第 2 章　向量空间与矩阵

2.1　向量与矩阵

n 维列向量定义为含有 n 个数的数组，记为

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

a_i表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的第 i 个元素。定义 $\mathbb{R}$ 为全体实数组成的集合，那么由实数组成的 n 维列向量可表示为 $\mathbb{R}^n$，称为 n 维实数向量空间。通常将 $\mathbb{R}^n$ 的元素用小写粗体字母表示（如 $\boldsymbol{x}$）。向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 中的元素记为 x_1，…，x_n。

n 维行向量记为

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$

行向量 $\boldsymbol{a}$ 的转置记为 $\boldsymbol{a}^\top$。比如，如果

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

那么

$$\boldsymbol{a}^\top=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$

相应的，可以记为 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^\top$。在本书中，如果不进行特别说明，只要提到向量，均指列向量。

给定向量 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^\top$和 $\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^\top$，如果 $a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$，那么这两个向量相等。

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，计算方式为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]^\top$$

向量的相加运算具有如下性质：

1. 交换性 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；
2. 结合性 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；
3. 存在零向量

$$\boldsymbol{0}=[0,0,\cdots,0]^\top$$

使得

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

向量$[a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n]^\top$称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。向量 $\mathbf{0}-\boldsymbol{b}$ 记为 $-\boldsymbol{b}$，有以下公式成立：

$$\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$$
$$-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$$
$$-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 是向量方程 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的唯一解。假定 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^\top$ 是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，那么有

$$\begin{gathered}a_1+x_1=b_1\\a_2+x_2=b_2\\\vdots\\a_n+x_n=b_n\end{gathered}$$

从而有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ 与标量 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的乘积定义为

$$\alpha\boldsymbol{a}=[\alpha a_1,\alpha a_2,\cdots,\alpha a_n]^\top$$

该运算符具有如下性质：

1. 分配性：对于任意实数 α 和 β，有

$$\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$$
$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$$

2. 结合性

$$\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$$

3. 标量 1 满足

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

4. 任意标量 α 满足

$$\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

5. 标量 0 满足

$$0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$$

6. 标量 -1 满足

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

注意，当且仅当 $\alpha=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 时，$\alpha\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$。可以看出，$\alpha\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 等价于 $\alpha a_1=\alpha a_2=\cdots=\alpha a_n=0$。如果 $\alpha=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，那么有 $\alpha\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$。如果 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，那么至少其中一个元素 $a_k\neq0$。对于此元素，$\alpha a_k=0$，因此必定有 $\alpha=0$。类似地，可证明 $\alpha\neq0$ 时，必有 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$。

如果方程

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k=\mathbf{0}$$

中所有的系数 $\alpha_i(i=1,\cdots,k)$ 都等于零，那么称向量集 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k\}$ 是线性无关的。

如果向量集$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$不是线性无关的，那么称其为线性相关的。

如果集合中只包括一个向量$\mathbf{0}$，由于对于任意$\alpha \neq 0$，都有$\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$，因此，该集合是线性相关的。实际上，所有包含$\mathbf{0}$向量的集合都是线性相关的。

如果集合中只包括单个非零向量$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$，只有$\alpha=0$时，才有$\alpha\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$成立，因此，该集合是线性无关的。

给定向量$\boldsymbol{a}$，如果存在标量$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$，使得

$$\boldsymbol{a}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k$$

那么称向量$\boldsymbol{a}$为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$的线性组合。

命题 2.1　向量集$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$是线性相关的，当且仅当集合中的一个向量可以表示为其他向量的线性组合。□

证明：必要性。如果$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$是线性相关的，那么有

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k=\mathbf{0}$$

其中至少存在一个标量$\alpha_i \neq 0$，从而有

$$\boldsymbol{a}_i=-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\boldsymbol{a}_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_i}\boldsymbol{a}_2-\cdots-\frac{\alpha_k}{\alpha_i}\boldsymbol{a}_k$$

充分性。假定向量$\boldsymbol{a}_1$可以被表示为其他向量的线性组合：

$$\boldsymbol{a}_1=\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\alpha_3\boldsymbol{a}_3+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k$$

那么有

$$(-1)\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k=\mathbf{0}$$

因为第 1 个标量非零，所以向量集$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$是线性相关的。类似地，如果将$\boldsymbol{a}_i$，$i=2, \cdots, k$表示为其他向量的线性组合，也可以得到同样的结论。■

令$\mathcal{V}$表示$\mathbb{R}^n$的一个子集，如果$\mathcal{V}$在向量加和运算及标量乘积运算下是封闭的，那么称$\mathcal{V}$为$\mathbb{R}^n$的子空间。也就是说，如果$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是$\mathcal{V}$中的向量，那么$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\alpha\boldsymbol{a}$($\alpha$是任意标量)也是$\mathcal{V}$中的向量。

每个子空间都包含零向量$\mathbf{0}$，这是因为如果$\boldsymbol{a}$是子空间的一个元素，那么有$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，因此，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$也属于该子空间。

假定$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$是$\mathbb{R}^n$中的任意向量，它们所有线性组合的集合称为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$张成的子空间，记为

$$\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k]=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{a}_i : \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}$$

对于向量$\boldsymbol{a}$，子空间$\operatorname{span}[\boldsymbol{a}]$由向量$\alpha\boldsymbol{a}$组成，$\alpha$为任意实数($\alpha \in \mathbb{R}$)。同样，如果$\boldsymbol{a}$可表示为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$的线性组合，则有

$$\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}]=\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k]$$

因此，任意向量集合都能够张成一个子空间。

给定子空间$\mathcal{V}$，如果存在线性无关的向量集合$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\} \subset \mathcal{V}$使得$\mathcal{V}=\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k]$，那么称$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$是子空间$\mathcal{V}$的一组基。子空间$\mathcal{V}$中的所有基都包含相同数量的向量，这一数量称为$\mathcal{V}$的维数，记为$\dim\mathcal{V}$。

命题 2.2 如果$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$是$\mathcal{V}$的一组基，那么$\mathcal{V}$中的任意向量$\boldsymbol{a}$可以唯一地表示为

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$$

其中，$\alpha_i \in \mathbb{R}$，$i = 1, 2, \cdots, k$。 □

证明： 假定$\boldsymbol{a}$可以表示为以下两种形式：

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$$

或

$$\boldsymbol{a} = \beta_1\boldsymbol{a}_1 + \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \beta_k\boldsymbol{a}_k$$

只需证明$\alpha_i = \beta_i (i = 1, \cdots, k)$即可。

已知

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \beta_1\boldsymbol{a}_1 + \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \beta_k\boldsymbol{a}_k$$

该式可以改写为

$$(\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

因为集合$\{\boldsymbol{a}_i, i = 1, 2, \cdots, k\}$是线性无关的，所以有$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_k - \beta_k = 0$，从而可得$\alpha_i = \beta_i$，$i = 1, \cdots, k$。 ■

给定$\mathcal{V}$的一组基$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$和向量$\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，如果

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$$

那么系数α_i，$i = 1, \cdots, k$称为$\boldsymbol{a}$对应于基$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$的坐标。

$\mathbb{R}^n$的标准基为

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在标准基下，向量$\boldsymbol{x}$可表示为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

这就是称其为“标准基”的原因。

可按照类似的方式定义复向量空间。令$\mathbb{C}$表示复数集合，$\mathbb{C}^n$表示n维复数向量。可以看出，集合$\mathbb{C}^n$具有与$\mathbb{R}^n$类似的属性，其中标量可以取复数。

矩阵指的是行列数组，通常用大写粗体字母表示(如$\boldsymbol{A}$)。m行n列矩阵称为$m \times n$矩阵，记为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

位于矩阵第 i 行第 j 列的实数 a_{ij} 称为矩阵的第(i, j)个元素。如果认为 $\boldsymbol{A}$ 是由 n 个列向量组成的，那么它的每列都是 $\mathbb{R}^m$ 空间的一个列向量。类似地，如果认为 $\boldsymbol{A}$ 是由 m 个行向量组成的，那么它的每行都是一个 n 维的行向量。

考虑 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，其转置 $\boldsymbol{A}^\top$ 则是一个 $n\times m$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A}^\top=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的列是 $\boldsymbol{A}^\top$ 的行，反之亦然。

符号 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合，矩阵中的每个元素都是实数。$\mathbb{R}^n$ 中的列向量可视为 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 中的某个元素。类似地，可以将 n 维行向量视为 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 中的元素。因此，向量的转置可以认为是矩阵转置的特殊形式，因此不对它们进行区分。需要注意的是，行向量与 $1\times n$ 的矩阵记号间存在少许差别：用逗号来分割行向量中的不同元素，而在矩阵中通常不使用逗号。但是，在同一行中使用逗号作为分割符号，区分效果比较明显，因此，在位于多个矩阵同一行时，有时候也会利用逗号进行分割。

2.2　矩阵的秩

考虑 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的第 k 列用 $\boldsymbol{a}_k$ 表示：

$$\boldsymbol{a}_k=\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中线性无关列的最大数目称为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 rank $\boldsymbol{A}$。可以看出，rank $\boldsymbol{A}$ 正是 span$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ 的维数。

命题 2.3　在以下运算中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩保持不变：

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某个(些)列乘以非零标量；
2. 矩阵内部交换列次序；
3. 在矩阵中加入一列，该列是其他列的线性组合。□

证明：

1. 令 $\boldsymbol{b}_k=\alpha_k\boldsymbol{a}_k$，其中 $\alpha_k\neq 0$，$k=1, \cdots, n$，再令 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n]$，显然有

$$\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]=\operatorname{span}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n]$$

因此,

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$$

2. 线性无关向量的数目不依赖于它们的次序。
3. 令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_1&=\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{b}_2&=\boldsymbol{a}_2,\\ &\vdots\\ \boldsymbol{b}_n&=\boldsymbol{a}_n\end{aligned}$$

对于任意的 α_1, $\cdots$, α_n, 有

$$\alpha_1\boldsymbol{b}_1+\alpha_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{b}_n=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+(\alpha_2+\alpha_1c_2)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(\alpha_n+\alpha_1c_n)\boldsymbol{a}_n$$

因此

$$\operatorname{span}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n]\subset\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$$

另外有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1&=\boldsymbol{b}_1-c_2\boldsymbol{b}_2-\cdots-c_n\boldsymbol{b}_n\\ \boldsymbol{a}_2&=\boldsymbol{b}_2\\ &\vdots\\ \boldsymbol{a}_n&=\boldsymbol{b}_n\end{aligned}$$

从而可得,

$$\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]\subset\operatorname{span}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n]$$

因此, $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$。 ■

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数等于列数(即 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵), 那么该矩阵称为方阵。行列式是与每个方阵 $\boldsymbol{A}$ 相对应的一个标量, 记为 $\det\boldsymbol{A}$ 或 $|\boldsymbol{A}|$。方阵的行列式是各列的函数, 具有如下性质:

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$ 的行列式是各列的线性函数, 即对于任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{a}_k^{(1)},\boldsymbol{a}_k^{(2)}\in\mathbb{R}^n$, 都有

$$\begin{aligned}&\det[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1},\alpha\boldsymbol{a}_k^{(1)}+\beta\boldsymbol{a}_k^{(2)},\boldsymbol{a}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n]\\ &=\alpha\det[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1},\boldsymbol{a}_k^{(1)},\boldsymbol{a}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n]\\ &\quad+\beta\det[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1},\boldsymbol{a}_k^{(2)},\boldsymbol{a}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n]\end{aligned}$$

2. 如果对于某个 k, 有 $\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{a}_{k+1}$, 那么有

$$\det\boldsymbol{A}=\det[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n]=\det[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k,\cdots,\boldsymbol{a}_n]=0$$

3. 令

$$\boldsymbol{I}_n=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n]=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

其中$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，则有

$$\det \boldsymbol{I}_n = 1$$

注意，如果性质 1 中 $\alpha=\beta=0$，那么有

$$\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n] = 0$$

因此，如果其中一列为 $\boldsymbol{0}$，那么该矩阵的行列式等于零。

如果在矩阵的一列中加上另外一列与某个标量的乘积，行列式的值不会发生改变。该性质可利用性质 1 和性质 2 进行证明：

$$\begin{aligned}
&\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_k + \alpha\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \\
&\quad = \det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \\
&\qquad + \alpha\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \\
&\quad = \det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]
\end{aligned}$$

但是，如果交换矩阵内的列次序，行列式的符号将发生改变：

$$\begin{aligned}
&\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \\
&\quad = \det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \\
&\quad = \det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{a}_{k+1} - (\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{k+1}), \cdots, \boldsymbol{a}_n] \\
&\quad = \det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{k+1}, -\boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \\
&\quad = -\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \\
&\quad = -(\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n] + \det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n]) \\
&\quad = -\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n]
\end{aligned}$$

给定 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，其 p 阶子式是一个 $p\times p$ 矩阵的行列式，该 $p\times p$ 矩阵由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 去掉 $m-p$ 行和 $n-p$ 列获得的，其中 $p\leqslant\min\{m, n\}$，$\min\{m, n\}$表示 m 和 n 中较小的一个。

可以利用子式来研究矩阵的秩。特别的，有如下命题成立：

命题 2.4　如果一个 $m\times n(m\geqslant n)$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有非零的 n 阶子式，那么 $\boldsymbol{A}$ 的各列是线性无关的，即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$。　□

证明：假定 $\boldsymbol{A}$ 具有非零的 n 阶子式。不失一般性，假定 $\boldsymbol{A}$ 对应的 n 阶子式的前 n 行是非零的。令 $x_i(i=1, \cdots, n)$ 为满足等式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

的一组标量。

上式可等价写成如下的 m 个方程

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

对于 $i=1, \cdots, n$，令

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{bmatrix}$$

那么有 $x_1\tilde{\boldsymbol{a}}_1+\cdots+x_n\tilde{\boldsymbol{a}}_n=\boldsymbol{0}$。

假定 n 阶子式 $\det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n]$ 非零。由行列式的性质可知，列 $\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n$ 是线性无关的，故有 $x_i=0$，$i=1, \cdots, n$。由此可知，列 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是线性无关的。

■

由该命题可知，如果矩阵存在一个非零子式，那么与非零子式相对应的列都是线性无关的。

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 r 阶子式 $|\boldsymbol{M}|$，具备以下性质：1) $|\boldsymbol{M}|\neq 0$；2) 从 $\boldsymbol{A}$ 中再抽取一行和一列，增加到 $\boldsymbol{M}$ 中，由此得到的新子式为零。那么有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于它的非零子式的最高阶数。

一个非奇异(可逆)的矩阵是一个行列式非零的方阵。假定 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 方阵，$\boldsymbol{A}$ 是非奇异的，当且仅当存在 $n\times n$ 方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$$

其中，$\boldsymbol{I}_n$ 表示 $n\times n$ 单位矩阵：

$$\boldsymbol{I}_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

2.3 线性方程组

给定包含 n 个未知量的 m 个方程：

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\&\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}$$

该方程组可以表示为向量等式：

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\ \vdots\\a_{mj}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

可将该方程组写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵：

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$$

增广矩阵定义为

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}]$$

未知数向量为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

定理 2.1　方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，当且仅当

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$$ □

证明：必要性。方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，意味着 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中各列的线性组合，即存在 x_1，…，x_n，使得 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$。可知 $\boldsymbol{b}$ 属于 $\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$，从而有

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\boldsymbol{A}&=\dim\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n]\\&=\dim\operatorname{span}[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}]\\&=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]\end{aligned}$$

充分性。假定 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=r$，其中 $\boldsymbol{A}$ 中线性无关的列数为 r。不失一般性，令 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_r$ 表示这些线性无关列。由于 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=r$，那么 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$ 的其他列可以表示为 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_r$ 的线性组合，因此，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_r$ 也是矩阵 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$ 的线性无关列。$\boldsymbol{b}$ 也可以表示为这些列的线性组合。因此，存在 x_1，…，x_n，使得 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$。■

定理 2.2　考虑方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=m$。可以通过为 $n-m$ 个未知数赋予任意值并求解其他未知数来获得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解。□

证明：已知 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=m$，因此总可以找到 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个线性无关列。不失一般性，令 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$ 表示这些线性无关列。方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可以重写为

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}-x_{m+1}\boldsymbol{a}_{m+1}-\cdots-x_n\boldsymbol{a}_n$$

为 x_{m+1}，x_{m+2}，…，x_n 赋予任意值，假定

$$x_{m+1}=d_{m+1},\ x_{m+2}=d_{m+2},\ \cdots,\ x_n=d_n$$

令

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m]\in\mathbb{R}^{m\times m}$$

注意 $\det\boldsymbol{B}\neq0$。上面的方程组可以表示为

$$\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}=[\boldsymbol{b}-d_{m+1}\boldsymbol{a}_{m+1}-\cdots-d_n\boldsymbol{a}_n]$$

由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是可逆的，因此可以求得$[x_1, x_2, \cdots, x_m]^\top$：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{b} - d_{m+1}\boldsymbol{a}_{m+1} - \cdots - d_n\boldsymbol{a}_n]$$

■

2.4 内积和范数

实数 a 的绝对值记为$|a|$，定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

有如下公式成立：

1. $|a| = |-a|$。
2. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$。
3. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$。
4. $||a| - |b|| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|$。
5. $|ab| = |a||b|$。
6. 如果$|a| \leqslant c$ 且$|b| \leqslant d$，那么有$|a+b| \leqslant c+d$。
7. 不等式$|a| < b$ 等价于 $-b < a < b$(即 $a < b$ 且 $-a < b$)。如果将式中所有的“$<$”用“$\leqslant$”代替，也有同样的结论成立。
8. 不等式$|a| > b$ 等价于 $a > b$ 或 $-a > b$。如果将式中所有的“$>$”用“$\geqslant$”代替，也有同样的结论成立。

对于 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，定义欧式内积为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y}$$

内积是一个实值函数$\langle \cdot, \cdot \rangle$：$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，具有如下性质：

1. 非负性：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$。
2. 对称性：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$。
3. 可加性：$\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$。
4. 齐次性：对于任意 $r \in \mathbb{R}$，总有$\langle r\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = r\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$成立。

内积式中的第 2 个向量也满足可加性和齐次性，即

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$$
$$\langle \boldsymbol{x}, r\boldsymbol{y} \rangle = r\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \quad \text{任意 } r \in \mathbb{R}$$

这可以利用内积的性质 2 和性质 4 来证明。实际上，

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \end{aligned}$$

并且

$$\langle \boldsymbol{x}, r\boldsymbol{y}\rangle = \langle r\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = r\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = r\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$$

可以定义 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的其他实值函数满足上述性质 1 到 4(见习题 2.8)。欧式内积的一些性质也适用于其他形式的内积。

给定向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，如果 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$，那么称 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是正交的。

向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧式范数定义为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$$

定理 2.3　柯西–施瓦茨不等式。对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，有柯西–施瓦茨不等式

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

成立。进一步，当且仅当对于某个 $\alpha \in \mathbb{R}$ 有 $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$ 时，该不等式的等号成立。 □

证明：首先假定 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是单位向量，即 $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$，那么有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &= 2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \end{aligned}$$

即

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \leqslant 1$$

当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 时，等号成立。

其次，假定 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 都是非零向量(当其中一个为零时，显然不等式成立)，可以用单位向量 $\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|$ 和 $\boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{y}\|$ 替换 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$。那么，利用性质 4，有

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

用 $-\boldsymbol{x}$ 取代 $\boldsymbol{x}$，重新应用性质 4，有

$$-\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

这两个不等式意味着绝对值不等式成立。当且仅当 $\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\| = \pm \boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{y}\|$ 时，即对于某个 $\alpha \in \mathbb{R}$ 有 $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$ 时，等号成立。 ■

向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧式范数 $\|\boldsymbol{x}\|$ 具有如下性质：

1. 非负性：$\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\| = 0$；
2. 齐次性：$\|r\boldsymbol{x}\| = |r|\,\|\boldsymbol{x}\|$，$r \in \mathbb{R}$；
3. 三角不等式：$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$。

三角不等式可以利用柯西–施瓦茨不等式来证明。已知

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

根据柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &\leqslant \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 \end{aligned}$$

因此有

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$$

可以看出，如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是正交的，即$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle=0$，那么有

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$$

这是 $\mathbb{R}^n$ 中的毕达哥拉斯定理。

欧式范数是通用向量范数的一个特例，通用向量范数是满足非负性、齐次性和三角不等式的任意函数。$\mathbb{R}^n$ 中向量范数有很多种不同的定义方式，包括 1 范数(定义为 $\|\boldsymbol{x}\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|$)和$\infty$ 范数(定义为 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_i|x_i|$，$\max_i$表示对于所有 i，取向量元素中最大的一项)。通常，欧式范数指 2 范数，记为 $\|\boldsymbol{x}\|_2$。以上范数均是 p 范数的特例，p 范数为

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\begin{cases}(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty\\ \max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}, & p=\infty\end{cases}$$

下面利用范数来定义连续函数。如果对于所有的 $\varepsilon>0$，都存在一个 $\delta>0$，使得 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|<\delta\Rightarrow\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|<\varepsilon$，那么函数$\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 是连续的。如果函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的任意点都是连续的，称该函数在 $\mathbb{R}^n$ 中是连续的。注意，函数向量$\boldsymbol{f}=[f_1,\cdots,f_m]^\top$是连续的，当且仅当它的每个元素$f_i(i=1,\cdots,m)$是连续的。

对于复数空间 $\mathbb{C}^n$，内积$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$定义为 $\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i$，上画线表示共轭。$\mathbb{C}^n$ 上的内积是一个复值函数，具有如下性质：

1. $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geqslant0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=0$。
2. $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\overline{\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle}$。
3. $\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$。
4. $\langle r\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=r\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$，其中 $r\in\mathbb{C}$。

利用性质 1 至性质 4，可以推导出其他一些性质，如

$$\langle\boldsymbol{x},r_1\boldsymbol{y}+r_2\boldsymbol{z}\rangle=\bar{r}_1\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\bar{r}_2\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle$$

其中 $r_1, r_2\in\mathbb{C}$。对于 $\mathbb{C}^n$，向量范数可以类似的定义为 $\|\boldsymbol{x}\|^2=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle$。关于复数空间中范数的更多信息，可参阅 Gel’fand 的著作[47]。

习题

2.1 矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$且 rank $\boldsymbol{A}=m$，试证明 $m\leqslant n$。

2.2 试证明方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$具有唯一解的充要条件是 rank $\boldsymbol{A}$ = rank $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=n$。

2.3 (改编自参考文献[38])已知如果 $k\geqslant n+1$，那么向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k\in\mathbb{R}^n$ 是线性相关的；即存在一组标量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，至少有一个 $\alpha_i\neq0$ 使得 $\sum_{i=1}^k\alpha_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$ 成立。试证明如果 $k\geqslant n+2$，那么存在一组标量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，使得至少有一个 $\alpha_i\neq0$，使得 $\sum_{i=1}^k\alpha_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$ 成立，且 $\sum_{i=1}^k\alpha_i=0$。

2.4 考虑一个 $m\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$，它具有如下形式

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{m-k,k} & \boldsymbol{I}_{m-k}\\ \boldsymbol{M}_{k,k} & \boldsymbol{O}_{k,m-k}\end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{M}_{k,k}$是 $k\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{M}_{m-k,k}$是$(m-k)\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{I}_{m-k}$是$(m-k)\times(m-k)$的单位矩阵，$\boldsymbol{O}_{k,m-k}$是 $k\times(m-k)$的零矩阵。

a. 试证明

$$|\det \boldsymbol{M}| = |\det \boldsymbol{M}_{k,k}|$$

提示：可参照命题 19.1 的证明过程。

b. 在某些特定的条件下，有以下更强的结论成立：

$$\det \boldsymbol{M} = \det(-\boldsymbol{M}_{k,k})$$

试指出该结论成立的条件，并说明在大部分条件下该结论并不成立。

2.5　已知对于任意的 a，b，c，$d\in\mathbb{C}$，有

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

假定 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 为同样维数的实数或复数方阵。试讨论使下式成立的充分条件：

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \boldsymbol{AD} - \boldsymbol{BC}$$

关于方阵行列式的详细讨论可参见参考文献[121]。

2.6　给定线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 &= -2 \end{aligned}$$

请利用定理 2.1 判断该方程组是否有解。然后，利用定理 2.2 的方法求取该方程组的解。

2.7　证明实数绝对值的 7 个性质。

2.8　函数$\langle\cdot,\cdot\rangle_2$：$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义为$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_2 = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_2$，其中，$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^\top$，$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2]^\top$。试证明$\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ 满足内积的 4 个性质。

注：该习题是习题 3.21 的一个特例。

2.9　试证明，对于任意两个向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，有 $\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| \leqslant \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$。

提示：可将 $\boldsymbol{x}$ 改写为 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}$，利用三角不等式进行证明。对 $\boldsymbol{y}$ 进行类似转换，也能完成证明。

2.10　利用习题 2.9 的结论证明范数 $\|\cdot\|$ 是一致连续函数，即对所有的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，如果 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| < \delta$，则有 $\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| < \varepsilon$。