

第 1 章 通信原理基础理论

1.1 引 言

人类的社会活动总离不开消息的传递和交换。古代的消息树、烽火台和驿马传令，以及现代社会的文字、书信、电报、电话、广播、电视、网络等，这些都是消息传递的方式或信息交流的手段。可见，消息（message）是人类物质或精神状态的一种反映，在不同的时期具有不同的表现形式。人们接收消息，关心的是消息中所包含的人们原来未知而待知的内容，即信息（information）。因此，通信的根本目的在于传递消息中所包含的信息。通信从本质上讲是信息传递功能的一门科学技术。

实现通信的方式和手段很多，人们可以利用旗帜、消息树、烽火台、手势等“非电”方式进行信息传输，也可以利用电报、电话、广播、电视、遥控、遥测、因特网和计算机网等“电”方式进行通信。它是消息的物质载体，即消息是载荷在电信号的某一参量上的。例如，可以利用信号的振幅来传递消息。

通信的目的是交换不同地点的消息。例如，将地点 A 的消息传输到地点 B，或者反过来将地点 B 的消息传输到地点 A。待传输的消息可以是语言、文字、图像或者数据等。消息在发送端首先被变换为各种形式的电信号，然后经过各种各样的电信道（如有线通信中的明线、电缆，无线通信中的短波、微波等）传输到接收端，接收端再把接收到的电信号还原为与发送端相同或尽可能相同的消息。将各种通信系统和设备中消息传输的完整过程高度概括，就可以得到通信系统的一般模型。

1.1.1 通信系统的一般模型

实现信息传递所需的一切技术设备和传输媒质的总和称为通信系统。通信系统的一般模型如图 1.1.1 所示。

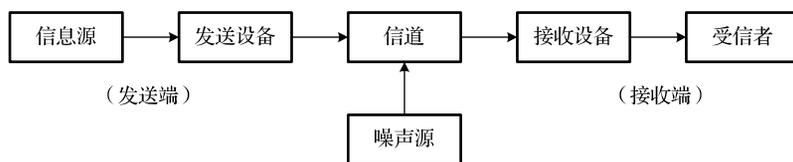


图 1.1.1 通信系统的一般模型

图 1.1.1 中各部分的功能简述如下。

1. 信息源

信息源（简称信源）是消息的产生地，其作用是把各种消息转换成原始电信号。根据信息源输出信号的特征不同可分为模拟信源和数字信源。模拟信源输出模拟信号，如话筒（将人的声音转换为音频信号）、摄像机（将图像转换为视频信号）；数字信源则输出数字信号，

如电传机（将键盘字符转换为数字信号）、计算机等各种数字终端。信息源产生信息的种类和速率不同，因而对传输系统的要求也各不相同。

2. 发送设备

发送设备是将信源产生的消息信号变换成适合在信道中传输的信号，其作用是使发送信号的特性和信道特性相匹配，具有抗信道干扰的能力，并且具有足够大的功率以满足远距离传输的需要。因此，发送设备是一个总体概念，它涵盖的内容很多，可能包含变换、放大、滤波、调制、编码、保密等过程。对于多路传输系统，发送设备中还包括多路复用器。

3. 信道

信道是传输信号的物理媒质，用来将来自发送设备的信号传送到接收端。常用的信道有架空明线、电缆、光纤等有线信道和中长波、短波、微波等无线信道。信道既给信号提供传输的通路，也会对信号产生各种干扰和噪声。信道的固有特性及引入的干扰与噪声直接关系到通信的质量。

4. 噪声源

噪声主要来自于信道，发送设备和接收设备中也有一定的噪声。为了便于描述，把噪声源视为通信系统中各处噪声的集中表现而抽象加入到信道。噪声通常是随机的、形式多样的，它的出现干扰了正常信号的传输。

5. 接收设备

接收设备的基本功能是完成发送设备的反变换，即进行解调、译码、解密等。它的任务是从带有干扰的接收信号中正确恢复出相应的原始基带电信号。

6. 受信者

受信者是传输信息的归宿点，其作用是将恢复的原始基带电信号转换成相应的消息，如扬声器等。

1.1.2 模拟信号与数字信号

在电通信系统中，消息的传递是载荷在电信号的某一参量上的（如连续波的幅度、频率或相位；脉冲波的幅度、宽度或位置）。依据电信号参量的取值方式不同，可以把信号分为两类：模拟信号和数字信号。判断一个信号是模拟信号还是数字信号，关键在于确定携带消息的信号参量是哪个物理量，然后再根据物理量的取值状态进行判断。

（1）模拟信号：携带消息的信号参量取值连续无限，如图 1.1.2 所示的话音信号(a)和抽样信号(b)。由图可见，随着时间的变化，信号的幅度在变，因此可以确定携带消息的信号参量是信号的幅度。无论是话音信号还是抽样信号，幅度的取值状态都是连续无限的，不同的是，前者是时间连续信号，后者是时间离散信号。

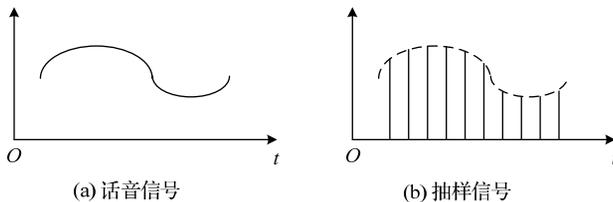


图 1.1.2 模拟信号

(2) 数字信号：携带消息的信号参量取值离散有限，如图 1.1.3 所示的二进制信号(a)和 2PSK 信号(b)。在图 1.1.3(a)中，携带消息的物理参量是矩形波的幅度，幅度只有两种状态的变化；在图 1.1.3(b)中，携带消息的物理参量是正弦波的相位，相位只有 0 和 π 两种状态的变化。因此，它们均属于数字信号，并且都是时间连续信号。

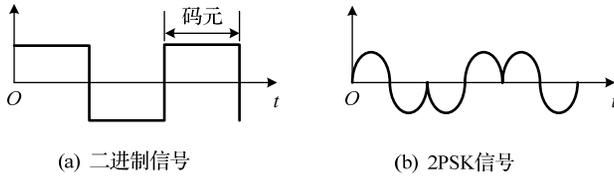


图 1.1.3 数字信号

1.1.3 模拟通信系统与数字通信系统

通常，按照信道中传输的是模拟信号还是数字信号，相应地把通信系统分为模拟通信系统和数字通信系统。模拟通信系统是利用模拟信号来传递消息的通信系统，其模型如图 1.1.4 所示。

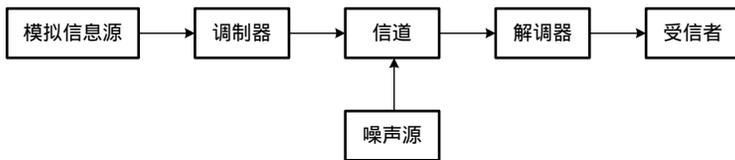


图 1.1.4 模拟通信系统模型

在模拟通信系统中，通常包含两种重要变换。第一种变换：信息源将模拟消息转换成原始电信号，并在接收端进行相反的变换，这种变换和反变换由信源和受信者来完成。这里所说的原始电信号通常称为基带信号，基带的含义是信号的频谱从零频附近开始，频率都比较低，如话音信号的频率范围为 $300\sim 3400$ Hz，图像信号的频率范围为 $0\sim 6$ MHz。有些信道可以直接传输基带信号，而以自由空间作为信道的无线电传输却无法直接传输这些基带信号。因此，模拟通信系统中常常需要进行第二种变换：把基带信号变换成适合在信道中传输的信号，并在接收端完成反变换。完成这种变换和反变换的通常是调制器和解调器。经过调制以后的信号称为已调信号，它应具有两个基本特征：一是携带信息；二是适宜在信道中传输。由于已调信号的频谱通常具有带通形式，因而已调信号又称为带通信号或频带信号。

数字通信系统是利用数字信号来传递信息的通信系统。其模型如图 1.1.5 所示。

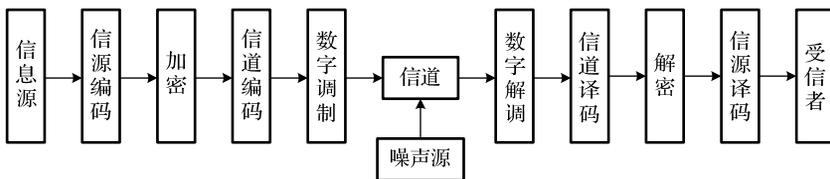


图 1.1.5 数字通信系统模型

1. 信源编码与译码

信源编码有两个基本功能：一是提高信息传输的有效性，即在保证原始消息质量的前提下，通过某种数据压缩技术尽量设法减少码元数目和降低码元速率；二是完成模/数（A/D）变换，即当信息源输出的是模拟信号时，信源编码器将其转换成数字信号，以实现模拟信号的数字化传输。信源译码是信源编码的逆过程。

2. 加密与解密

在需要实现保密通信的场合，为了保证所传信息的安全，人为地将被传输的数字序列扰乱，即加上密码，这种处理过程叫加密。在接收端利用与发送端相同的密码复制品对收到的数字序列进行解密，恢复原来信息，这种处理过程叫解密。

3. 信道编码与译码

信道编码是对原始信号的第二次编码，目的是增强数字信号的抗干扰能力，提高通信系统的可靠性。

4. 数字调制与解调

数字调制就是把数字基带信号的频谱搬移到高频处，形成适合在信道中传输的带通信号。基本的数字调制方式有振幅键控（ASK）、频移键控（FSK）、绝对相移键控（PSK）、差分相移键控（DPSK）。

5. 同步

同步是使收发两端的信号在时间上保持步调一致，是保证数字通信系统有序、准确、可靠工作的前提条件。

1.1.4 信息的度量

通信系统的任务是传递消息，每一消息信号中必定包含有接收者所需要知道的信息。信息是指消息中包含的有效内容，消息以具体信号形式表现出来，而信息则是抽象的、本质的内容。消息的出现是随机的、无法预知的。一个预先确知的消息不会给接收者带来任何信息，因而就失去了传递的必要。如同运输货物的多少可以采用“货运量”来衡量一样，传输信息的多少也可以采用“信息量”来进行衡量。

消息的种类是众多的，因此度量消息中所含信息量的方法，必须能够用来度量任何种类的消息，而且，这种度量方法应该与消息的重要程度无关，对接收者来说，消息中不确定的内容才构成信息，消息所表达的事件越不可能发生，越不可预测，越会令人感到意外和惊奇，则消息包含的信息量就越大。

因此，消息中包含的信息量与消息发生的概率密切相关。消息出现的概率越小，则消息中包含的信息量就越大。假设 $P(x)$ 表示消息发生的概率， I 表示消息中包含的信息量，则 I 与 $P(x)$ 之间的关系式为：

$$I = \log_2 \frac{1}{P(x)} = -\log_2 P(x) \quad (\text{bit}) \quad (1.1-1)$$

设离散信息源是一个由 M 个符号组成的集合，其中每个符号 $x_i (i=1,2,3,\dots,M)$ 按一定的概率 $P(x_i)$ 独立出现，即

$$\left[\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \cdots, & x_M \\ P(x_1), & P(x_2), & \cdots, & P(x_M) \end{array} \right], \text{ 且有 } \sum_{i=1}^M P(x_i) = 1$$

则 x_1, x_2, \dots, x_M 所包含的信息量分别为

$$-\log_2 P(x_1), -\log_2 P(x_2), \dots, -\log_2 P(x_M)$$

于是, 每个符号所含信息量的统计平均值, 即平均信息量为

$$\begin{aligned} H(x) &= P(x_1)[- \log_2 P(x_1)] + P(x_2)[- \log_2 P(x_2)] + \cdots + P(x_M)[- \log_2 P(x_M)] \\ &= - \sum_{i=1}^M P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad (\text{bit / 符号}) \end{aligned} \quad (1.1-2)$$

平均信息量 H 等于各符号包含的信息量乘以各符号出现的概率之和。由于 H 同热力学中的熵形式相似, 故通常又称它为信息源的熵, 其单位为 bit / 符号。

当离散信源中各符号等概率独立出现 ($P(x_i) = 1/M$) 时, 平均信息量 H 达到最大值, 为

$$H_{\max} = \log_2 M \quad (\text{bit / 符号}) \quad (1.1-3)$$

1.1.5 数字通信系统主要性能指标

模拟通信在历史上曾经占据过主导地位。但近 30 年来, 随着超大规模集成电路工艺的成熟及计算机技术和数字信号处理技术的充分发展, 数字通信发展迅速, 大多数的模拟通信系统已被数字通信系统所取代。尽管在未来一段时间内数字通信系统还不能完全取代模拟通信系统, 但通信朝着数字化方向发展是不会改变的。因此, 这里主要介绍数字通信系统的性能指标。

数字通信系统的有效性通常用传输速率和频带利用率来衡量。

1. 有效性指标

(1) 码元传输速率 R_B (或称码元速率、传码率、数码率)。它被定义为单位时间 (每秒) 内传送码元的数目, 单位为波特 (Baud), 简记为 B。根据码元速率的定义, 若每个码元的长度为 T 秒, 则有

$$R_B = \frac{1}{T} \quad (\text{B}) \quad (1.1-4)$$

(2) 信息传输速率 R_b , 简称为传信率, 又称比特率。它被定义为单位时间 (每秒) 内传递的平均信息量或比特数, 单位为比特/秒, 简记为 b/s 或 bps。

码元速率 R_B 和信息速率 R_b 之间的关系:

若每个码元所含的平均信息量为 H , 则有

$$R_b = R_B \cdot H \quad (\text{b/s}) \quad (1.1-5)$$

当各码元等概率出现时, $H_{\max} = \log_2 M$ (即 M 进制的每个码元携带 $\log_2 M$ 比特的信息量), 此时有

$$R_b = R_B \cdot \log_2 M \quad (\text{b/s}) \quad (1.1-6)$$

$$R_B = \frac{R_b}{\log_2 M} \quad (\text{B}) \quad (1.1-7)$$

(3) 频带利用率。在比较不同通信系统的有效性时,不能单看它们的传输速率,还应考虑所占用的频带宽度,因为两个传输速率相等的系统其传输效率并不一定相同。所以,真正衡量数据通信系统的有效性指标是频带利用率,它定义为单位带宽(每赫兹)内的传输速率,即

$$\eta = \frac{R_B}{B} \quad (\text{B/Hz}) \quad (1.1-8)$$

$$\eta_b = \frac{R_b}{B} \quad \text{b/(s}\cdot\text{Hz)} \quad (1.1-9)$$

数字通信系统的可靠性可用差错率来衡量。差错率常用误码率和误信率表示。

2. 可靠性指标

(1) 误码率 P_e , 是指错误接收的码元数在传输总码元数中所占的比例, 即

$$P_e = \frac{\text{错误码元数}}{\text{传输总码元数}} \quad (1.1-10)$$

(2) 误信率 P_b , 又称误比特率, 是指错误接收的比特数在传输总比特数中所占的比例, 即

$$P_b = \frac{\text{错误比特数}}{\text{传输总比特数}} \quad (1.1-11)$$

显然, 在二进制中有 $P_b = P_e$, M 进制时, 有 $P_b < P_e$ 。

本节习题

1. 通信系统是如何分类的?
2. 何谓数字信号? 何谓模拟信号? 两者的根本区别是什么?
3. 何谓数字通信? 数字通信的优缺点是什么?
4. 试画出数字频带通信系统的模型, 并简要说明各部分的作用。
5. 衡量数字通信系统的主要性能指标是什么?
6. 何谓码元速率和信息速率? 它们之间的关系如何?
7. 何谓误码率和误信率? 它们之间的关系如何?

1.2 信号分析

信号是由消息转换而成的, 携带有信息。信息的传输和处理是通过信号来进行的, 所以对信号进行分析是研究信息传输和处理的基础。信号分析是从不同的角度、不同的侧面来揭示信号的本质, 以便对信号进行传输和处理。

通信系统中传输的信号本质上都具有随机性, 这种具有随机特性的信号称为随机信号。而在前续课程中学习的确知信号, 只是随机信号的一种特定形式, 如果几个确知信号随机出现, 则构成了一种随机信号, 所以确知信号的分析是随机信号分析的基础。

1.2.1 确知信号和随机信号

确知信号: 可以用确定时间函数表示的信号, 对于任意指定的时刻, 可确定一相应的函数值。如一个正弦波形, 当幅度、角频率和初相均为确定值时, 任意给定一时刻 t_0 , 函数在 t_0 时刻的取值都是确定的, 因此它属于确知信号。

随机信号：不能用确定的时间函数来表示，在任意时刻的取值都具有不确定性，我们只可能知道它的统计特性，如在某时刻取某一值的概率，这类信号称为随机信号或不确定信号。如上述正弦波中某一参量（比如相位）在其可能取值范围内没有固定值的情况，可将其表示为： $f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$ ，其中 A_0 和 ω_0 为确定值， θ 是在 $(0, 2\pi)$ 范围内随机取值，那么任意给定一时刻 t_0 ，函数在 t_0 时刻的取值都是随机的，因此它属于随机信号。电子系统中的起伏热噪声、雷电干扰信号是两种典型的随机信号。

1.2.2 确知信号的频域分析

从确知信号的时域波形能看出信号的电压或电流值在各时间点的大小，而对信号的一些重要的参数如频率成分等不能直观地反映。因此，需要从信号的其他变换空间对信号进行深入分析。如果从幅度—频率空间对信号进行分析，则可以得到信号的频谱特性。对应的数学变换称为频谱变换。需要注意的是，由于信号具有不同的特性，因此对于不同的信号，频谱分析时采用的分析方法是不同的，周期信号采用傅里叶级数或傅里叶变换，非周期信号采用傅里叶变换，随机信号采用功率谱的方法进行频谱分析。

1. 非周期信号的傅里叶变换

对于非周期信号 $f(t)$ ，可用傅里叶变换求出信号的频谱密度函数 $F(j\omega)$ ，即

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.2-1)$$

反傅里叶变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.2-2)$$

$f(t)$ 与 $F(j\omega)$ 的关系常记为

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad (1.2-3)$$

2. 周期信号的傅里叶变换

对于周期信号 $f(t)$ ， T 为其周期，那么周期信号 $f(t)$ 可展开成指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (1.2-4)$$

式中， $\Omega = 2\pi/T$ 为周期信号的基波角频率； F_n 为指数形式傅里叶级数的系数，它表示为

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\Omega t} dt \quad (1.2-5)$$

或者根据傅里叶变换和傅里叶级数的系数之间的关系，有

$$F_n = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega} \quad (1.2-6)$$

式 (1.2-6) 中 $F_0(j\omega)$ 是周期信号的第一个脉冲信号 $f_0(t)$ 的傅里叶变换。

3. 傅里叶变换的性质

傅里叶变换的性质归纳如表 1.2.1 所示。

表 1.2.1 傅里叶变换的性质

名称	时域 $f(t)$	频域 $F(j\omega)$
线性	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$
奇偶性	$f(t)$ 为实信号	$ F(j\omega) = F(-j\omega) , \quad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$ $R(\omega) = R(-\omega), \quad X(\omega) = -X(-\omega)$
		$f(t) = f(-t)$ $f(t) = -f(-t)$
对称性	$F(jt)$	$2\pi f(-\omega)$
尺度变换	$f(at), \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a } F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
时移	$f(t \pm t_0)$	$e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega)$
频移	$f(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$F[j(\omega \mp \omega_0)]$
卷积定理	时域	$f_1(t) * f_2(t)$
	频域	$f_1(t)f_2(t)$
时域微分	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(j\omega)$
时域积分	$f^{(-1)}(t)$	$\pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$
频域微分	$(-jt)^n f(t)$	$F^{(n)}(j\omega)$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt}$	$F^{(-1)}(j\omega)$

4. 典型信号的傅里叶变换

1) 单位冲激函数 $\delta(t)$

单位冲激函数的定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.2-7)$$

其傅里叶变换式为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (1.2-8)$$

可见，单位冲激函数的频谱函数是常数 1，它均匀分布于整个频率范围。其波形和频谱如图 1.2.1 所示。

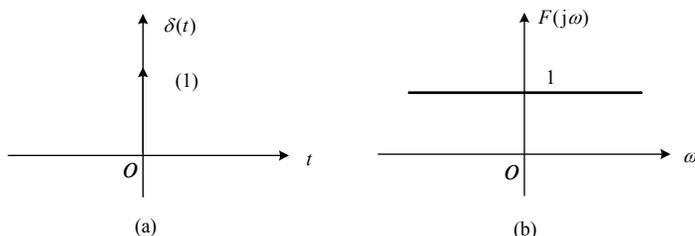


图 1.2.1 单位冲激函数的波形及其频谱

2) 单位直流信号 (常数 1)

利用 $\delta(t) \leftrightarrow 1$ 和傅里叶变换的对称性质, 可得单位直流信号的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (1.2-9)$$

可见, 单位直流信号的频谱函数是位于 $\omega=0$ 处强度为 2π 的冲激函数。其波形和频谱如图 1.2.2 所示。

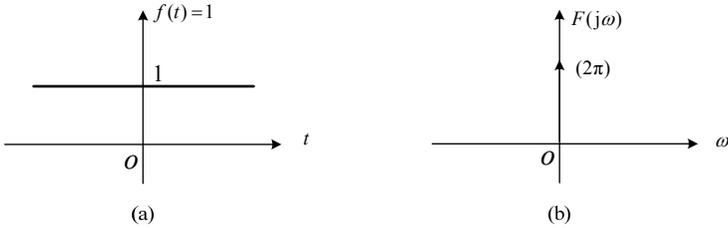


图 1.2.2 单位直流信号波形及其频谱

3) 矩形脉冲信号 (门函数)

矩形脉冲信号的时域表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (1.2-10)$$

由式 (1.2-1) 可求得其频谱函数为

$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (1.2-11)$$

其波形和频谱如图 1.2.3 所示。

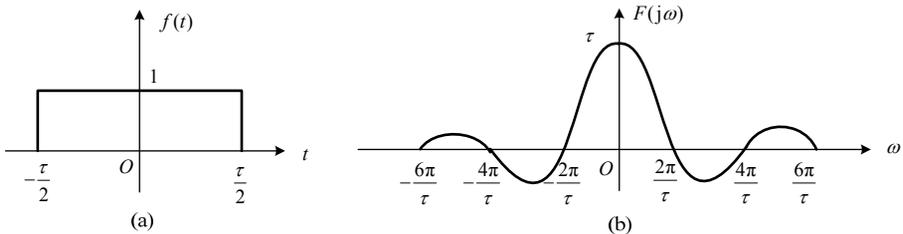


图 1.2.3 矩形脉冲信号的波形及其频谱

4) 正弦和余弦信号

设某余弦信号为

$$f(t) = A \cos \omega_0 t$$

其频谱函数为

$$F(j\omega) = \pi A [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (1.2-12)$$

其波形和频谱如图 1.2.4 所示。

设某正弦信号为

$$f(t) = A \sin \omega_0 t$$

其频谱函数为

$$F(j\omega) = \pi A j [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (1.2-13)$$

其波形和频谱如图 1.2.5 所示。

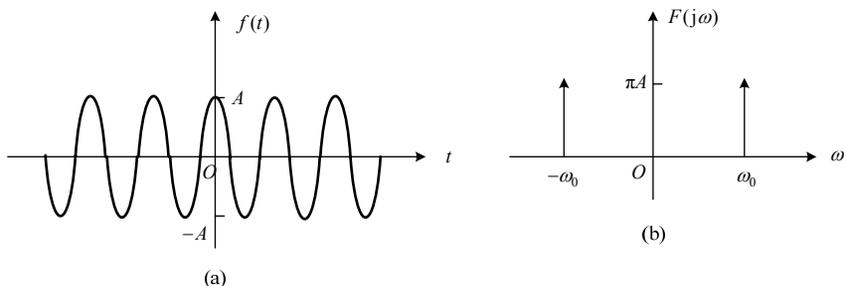


图 1.2.4 余弦信号的波形及其频谱

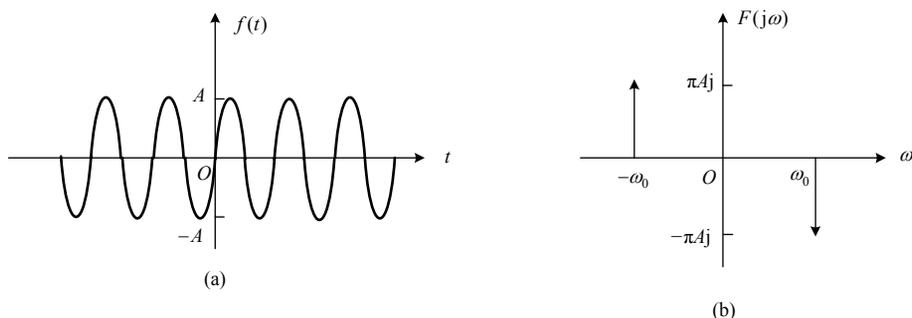


图 1.2.5 正弦信号的波形及其频谱

5) 周期的单位冲激函数

周期为 T 的冲激函数的表达式为

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.2-14)$$

其频谱函数为

$$\delta_\Omega(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) \quad (1.2-15)$$

其中, $\Omega = 2\pi/T$ 。其波形和频谱如图 1.2.6 所示。

6) 周期的矩形脉冲信号

周期的矩形脉冲信号的表达式为

$$f(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_\tau(t - nT) \quad (1.2-16)$$

第一个脉冲信号 $f_0(t) = A g_\tau(t)$, 其频谱函数为

$$F(j\omega) = \frac{2\pi A \tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\Omega) \quad (1.2-17)$$

其波形和频谱如图 1.2.7 所示。

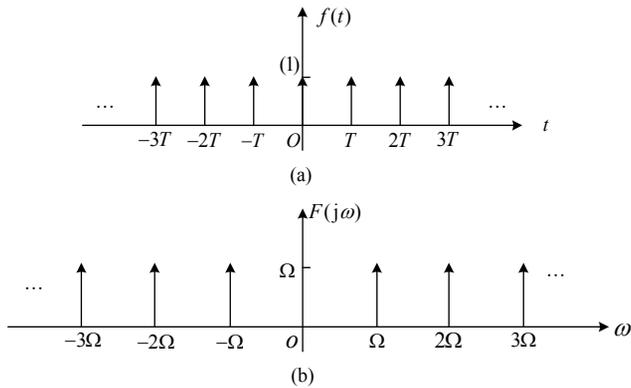


图 1.2.6 周期的单位冲激函数的波形及其频谱

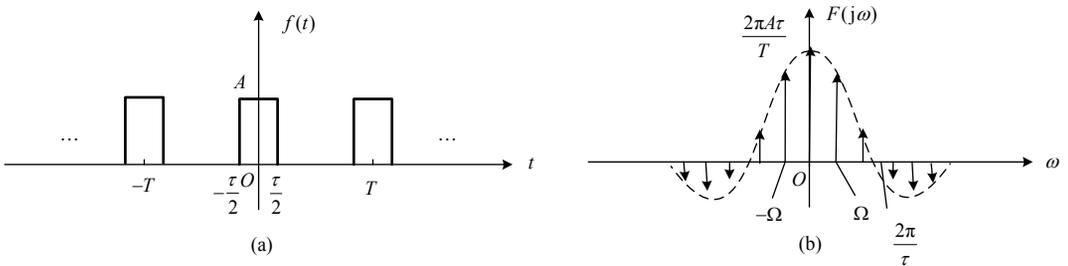


图 1.2.7 周期的矩形脉冲的波形及其频谱

7) 能量谱密度

对能量信号 $f(t)$ ，可用其频谱密度函数 $F(j\omega)$ 及信号的能量谱密度 $\varepsilon(\omega)$ 来描述。设能量信号 $f(t)$ 的频谱密度函数为 $F(j\omega)$ ，信号的能量为

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned} \tag{1.2-18}$$

其中

$$\varepsilon(\omega) = |F(j\omega)|^2 \tag{1.2-19}$$

为信号的能量谱密度，其物理意义为单位频带上信号的能量，表明信号的能量在频率轴上的分布情况，单位为焦耳/赫兹。

式 (1.2-18) 可重新写为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) d\omega \tag{1.2-20}$$

上式表明, 信号 $f(t)$ 的能量为能量谱密度在频域内的积分值。式 (1.2-20) 称为能量信号的帕萨瓦尔定理。

8) 功率谱密度

对功率信号 $f(t)$ 可用其功率谱密度 $p(\omega)$ 来描述。设功率信号 $f(t)$ 的截短信号 $f_T(t)$ 的频谱密度函数为 $F_T(j\omega)$, 由式 (1.2-20) 的能量信号帕萨瓦尔定理, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.2-21)$$

将式 (1.2-21) 代入信号平均功率的定义式, 得功率信号的平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (1.2-22)$$

其中

$$p(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(j\omega)|^2 \quad (1.2-23)$$

为功率信号 $f(t)$ 的功率谱密度, 其物理意义为单位频带上信号的功率, 表明信号的功率在频率轴上的分布情况, 单位为瓦/赫兹。式 (1.2-22) 表明信号 $f(t)$ 的功率为功率谱密度在频域内的积分值。

1.2.3 随机过程的概念及统计描述

1. 随机过程的概念

通信系统中遇到的噪声是典型的随机过程。下面以噪声为例, 进一步理解随机过程的基本概念。假设有 n 台性能完全相同的接收机, 工作条件也完全相同, 然后用 n 台示波器同时观测并记录 n 台接收机的输出噪声。如果输出噪声是一个确定的时间函数, 那么将会得到 n 个相同的结果。但测试结果表明, n 台接收机的输出噪声各不相同, 即使 n 足够大, 也不会得到两个完全相同的结果, 其输出波形如图 1.2.8 所示。接收机输出的噪声电压随时间的变化是不可预知的, 因而它是一个随机过程。

根据图 1.2.8 可以从两个不同角度来理解随机过程。从一个角度来看, 随机过程是所有样本函数的集合。图中的每一个波形都是一个确定的时间函数 $\xi_i(t)$, 把它称为样本函数或随机过程的一次实现。全部样本函数组成的集合 $\{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)\}$ 就是一个随机过程, 记作 $\xi(t)$ 。从另外一个角度看, 随机过程是随机变量概念的延伸。如果在某一个给定时刻 $t = t_1$ 上来观察随机过程的值 $\xi(t_1)$, 那么它就是一个随机变量; 在不同的时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 考察随机过程时, 将得到不同的随机变量。

2. 随机过程的统计描述

1) 随机过程的概率密度函数和分布函数

设一随机过程 $\xi(t)$, 在任意给定时刻 t_1 的取值 $\xi(t_1)$ 是一个随机变量, 因此随机过程 $\xi(t)$ 在

t_1 时刻的统计特性就是该时刻随机变量 $\xi(t_1)$ 的统计特性。而随机变量的统计特性可以用分布函数或概率密度函数来描述。我们把随机变量 $\xi(t_1)$ 小于或等于某一数值 x_1 的概率 $P[\xi(t_1) \leq x_1]$ 简记为 $F_1(x_1, t_1)$ ，即

$$F_1(x_1, t_1) = P[\xi(t_1) \leq x_1] \quad (1.2-24)$$

称为随机过程 $\xi(t)$ 的一维分布函数。如果 $F_1(x_1, t_1)$ 对 x_1 的偏导数存在，即

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1) \quad (1.2-25)$$

则称 $f_1(x_1, t_1)$ 为随机过程 $\xi(t)$ 的一维概率密度函数。

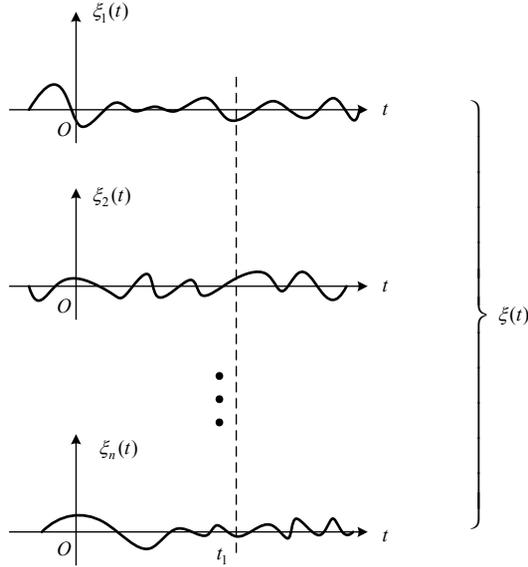


图 1.2.8 随机噪声示意图

显然，随机过程的一维分布函数或一维概率密度函数仅仅描述了随机过程在各个孤立时刻上的统计特性，而不能反映随机过程内部任意两个时刻或多个时刻上的随机变量之间的内在联系，为此需要进一步引入二维分布函数和 multidimensional 分布函数才能充分描述随机过程。

对于任意给定的两个时刻 t_1 和 t_2 ， $\xi(t_1)$ 和 $\xi(t_2)$ 是两个随机变量，把 $\xi(t_1) \leq x_1$ 和 $\xi(t_2) \leq x_2$ 同时成立的概率

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2] \quad (1.2-26)$$

称为随机过程 $\xi(t)$ 的二维分布函数。如果

$$\frac{\partial F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (1.2-27)$$

存在，则称 $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 为随机过程 $\xi(t)$ 的二维概率密度函数。

同理，称

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n] \quad (1.2-28)$$

为随机过程 $\xi(t)$ 的 n 维分布函数。如果

$$\frac{\partial F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (1.2-29)$$

存在, 则称其为 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数。显然, n 越大, 对随机过程统计特性的描述就越充分。

2) 随机过程的数字特征

n 维分布函数或概率密度函数虽然能够较全面地描述随机过程的统计特性, 但在实际工作中, 往往不容易或不需要确定出 n 维分布函数和概率密度函数, 而是用随机过程的数字特征来描述随机过程的统计特性。

(1) 随机过程的均值。随机过程在任意给定时刻 t_1 的取值 $\xi(t_1)$ 是一个随机变量, 其均值为

$$E[\xi(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f_1(x_1, t_1) dx_1 = a(t_1)$$

上式中, t_1 取任意值 t 时, 就可以得到随机过程的均值, 记为 $E[\xi(t)]$ 或 $a(t)$, 则随机过程 $\xi(t)$ 的均值为

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x, t) dx = a(t) \quad (1.2-30)$$

均值 $a(t)$ 是随机过程的所有样本函数在时刻 t 的函数值的平均值, 一般情况下是时间 t 的函数, 它表示了随机过程 $\xi(t)$ 在每个时刻的波动中心, 反映了随机过程的一维统计特性。

(2) 随机过程的方差。随机过程的方差 $D[\xi(t)]$ 定义为

$$\begin{aligned} D[\xi(t)] &= E\{[\xi(t) - a(t)]^2\} = E[\xi^2(t)] - a^2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x, t) dx - a^2(t) \end{aligned} \quad (1.2-31)$$

$D[\xi(t)]$ 常记为 $\sigma^2(t)$ 。而且从式 (1.2-31) 可知, 方差等于平方的均值与均值平方之差, 它表示随机过程在时刻 t 相对于均值 $a(t)$ 的偏离程度。一般情况下, 它也是时间 t 的函数。

(3) 随机过程的自协方差函数。

随机过程 $\xi(t)$ 的均值和方差仅仅描述了随机过程在孤立时刻上的统计特性, 而不能反映随机过程内部任意两个时刻之间的内在联系。为了衡量随机过程在任意两个时刻上获得的随机变量之间的关联程度, 常采用协方差函数和相关函数。

随机过程 $\xi(t)$ 的协方差函数 $B(t_1, t_2)$ 定义为

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (1.2-32)$$

式中, $a(t_1)$ 和 $a(t_2)$ 分别为随机过程 $\xi(t)$ 在 t_1 和 t_2 时刻的均值; $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 为随机过程 $\xi(t)$ 的二维概率密度函数。

(4) 随机过程的自相关函数。随机过程 $\xi(t)$ 的自相关函数 $R(t_1, t_2)$ 定义为

$$R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (1.2-33)$$

由式 (1.2-32) 和式 (1.2-33) 可以得到 $B(t_1, t_2)$ 和 $R(t_1, t_2)$ 的关系为

$$B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - a(t_1)a(t_2) \quad (1.2-34)$$

当 $a(t_1)$ 和 $a(t_2)$ 为 0 时, 则有 $B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2)$ 。

(5) 相关系数。随机过程 $\xi(t)$ 的相关系数 $\rho(t_1, t_2)$ 定义为

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{B(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \frac{R(t_1, t_2) - a(t_1)a(t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} \quad (1.2-35)$$

相关系数表示了任意两个时刻 t_1 、 t_2 上的两个随机变量 $\xi(t_1)$ 、 $\xi(t_2)$ 的相关程度。若 $\rho(t_1, t_2) = 0$, 则 $B(t_1, t_2) = 0$, 表明 $\xi(t_1)$ 、 $\xi(t_2)$ 不相关。

(6) 互协方差函数和互相关函数。随机过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的互协方差函数定义为

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E\{[\xi(t_1) - a_\xi(t_1)][\eta(t_2) - a_\eta(t_2)]\} \quad (1.2-36)$$

随机过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的互相关函数定义为

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\eta(t_2)] \quad (1.2-37)$$

它们二者之间的关系为

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = R_{\xi\eta}(t_1, t_2) - a_\xi(t_1)a_\eta(t_2) \quad (1.2-38)$$

1.2.4 几种重要的随机过程

1. 平稳随机过程

平稳随机过程是随机过程中非常重要的过程之一, 而且一般来说, 通信系统中遇到的随机信号和噪声大多数可视为平稳随机过程。

1) 严平稳随机过程

所谓平稳随机过程, 是指它的统计特性不随时间的推移而变化。设随机过程 $\xi(t)$, 对于任意的 n 值和时间间隔 τ 来说, 如果其 n 维概率密度函数满足

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \quad (1.2-39)$$

则称随机过程 $\xi(t)$ 为严格意义下的平稳随机过程, 简称严平稳随机过程。可见, 严平稳随机过程的 n 维概率密度函数与时间的起点无关。

由式 (1.2-39) 可知, 严平稳随机过程的一维概率密度函数与时间无关, 即

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1) \quad (1.2-40)$$

二维概率密度函数只与时间间隔 τ 有关, 即

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; \tau) \quad (1.2-41)$$

根据式 (1.2-30) 和式 (1.2-33) 计算严平稳随机过程的数字特征:

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x) dx = a \quad (1.2-42)$$

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau) \quad (1.2-43)$$

可见, 严平稳随机过程的均值与 t 无关, 为常数 a ; 自相关函数只与时间间隔 τ 有关。

2) 广义平稳随机过程

若随机过程 $\xi(t)$ 的均值 $E[\xi(t)] = a$ 为一常数, 且自相关函数 $R(t_1, t_2) = R(\tau)$ 只与时间间隔 $t_2 - t_1 = \tau$ 有关, 则称随机过程 $\xi(t)$ 为宽平稳随机过程, 或者称为广义平稳随机过程。

由以上分析可知, 严平稳随机过程一定是广义平稳的, 反之不一定成立。

后面如不特别说明, 随机过程均指广义平稳随机过程, 简称平稳随机过程。

3) 平稳随机过程的功率谱密度

随机过程的频谱特性可以用功率谱密度来描述。我们知道, 随机过程的任一样本函数是一个确定的功率信号。而对于任意的确定的功率信号 $f(t)$, 它的功率谱密度定义为

$$P_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (1.2-44)$$

式中, $F_T(\omega)$ 是 $f(t)$ 的截短函数 $f_T(t)$ 的频谱函数。

在这里, 我们不妨把 $f(t)$ 看成是平稳随机过程 $\xi(t)$ 的任一样本, 因此每一个样本函数的功率谱密度均可由式 (1.2-44) 表示。由于 $\xi(t)$ 是无穷多个样本函数的集合, 哪一个样本函数出现是不能预知的, 因此, 某一实现的功率谱密度不能作为过程的功率谱密度。随机过程的功率谱密度可以认为是所有样本的功率谱密度的统计平均。

设平稳随机过程 $\xi(t)$ 的功率谱密度为 $P_\xi(\omega)$, $f_T(t)$ 是随机过程某一实现的截短函数, 而且 $f_T(t) \leftrightarrow F_T(\omega)$, 则平稳随机过程 $\xi(t)$ 的功率谱密度 $P_\xi(\omega)$ 为

$$P_\xi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (1.2-45)$$

式 (1.2-45) 虽然给出了平稳随机过程的功率谱密度的定义, 但如果直接用它来计算功率谱密度却并不容易, 那么如何能更方便地求功率谱密度 $P_\xi(\omega)$ 呢?

确知功率信号的自相关函数与功率谱密度之间互为一对傅里叶变换。对随机过程而言, 上述关系仍然成立。也就是说, 平稳随机过程的自相关函数 $R(\tau)$ 与功率谱密度 $P_\xi(\omega)$ 之间也是互为一对傅里叶变换, 即

$$P_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.2-46)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.2-47)$$

以上关系称为维纳-辛钦定理。它描述了平稳随机过程时域特性和频域特性之间的关系, 在平稳随机过程的理论和应用中是一个非常重要的工具。当有了平稳随机过程的自相关函数 $R(\tau)$ 或功率谱密度 $P_\xi(\omega)$, 那么根据该定理就可以得到功率谱密度 $P_\xi(\omega)$ 或自相关函数 $R(\tau)$ 。

2. 高斯随机过程

高斯随机过程又称为正态随机过程, 是通信系统中最常见又最重要的一种随机过程。例如, 通信系统中的主要噪声就是典型的高斯随机过程。

1) 高斯过程的定义

所谓高斯过程 $\xi(t)$ ，是指它的任意 n 维概率密度函数均服从正态分布，则称此随机过程为正态或高斯随机过程。其 n 维概率密度函数为

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n |\mathbf{B}|^{1/2}}} \exp \left[\frac{-1}{2|\mathbf{B}|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\mathbf{B}|_{jk} \left(\frac{x_j - a_j}{\sigma_j} \right) \left(\frac{x_k - a_k}{\sigma_k} \right) \right] \quad (1.2-48)$$

式中， $a_j = E[\xi(t_j)]$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为 $\xi(t)$ 在 t_i 时刻的均值；

$\sigma_j^2 = E\{[\xi(t_j) - a_j]^2\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为 $\xi(t)$ 在 t_i 时刻的方差；

$|\mathbf{B}|$ 为归一化协方差矩阵行列式，即

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

其中， $\rho_{jk} = \frac{E\{[\xi(t_j) - a_j][\xi(t_k) - a_k]\}}{\sigma_j \sigma_k}$ 为归一化协方差系数， $|\mathbf{B}|_{jk}$ 为行列式 $|\mathbf{B}|$ 中元素 ρ_{jk} 的代数余子式。

2) 高斯随机过程的性质

(1) 广义平稳的高斯随机过程也是严平稳的。

由式 (1.2-48) 可知，高斯随机过程的 n 维概率密度函数由各随机变量的均值、方差和归一化协方差函数决定。如果高斯随机过程是平稳的，则其均值、方差与时间 t 无关，归一化协方差函数只与时间间隔 τ 有关，而与时间起点无关。这时，随机过程的 n 维概率密度函数也与时间起点无关，故随机过程是严平稳的。

(2) 高斯随机过程在不同时刻的取值（随机变量）如果互不相关，则它们也统计独立。

随机变量互不相关，即对所有的 $j \neq k$ 有 $\rho_{jk} = 0$ ， $j = k$ 有 $\rho_{jk} = 1$ ，这时式 (1.2-48) 可以简化为

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}} \exp \left[-\frac{(x_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2} \right] = f(x_1, t_1) \cdot f(x_2, t_2) \cdots f(x_n, t_n) \quad (1.2-49)$$

可见，如果高斯过程在不同时刻的取值互不相关，那么它们也统计独立。

(3) 高斯随机过程通过线性系统后仍然是高斯随机过程。

当 $\xi_o(t)$ 是平稳的高斯随机过程时，由概率论的中心极限定理可知，多个高斯随机变量之和仍是高斯随机变量，因此 $\xi_o(t)$ 为高斯随机过程。

3. 窄带随机过程

通信系统中的随机过程根据其功率谱密度来划分，可以分为宽带随机过程和窄带随机过程。宽带随机过程的功率谱密度占有较宽的频带，并往往从零频率或零频率附近开始分布；而窄带随机过程的功率谱密度以远远大于零频率的 ω_c 为中心，占据的频带宽度 $\Delta\omega$ 满足 $\Delta\omega \ll \omega_c$ 。窄带随机过程是通信系统中常见的随机信号。

1) 窄带随机过程的定义

设 $\xi(t)$ 为平稳随机过程，其功率谱密度 $P(\omega)$ 如图 1.2.9 所示。

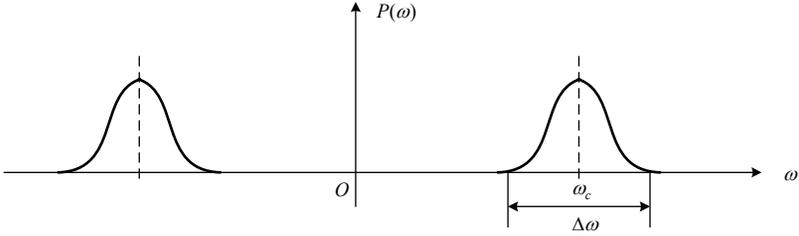


图 1.2.9 窄带随机过程的功率谱密度

若带宽 $\Delta\omega$ 满足 $\Delta\omega \ll \omega_c$ ， ω_c 是频带的中心频率，则称 $\xi(t)$ 为窄带平稳随机过程。其波形示意图如图 1.2.10 所示。

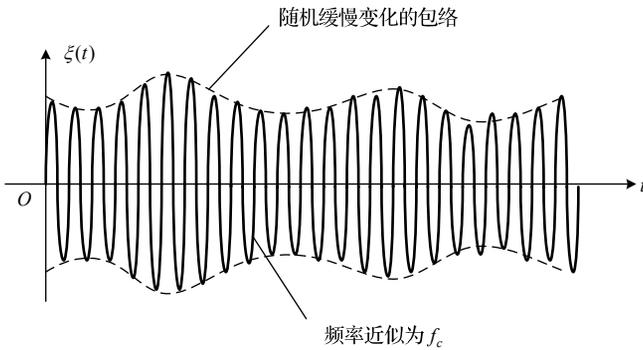


图 1.2.10 窄带随机过程的波形示意图

2) 窄带随机过程的表示

由图 1.2.10 可见，窄带随机过程的波形是一个频率近似为 f_c ，包络和相位缓慢变化的正弦波。因此可以把窄带随机过程表示为

$$\xi(t) = a_\xi(t) \cos[\omega_c t + \varphi_\xi(t)], \quad a_\xi(t) \geq 0 \quad (1.2-50)$$

式中， $a_\xi(t)$ 和 $\varphi_\xi(t)$ 分别是窄带随机过程 $\xi(t)$ 的随机包络和随机相位； ω_c 是中心角频率。显然，根据窄带特性， $a_\xi(t)$ 和 $\varphi_\xi(t)$ 的变化相对于载波 $\cos \omega_c t$ 的变化要缓慢得多。

将式 (1.2-50) 展开，窄带随机过程又可以表示为

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_c t - \xi_s(t) \sin \omega_c t \quad (1.2-51)$$

式中， $\xi_c(t) = a_\xi(t) \cos \varphi_\xi(t)$ ，由于它与载波 $\cos \omega_c t$ 同相，故称为窄带随机过程 $\xi(t)$ 的同相分量； $\xi_s(t) = a_\xi(t) \sin \varphi_\xi(t)$ ，由于它与载波 $\cos \omega_c t$ 相差 $\frac{\pi}{2}$ ，故称为窄带随机过程 $\xi(t)$ 的正交分量。

3) 窄带随机过程的统计特性

均值为零、方差为 σ_ξ^2 的平稳高斯窄带随机过程，其同相分量和正交分量同样也是平稳高斯随机过程，而且均值都为零，方差都为 σ_ξ^2 ，在同一时刻得到的 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 是互不相关的