方位角为$-\theta$，y面方位角为$90°-\theta$，故可计算得

$$\sigma_{x2}=\frac{\sigma_{x'}+\sigma_{y'}}{2}+\frac{\sigma_{x'}-\sigma_{y'}}{2}\cos2(-\theta)-\tau_{x'}\sin2(-\theta)=\frac{\sigma_0}{2}+\frac{\sigma_0}{2}\cos2\theta$$

$$\tau_{x2}=\frac{\sigma_{x'}-\sigma_{y'}}{2}\sin2(-\theta)+\tau_{x'}\cos2(-\theta)=-\frac{\sigma_0}{2}\sin2\theta$$

$$\sigma_{y2}=\frac{\sigma_{x'}+\sigma_{y'}}{2}+\frac{\sigma_{x'}-\sigma_{y'}}{2}\cos2(90°-\theta)-\tau_{x'}\sin2(90°-\theta)=\frac{\sigma_0}{2}-\frac{\sigma_0}{2}\cos2\theta$$

两组载荷共同作用下M点的应力状态应为这两组应力状态的叠加，即

$$\sigma_x=\sigma_{x1}+\sigma_{x2}=\sigma_0+\frac{\sigma_0}{2}+\frac{\sigma_0}{2}\cos2\theta=\frac{3}{2}\sigma_0+\frac{\sigma_0}{2}\cos2\theta$$

$$\tau_x=\tau_{x1}+\tau_{x2}=\tau_0-\frac{\sigma_0}{2}\sin2\theta$$

$$\sigma_y=\sigma_{y1}+\sigma_{y2}=\frac{\sigma_0}{2}-\frac{\sigma_0}{2}\cos2\theta$$

将$\sigma_0=40$ MPa，$\tau_0=30$ MPa，$\theta=30°$代入，得

$$\sigma_x=70\text{ MPa},\tau_x=12.7\text{ MPa},\sigma_y=10\text{ MPa}$$

再计算其主应力、主方向和最大切应力

$$\left.\begin{matrix}\sigma'\\\sigma''\end{matrix}\right\}=\left(\frac{70+10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{70-10}{2}\right)^2+12.7^2}\right)\text{ MPa}=(40\pm32.6)\text{ MPa}$$

$$\sigma'=72.6\text{ MPa},\quad\sigma''=7.4\text{ MPa}$$

$$\tan2\alpha_{\mathrm{P}}=-\frac{2\times12.7}{70-10}=-0.423$$

$$\alpha_{\mathrm{P1}}=-11.5°,\quad\alpha_{\mathrm{P2}}=78.5°$$

故M点的主应力、主方向为

$$\sigma_1 = 72.6\ \text{MPa} \qquad \alpha_{P1} = -11.5^\circ$$

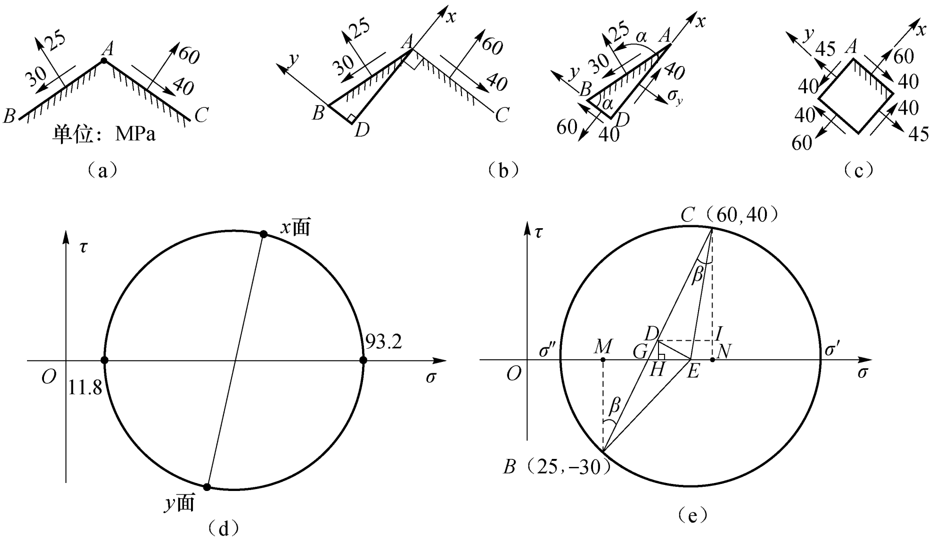
$$\sigma_2 = 7.4\ \text{MPa} \qquad \sigma_{P2} = 78.5^\circ$$

$$\sigma_3 = 0 \qquad \text{所在平面与 } z \text{ 轴垂直}$$

最大切应力$\tau_{max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\dfrac{72.6}{2}$ MPa=36.3 MPa。

注意：叠加原理适用于线弹性小变形的受力状态，本例的两种应力状态进行叠加时，应将两种应力状态的单元体取为同一方位，这样才能将两组应力分量进行代数叠加。

例 2.5 已知受力构件中某点 A 处的两个斜截面 AB 和 AC 上的应力分量如图(a)所示，试求点 A 的主应力和最大切应力，并画出该点的应力圆。



例 2.5 图

解法一：解析法

在 A 点邻域作 AD 垂直于 AC，且 BD 垂直于 AD，令 DA 为 x 轴、DB 为 y 轴建立直角坐标系，切取三角形微元 ABD(图(b))，该三角形微元的 BD 面上应力为$\sigma_x=60$ MPa，$\tau_x=40$ MPa，而 AD 面上应力为σ_y(未知)，$\tau_y=-40$ MPa，设 AB 面方位角为 α，$\sigma_\alpha=25$ MPa，$\tau_\alpha=-30$ MPa，设 AB 面的面积为 $\mathrm{d}A$，列出三角形 ABD 的平衡方程，有

$$\sum F_x = 0, \quad 40\cdot \mathrm{d}A\cdot \sin\alpha - 60\cdot \mathrm{d}A\cdot \cos\alpha + 25\cdot \mathrm{d}A\cdot \cos\alpha - 30\cdot \mathrm{d}A\cdot \sin\alpha = 0$$

$$10\sin\alpha = 35\cos\alpha, \qquad \tan\alpha = 3.5, \qquad \alpha = 74.1^\circ$$

$$\sum F_y = 0, \quad 40\cdot \mathrm{d}A\cdot \cos\alpha - \sigma_y\cdot \mathrm{d}A\cdot \sin\alpha + 25\cdot \mathrm{d}A\cdot \sin\alpha + 30\cdot \mathrm{d}A\cdot \cos\alpha = 0$$

$$\sigma_y = (70\cot\alpha + 25)\ \text{MPa} = 45\ \text{MPa}$$

故 A 点应力状态为(图(c))

$$\sigma_x = 60\ \text{MPa}, \quad \sigma_y = 45\ \text{MPa}, \quad \tau_x = 40\ \text{MPa}$$

由此计算 A 点的主应力

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \left(\frac{60+45}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60-45}{2}\right)^2 + 40^2}\right)\ \text{MPa} = (52.5 \pm 40.7)\ \text{MPa}$$

即

$$\sigma' = 93.2\ \text{MPa}, \quad \sigma'' = 11.8\ \text{MPa}$$

A 点的三个主应力为

$$\sigma_1 = 93.2\ \text{MPa}, \quad \sigma_2 = 11.8\ \text{MPa}, \quad \sigma_3 = 0$$

A 点的最大切应力为

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{93.2}{2}\ \text{MPa}=46.6\ \text{MPa}$$

A 点的应力圆见图(d)。

解法二:图解法

首先根据 AB、AC 斜面上的应力确定出应力圆上的两个点,设 AB 面位于 B 点(25,-30),AC 面位于 C 点(60,40),连接 BC 交 σ 轴于 G 点,作 BC 线段的垂直平分线 DE,交 σ 轴于 E 点,由 B、C 两点分别向 σ 轴作垂线,交 σ 轴于 M、N 两点。以 E 为圆心,EC 为半径可画出应力圆,利用三角形几何关系可求出 $GE=12.5$,$MG=15$,故圆心 E 的横坐标为 $\sigma_E=52.5$,且 $ME=27.5$,因此,应力圆半径 $R=\sqrt{30^2+27.5^2}=40.7$,故

$$\sigma'=(52.5+40.7)\ \text{MPa}=93.2\ \text{MPa}$$

$$\sigma''=(52.5-40.7)\ \text{MPa}=11.8\ \text{MPa}$$

$$\sigma_1=93.2\ \text{MPa},\sigma_2=11.8\ \text{MPa},\sigma_3=0$$

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=46.6\ \text{MPa}$$

注意:分析构件内一点处的应力状态时,应深刻理解用单元体来表示应力状态的基本概念,在一点的无限小邻域内,单元体每一对平行的截面实际上表示的是该点某一方位截面上应力的情况,对平面应力而言,只要一点处相互正交的一对截面上的应力分量已知,该点的应力状态就完全确定了。而如何选择单元体方位并切取单元体,就需要根据点的受力特点及所求未知量灵活选择。

2.5 应变的概念及一点处的应变状态

当物体(可变形体)受到外部作用(如外力作用、温度变化或材料收缩等)时,会发生形状或尺寸的变化,称为**变形**。伴随着变形,物体中某些点的位置会发生移动,某些微元面的方位角会发生转动,统称为**位移**。

在变形体静力学中,物体发生位移时不一定有变形(如物体某一部分发生刚体位移),但物体发生变形时必然会有某些点或某些微元面产生位移。本书中所计算的位移,通常是指由于物体变形而产生的位移。

在一般的受力状态下,物体的变形是很复杂的。就整个物体而言,形状变化与尺寸改变各不相同,千变万化,且物体内不同位置处变形的剧烈程度也不同。但是,如果将整个物体划分为无数个微小单元体,就每一个单元体而言,则变形情况就比较单纯。

在直角坐标系中,描述一个单元体的变形,只需用两组物理量,一组是单元体长宽高三个方向上棱边尺寸的变化,一组是单元体相邻两棱边夹角的改变。每个单元体的变形都描述清楚了,整个物体的变形状态也就清楚了。因此,首先要导出衡量单元体变形的基本物理量,即正应变和切应变。

首先研究单元体在单向应力状态下的变形(图 2.19),设物体内部某点的单元体变形前各棱边长为 Δx、Δy、Δz,因受 x 方向的正应力 σ 作用发生变形,各棱边长度分别改变了 Δu、Δv、Δw,称为三个方向的线变形,即线段长度的绝对改变量。线变形以伸长为正,缩短为负。在图 2.19 中,Δu 为伸长变形,其值为正,而 Δv、Δw 都是缩短变形,故其值为负。但是线变形这一物理量不表示该方向线段变形的剧烈程度,因

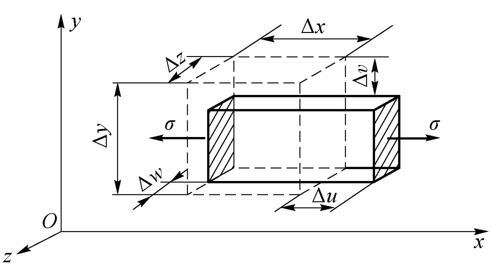


图 2.19　单向应力状态时单元体的变形

为它的大小与线段原始长度有关。描述变形程度的物理量应为平均线变形的极限值，称为**正应变**，用 ε 加以下标表示

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{2.29}$$

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} \tag{2.30}$$

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{2.31}$$

正应变为无量纲量，符号与线变形的符号一致，即伸长变形时正应变为正，反之为负。

上述微小单元体的另一种变形情况是受到切应力 τ 的作用(图 2.20)，其一对侧面发生相对错动而使变形前互相垂直的两棱边所夹直角减小了 γ，这一角度减小量称为**切应变**，以弧度表示。由图 2.20 可以看出，切应变 γ 应为棱边 Δy 向 x 方向转过的角度 γ' 以及棱边 Δx 向 y 方向转过的角度 γ'' 之和。以下标表示这一 γ 为 Δx 和 Δy 两条棱边夹角的直角减小量，记为 γ_{xy} 或 γ_{yx}，在小变形情况下有

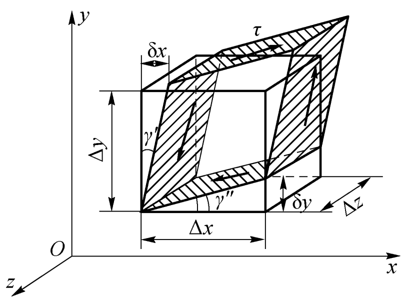


图 2.20　纯剪切时切应变

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\delta x}{\Delta y} + \frac{\delta y}{\Delta x} \tag{2.32}$$

同理，另外两组棱边 Δy 与 Δz 及 Δz 与 Δx 所组成的直角的减小量分别为

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\delta y}{\Delta z} + \frac{\delta z}{\Delta y} \tag{2.33}$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\delta z}{\Delta x} + \frac{\delta x}{\Delta z} \tag{2.34}$$

至此，式(2.29)～式(2.31)和式(2.32)～式(2.34)给出的两组物理量统称为**一点处的应变**，它们可以用来描述某点处任意变形状态单元体的变形程度，但与该点所取微小体积元的绝对尺寸无关。一个物体是由许许多多的微小体积元组合而成的，每一点处的应变与该点处微小体积元的相应尺寸相乘可得出该微小体积元的变形。将所有微小体积元的变形累积起来就得出整个物体总的变形。因此，物体中每一点的三个方向上的正应变及三对方向上的切应变是构成物体变形的基本元素，并且这 6 个元素以下列方式排列起来就构成与应力张量类似的二阶**应变张量**，记为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

由式(2.32)～式(2.34)可知应变张量也是一个二阶对称张量。这里应注意的是应变张量的非主对角线元素是相应切应变的一半。其中因数 1/2 保证了应变张量的各个分量在坐标转换时依二阶张量的变换规律而变换。因此，一点处的应变状态与应力状态一样，也是由一个二阶对称

张量来描述的。

在实际工程构件中，很多点都处于平面应力状态。这时该点的应变状态亦可只由同一平面(例如 $x-y$ 平面)内的相应应变分量来描述，即应变张量可写为二维形式的矩阵

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y\end{bmatrix} \tag{2.36}$$

同样有

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx} \tag{2.37}$$

2.6 平面应力状态下的应变分析

当受力构件中的某点处于平面应力状态时，通常采用工程记号表示应力分量。同样，在平面应力状态下单元体的应变也采用工程记号表示。

工程上应变分量的表示方法是：正应变分量 ε_x 和 ε_y 仍然是以拉伸为正；切应变 γ_x 表示 x 正向线元与 y 正向线元构成的直角变形后的增大量，即直角变大为正，这恰好与 γ_{xy} 的正负号规定相反，故有 $\gamma_x=-\gamma_{xy}$。应变分量的工程记号与应力分量的工程记号也是一致的。

若记从 x 轴起逆时针转动 α 角方向上的正应变为 ε_α，沿 α 方向和 $\alpha+90°$ 方向的线元构成的直角变形后的增大量为切应变 γ_α，则平面应力状态下应力分析的公式，都可以作一简单的代换类比得出应变分析公式，即用 ε_x、ε_y、ε_α 代替 σ_x、σ_y、σ_α，用 $\frac{\gamma_x}{2}$、$\frac{\gamma_\alpha}{2}$ 代替 τ_x、τ_α 后，有

$$\varepsilon_\alpha=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha-\frac{\gamma_x}{2}\sin 2\alpha \tag{2.38}$$

$$\gamma_\alpha=(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin 2\alpha+\gamma_x\cos 2\alpha \tag{2.39}$$

与应力圆对应，也可在 $\varepsilon_\alpha-\frac{1}{2}\gamma_\alpha$ 坐标系中画出一点的应变圆。画图方法和分析结论都和应力圆类似。

对于工程实际中很多处于平面应力状态的构件来说，经常要测定一点处的应变状态 ε_x、ε_y 和 γ_x 三个分量，其中正应变分量 ε_x、ε_y 可以用电阻应变片(通常由金属丝绕制而成)贴于该点相应方向上测出，但切应变分量很难直接测出。所以在实际测量中，一般采用只测正应变的办法，即在某点处测量三个事先选定的方向 α_1、α_2、α_3 上的正应变 ε_{α_1}、ε_{α_2}、ε_{α_3}，利用式(2.38)得到三个方程式，经化简后可得

$$\begin{cases}\varepsilon_{\alpha_1}=\dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha_1-\dfrac{1}{2}\gamma_x\sin 2\alpha_1\\ \varepsilon_{\alpha_2}=\dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha_2-\dfrac{1}{2}\gamma_x\sin 2\alpha_2\\ \varepsilon_{\alpha_3}=\dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha_3-\dfrac{1}{2}\gamma_x\sin 2\alpha_3\end{cases} \tag{2.40}$$

解此方程组可求出 ε_x、ε_y、γ_x，这就得到了该点的应变状态。实测时，α_1、α_2 和 α_3 常选取为便于计算的角度，如分别取 α_1、α_2、α_3 为 0°、45°、90°(图 2.21)或 0°、60°、120°(图 2.22)，这样一组夹角固定的应变片常称为“应变花”。